МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1997

УДК 624.072.21

© 1997 г. А.А. КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ (мл.)

О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ С СЕЧЕНИЕМ, БЛИЗКИМ К КРУГОВОМУ

Получены приближенные формулы для вычисления модуля касательных напряжений на поверхности упругого стержня, сечение которого близко к круговому.

Известно, что функция напряжений $u(x, y)$ в задаче о кручении упругих призматических стержней есть решение краевой задачи для уравнения

$$\Delta u = -2 \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

в плоской области D, которая является сечением стержня. Границу Γ области D мы считаем мало отличающейся от окружности в следующем смысле: пусть $\rho = 1 - \delta(\theta)$ – полярное уравнение границы Γ, причем

$$|\delta(\theta)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\theta)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\theta)| < \varepsilon \tag{3}$$

В настоящей заметке показано как, не находя самого решения задачи (1)–(2), вычислить с точностью до ε^2–$|\nabla u|$ модуль касательных напряжений на поверхности стержня.

Используем для этого результаты, полученные в работе [1] и книге [2]. В [1] был получен следующий результат: пусть s – натуральный параметр на кривой Γ, а $v_{s,h}$ – решения задач Дирихле в области D для уравнения Лапласа со следующими граничными условиями: $v_{s,h} = \frac{1}{2}h$ на дуге $(s-h, s+h)$ и равны нулю на остальной части Γ. Кроме того

$$\int_\Gamma v_{s,h}\,ds = 1$$

Тогда

$$|\nabla u(s)| = 2\lim_{h\to 0}\iint_D v_{s,h}\,dxdy \tag{4}$$

Пусть теперь

$$z = f(\zeta) \tag{5}$$

взаимно однозначное и конформное отображение области D на единичный круг $B(|\zeta| < 1)$ $(z = x + iy,\ \zeta = \zeta + i\eta = re^{i\phi})$. Тогда формула (4) будет выглядеть следующим образом:

$$|\nabla u| = 2\lim_{h\to 0}\iint_B V(r,\ \phi)|f'(\zeta)|^2\, rdrd\phi \tag{6}$$

где $V(r, \phi)$ – образ гармонической функции $v_{s,h}$ при отображении (5).

С другой стороны, в книге [2] даны приближенные (с точностью до ε^2) значения функции (5). Формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем, приведем ниже.

Пусть

$$\delta(\theta)=\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)) \tag{7}$$

$$\bar{\delta}(\theta)=\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta)) \tag{8}$$

Тогда будем иметь

$$f(\zeta)=\zeta-\varepsilon\zeta(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)\zeta^n)+O(\varepsilon^2)$$

$$|f'(\zeta)|^2=f'(\zeta)\overline{f'(\zeta)}=$$

$$=1-2\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)r^n(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi))+O(\varepsilon^2) \tag{9}$$

Введем обозначение

$$\alpha(r,\ \phi)=-\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)r^n(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi)) \tag{10}$$

В [2] получено неравенство

$$|\alpha(r,\ \phi)-\alpha(r,\ \theta)|<\mathrm{Const}\,\varepsilon^2 \tag{11}$$

Подставим теперь выражение (9) в формулу (6). Используя теорему о среднем для гармонических функций, получим

$$|\nabla u(s)|=2\lim_{h\to 0}\iint_B w(r,\ \phi)(1+2\alpha(r,\ \phi))r\,dr\,d\phi+O(\varepsilon^2) \tag{12}$$

Заметим, что $\alpha\,(r,\phi)$ – гармоническая функция, поэтому интеграл из формулы (12) можно вычислить, применяя технику, которая использовалась в работе [1]. Полученная там формула имеет вид

$$|\nabla u(s)|=(1+2\int_0^1\alpha(r,\ \phi)dr)(\alpha(1,\ \phi)+1)^{-1}+O(\varepsilon^2) \tag{13}$$

Точка ϕ на единичной окружности является прообразом точки $M\,(s)$ при преобразовании (5). С точностью до ε^2 формула (13) эквивалентна формуле

$$|\nabla u(s)|=1-\alpha(1,\ \phi)+2\int_0^1\alpha(r,\ \phi)dr \tag{14}$$

Подставим теперь выражение (10) в формулу (14), заменив в ней, пользуясь (11), ϕ на θ. Получим

$$|\nabla u(s)|=1+\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1))(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta))-$$

$$-2\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta))=$$

$$=1-\varepsilon(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta))+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

Преобразуя последнюю формулу с помощью (7) и (8), получим окончательно

$$|\nabla u(s)| = 1 - \delta(\theta) + \bar{\delta}'(\theta) + O(\varepsilon^2) \tag{15}$$

С помощью формулы (15) нетрудно вывести приближенную (с точностью до ε^2) формулу для вычисления жесткости кручения

$$P = 2\iint\limits_D u dxdy$$

Воспользуемся для этого формулой, которая дана в книге [3]. Пусть $d = x^2 + y^2$, тогда

$$P = \int\limits_\Gamma |\nabla u| d\, ds - \iint\limits_D d\, dxdy \tag{16}$$

Преобразуем формулу (16) следующим образом: подставим выражение (15) в контурный интеграл, перейдем от двойного интеграла к повторному и пренебрежем всеми членами порядка ε^2 и выше. Получим

$$P = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{2\pi} \delta(\theta) d\theta \tag{17}$$

Формула (17) с точностью до ε^2 совпадает с формулой жесткости кручения, которая дана в книге [4].

Замечание. В 1856 г. Сен-Венан выдвинул гипотезу о том, что наибольшие значения $|\nabla u(s)|$ достигаются в точках Γ, наименее удаленных от центра симметрии области D. Покажем, что эта гипотеза неверна уже для областей, мало отличающихся от круга. Пусть

$$\delta(\theta) = \varepsilon(6\cos 2\theta - 4\cos 4\theta) \tag{18}$$

При любом достаточно малом положительном ε (например, $\varepsilon < 1/100$) точками, наименее удаленными от центра симметрии области будут точки ($\theta = 0$, $\rho = 1 - 5\varepsilon$) и ($\theta = \pi$, $\rho = 1 - 5\varepsilon$). С другой стороны, если подставить (18) в формулу (15) легко получить, что

$$|\nabla u(s)| = 1 + 6\varepsilon\cos 2\theta - 3\varepsilon\cos 4\theta$$

Значение этой функции при $\theta = 0$ равно $1 + 3\varepsilon$, что меньше ее значения при $\theta = \pi/6$, равного $1 + 9\varepsilon/2$.

Приведенная выше техника позволяет получить в почти круговых областях граничные значения касательной производной решения второй краевой задачи для уравнения (1). Пусть $w(x, y)$ – решение уравнения (1) с граничными условиями $w_n = -2|D|/|\Gamma|$, где w_n – производная по внешней нормали к Γ, $|D|$ – площадь области D, а $|\Gamma|$ – периметр границы Γ. Действительно, если использовать полученную в работе [1] формулу

$$\dot{w}(s) = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{|D|}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma v'_{s,h} ds - \iint\limits_D v'_{s,h} dxdy\right) \tag{19}$$

сделать в ней замену переменных (5) и воспользоваться представлением (9), то с точностью до ε^2 будем иметь

$$\dot{w}(s) = \left(\frac{|D|}{|\Gamma|}\overline{\alpha}(1,\ \theta) - \int\limits_0^1 \overline{\alpha}(r,\ \theta) dr\right)(1 + \alpha(1,\ \theta))^{-1} \tag{20}$$

В формулах (19) и (20) сделаны следующие обозначения: $v'_{s,h}(x, y)$ – гармонические функции, сопряженными к которым являются функции $v_{s,h}$, а $\overline{\alpha}(r, \phi)$ – гармоническая функция, сопряженная к $\alpha(r, \phi)$.

Подставим теперь в формулу (20) выражение (10). Пренебрегая членами порядка ε^2, получим

$$\dot{w}(s) = \delta'(\theta) + \overline{\delta}(\theta) \tag{21}$$

Пример. Пусть область D – внутренность эллипса с полуосями $a = 1 + \varepsilon$, $b = 1$. Тогда

$$\rho = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 + \varepsilon\cos^2\theta + O(\varepsilon^2)$$

Отсюда приходим к выражениям

$$\delta(\theta) = -\varepsilon\cos^2\theta = -\tfrac{1}{2}\varepsilon(1+\cos 2\theta), \quad \overline{\delta}(\theta) = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2\theta$$

Формулы (15) и (21) примут вид

$$|\nabla u(s)| = 1 + \varepsilon(1 - \cos 2\theta)/2 \tag{22}$$

$$\dot{w}(s) = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2\theta \tag{23}$$

Из формулы (22) видно, что наибольшее значение $|\nabla u(s)|$ достигается в концах малой оси эллипса ($\theta = \pi/2, 3\pi/2$) и это значение равно $1 + \varepsilon$, что совпадает с точностью до ε^2 с точным значением [3].

Формула (23) показывает, что в концах малой оси эллипса функция $w(s)$ достигает своего наименьшего значения. Жесткость кручения равна $P = \pi/2 + \varepsilon\pi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Космодемьянский А.А. (мл.)* О вычислении граничных производных решений первой и второй краевых задач для уравнения Пуассона // ПММ. 1994. Т. 58. № 3. С. 172–177.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.XII.1995