МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1997

УДК 539.214;539.374

© 1997 г. М.В. Михайлова

РАСТЯЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

А.Ю. Ишлинский [1, 2] рассмотрел растяжение полосы, круглого цилиндра и круглой пластины из вязкопластического материала при малых возмущениях границы. Позднее [3] им рассмотрено растяжение полосы из идеальнопластического материала. В [1–3] используется эйлерово представление о течении вещества. Отметим, что задачи об устойчивости вязкопластического течения при лагранжевом описании деформирования рассматривались А.А. Ильюшиным [4].

Ниже в постановке А.Ю. Ишлинского [3] рассматривается растяжение круглого цилиндра из идеальнопластического материала при малых возмущениях границы при условии пластичности Мизеса. Отметим, что результаты, полученные в [1–4], могут быть использованы при определении устойчивости пластических тел, подобно тому как это выполнено в [5–7].

Соотношения теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса в цилиндрической системе координат примут вид

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\tau_{rz}^2=6k^2,\quad k=\mathrm{const} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_r=\lambda(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_z),\quad \lambda\geqslant 0\\ \varepsilon_\theta=\lambda(2\sigma_\theta-\sigma_z-\sigma_r)\\ \varepsilon_z=\lambda(2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta),\quad \varepsilon_{rz}=3\lambda\tau_{rz}\end{gathered} \tag{2}$$

где $\sigma_r,\tau_{rz},\ldots;\ \varepsilon_r,\varepsilon_{rz},\ldots$ – соответственно компоненты напряжений и скоростей деформации в цилиндрической системе координат $r\theta z$.

Рассмотрим круглый цилиндр, уравнение поверхности которого представим в виде

$$r=a+\delta f(z),\quad a=\mathrm{const} \tag{3}$$

где δ – малый параметр ($\delta\ll 1$).

Цилиндр растягивается вдоль оси z, боковая поверхность свободна от напряжений. Граничные условия на поверхности запишем в виде

$$\sigma_r\cos(nr)+\tau_{rz}\cos(nz)=0,\quad \tau_{rz}\cos(nr)+\sigma_z\cos(nz)=0 \tag{4}$$

где n – нормаль к поверхности.

Смещение точек цилиндра происходит в меридиональных плоскостях, положим

$$u=u(r,z),\quad v=0,\quad w=w(r,z) \tag{5}$$

где u, v, w – компоненты скорости перемещения вдоль r, θ, z.

Имеют место формулы Коши

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\quad \varepsilon_{r\theta}=\varepsilon_{z\theta}=0 \tag{6}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0 \tag{7}$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+\delta\sigma'_{ij},\qquad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^0+\delta\varepsilon'_{ij}$$

$$u=u^0+\delta u',\qquad w=w^0+\delta w',\qquad \lambda=\lambda^0+\delta\lambda' \tag{8}$$

$$\sigma_r^0=\sigma_\theta^0=\tau_{rz}^0=0,\qquad \sigma_z^0-\mathrm{const},\qquad \sigma_z^{02}=3k^2 \tag{9}$$

где индекс штрих приписан компонентам возмущения, а индекс градус – компонентам начального невозмущенного состояния $\delta=0$.

В силу (1), (8), (9) линеаризованное условия пластичности имеет вид

$$2\sigma'_z-\sigma'_r-\sigma'_\theta=0 \tag{10}$$

Линеаризованные уравнения (2) в силу (8), (9), (10) примут вид

$$\varepsilon'_r=\lambda^0(2\sigma'_r-\sigma'_\theta-\sigma'_z)-\lambda'\sigma_z^0,\qquad \varepsilon'_\theta=\lambda^0(2\sigma'_\theta-\sigma'_\theta z-\sigma'_z)-\lambda'\sigma_z^0$$

$$\varepsilon'_z=2\lambda'\sigma_z^0,\qquad \varepsilon'_{rz}=3\lambda^0\tau'_{rz} \tag{11}$$

Из (6), (10), (11) получаем

$$\frac{\partial u'}{\partial r}-\frac{u'}{r}=3\lambda^0(\sigma'_r-\sigma'_\theta),\qquad \frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial r}=6\lambda^0\tau'_{rz},\qquad \frac{\partial u'}{\partial r}+\frac{u'}{r}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \tag{12}$$

Удовлетворяя третьему уравнению (12), положим

$$u'=-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Psi}{\partial z},\qquad w'=\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Psi}{\partial z} \tag{13}$$

Из (13), (12), (10) находим

$$\sigma'_\theta=\sigma'_r-\frac{1}{3\lambda^0}\left(\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}\right)$$

$$\sigma'_z=\sigma'_r-\frac{1}{6\lambda^0}\left(\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}\right) \tag{14}$$

$$\tau'_{rz}=\frac{1}{6\lambda^0}\left(-\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\right)$$

Из (14), (8), (7) получаем

$$\frac{\partial\sigma'_r}{\partial r}+\frac{1}{6\lambda^0}\left(-\frac{1}{r}\,\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z}-\frac{3}{r^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}+\frac{4}{r^3}\,\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{\partial\sigma'_r}{\partial z}+\frac{1}{6\lambda^0}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\,\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{15}$$

исключив σ'_r, получим уравнение для определения $\Psi(r,z)$:

$$\frac{\partial^4\Psi}{\partial z^4}-\frac{\partial^4\Psi}{\partial r^2\partial z^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial^3\Psi}{\partial r\partial z^2}+\frac{\partial^4\Psi}{\partial r^4}-\frac{2}{r}\,\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3}+\frac{3}{r^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{3}{r^3}\,\frac{\partial\Psi}{\partial r}=0 \tag{16}$$

Решение уравнения (16) ищем в виде

$$\Psi(r,z)=\sin\nu z\varphi(r) \tag{17}$$

Тогда из (16) и (17) получим

$$\varphi^{IV}-\frac{2}{r}\varphi'''+\left(\frac{3}{r^2}+\nu^2\right)\varphi''+\left(-\frac{3}{r^3}-\frac{\nu^2}{r}\right)\varphi'+\nu^4\varphi=0 \tag{18}$$

Введем, следуя [1]:

$$\mu=\frac{\nu}{2}(\sqrt{3}+i),\quad \bar{\mu}=\frac{\nu}{2}(\sqrt{3}-i),\quad \mu^2=\frac{\nu^2}{2}(1+i\sqrt{3}),\quad \bar{\mu}^2=\frac{\nu^2}{2}(1-i\sqrt{3}) \tag{19}$$

Тогда (18) можно записать так

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\mu^2\right)(\varphi''-\frac{1}{r}\varphi'+\bar{\mu}^2\varphi)=0 \tag{20}$$

Общим решением уравнения (20) является сумма общих решений уравнений

$$\varphi_1''-\frac{1}{r}\varphi_1'+\mu^2\varphi_1=0,\quad \varphi_2''-\frac{1}{r}\varphi_2'+\bar{\mu}^2\varphi_2=0 \tag{21}$$

которые подстановками

$$\varphi_1(r)=rQ_1(\mu r),\quad \varphi_2(r)=rQ_2(\bar{\mu}r) \tag{22}$$

приводятся к уравнениям

$$\mu^2r^2Q_1''+\mu rQ_1'+(\mu^2r^2-1)Q_1=0,\quad \bar{\mu}^2r^2Q_2''+\bar{\mu}rQ_2'+(\bar{\mu}^2r^2-1)Q_2=0 \tag{23}$$

Общие интегралы уравнений (23), как известно, являются линейными комбинациями функций Бесселя и Неймана первого порядка. Так как функции Неймана при $r=0$ обращаются в бесконечность, то в решение они не входят.

Для того чтобы $\Psi(r,z)$ не содержала мнимых членов, возьмем в ее выражении произвольные постоянные сопряженными, т.е. положим

$$\Psi(r,z)=r[\bar{C}I_1(\mu r)+CI_1(\bar{\mu}r)]\sin\nu z \tag{24}$$

Из (15) и (17) находим

$$\sigma_r'=\frac{1}{6\lambda^0}\left(\frac{1}{r\nu}\varphi'''-\frac{1}{r^2}\varphi''+\frac{1}{r^3\nu}\varphi'+\frac{2\nu}{r^2}\varphi\right)\cos\nu z \tag{25}$$

Согласно (25), (17), (14), (13), (6), имеем

$$\sigma_\theta'=\frac{\cos\nu z}{6\lambda^0}\left(\frac{1}{r\nu}\varphi'''-\frac{1}{r^2\nu}\varphi''+\left(\frac{1}{r^3\nu}+\frac{2\nu}{r}\right)\varphi'-\frac{2\nu}{r^2}\varphi\right)$$

$$\sigma_z'=\frac{\cos\nu z}{6\lambda^0}\left(\frac{1}{r\nu}\varphi'''-\frac{1}{r^2\nu}\varphi''+\left(\frac{1}{r^3\nu}+\frac{\nu}{r}\right)\varphi'\right)$$

$$\tau_{rz}'=\frac{\sin\nu z}{6\lambda^0}\left(\frac{\nu^2}{r}\varphi-\frac{1}{r^2}\varphi'+\frac{1}{r}\varphi''\right) \tag{26}$$

$$u'=-\frac{\nu}{r}\cos(\nu z)\varphi,\quad w'=\frac{\sin\nu z}{r}\varphi'$$

$$\varepsilon_r'=\frac{\nu}{r^2}\cos(\nu z)\varphi-\frac{\nu}{r}\cos(\nu z)\varphi'$$

$$\varepsilon_\theta'=-\frac{\nu}{r^2}\cos(\nu z)\varphi,\quad \varepsilon_z'=\frac{\nu}{r}\cos(\nu z)\varphi'$$

$$\varepsilon_{rz}'=\frac{\sin(\nu z)}{2}\left(\frac{\nu^2}{r}\varphi-\frac{1}{r^2}\varphi'+\frac{1}{r}\varphi''\right)$$

Эти выражения легко упростить, если воспользоваться уравнениями (21) и равенством $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. После сложения уравнений (21) имеем

$$\varphi'' - \frac{1}{r}\varphi' = -\nu^2 (e^{\frac{1}{3}\pi i}\varphi_1 + e^{-\frac{1}{3}\pi i}\varphi_2)$$

Продифференцировав равенства (21) и сложив, получаем

$$\varphi''' - \frac{1}{r}\varphi'' + \frac{1}{r^2}\varphi' = -\nu^2 (e^{\frac{1}{3}\pi i}\varphi_1' + e^{-\frac{1}{3}\pi i}\varphi_2')$$

Подставив эти равенства в (25) и (26), получим

$$\sigma_r' = \frac{\cos(\nu z)}{6\lambda^0}\nu\left(-\frac{1}{r}e^{\frac{1}{3}\pi i}\varphi_1' + \frac{2}{r^2}\varphi_1 - \frac{1}{r}e^{-\frac{1}{3}\pi i}\varphi_2' + \frac{2}{r^2}\varphi_2\right)$$

$$\sigma_\theta' = \frac{\cos(\nu z)}{6\lambda^0}\nu\left(\frac{1}{r}(2 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\varphi_1' - \frac{2}{r^2}\varphi_1 + \frac{1}{r}(2 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})\varphi_2' - \frac{2}{r^2}\varphi_2\right)$$

$$\sigma_z' = \frac{\cos(\nu z)}{6\lambda^0}\nu\left(\frac{1}{r}(1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\varphi_1' + \frac{1}{r}(1 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})\varphi_2'\right)$$

$$\tau_{rz}' = \frac{\sin(\nu z)}{6\lambda^0 r}\nu^2((1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\varphi_1 + (1 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})\varphi_2) \tag{27}$$

$$u' = -\nu\cos(\nu z)\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{r}, \qquad w' = \sin(\nu z)\frac{\varphi_1' + \varphi_2'}{r}$$

$$\varepsilon_r' = \frac{\nu}{r}\cos(\nu z)\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{r} - \varphi_1' - \varphi_2'\right)$$

$$\varepsilon_\theta' = -\frac{\nu}{r^2}\cos(\nu z)(\varphi_1 + \varphi_2), \qquad \varepsilon_z' = \nu\cos(\nu z)\frac{\varphi_1' + \varphi_2'}{r}$$

$$\varepsilon_{rz}' = \frac{\sin(\nu z)}{2r}\nu^2((1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\varphi_1 + (1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\varphi_2)$$

Так как $\varphi_1 = \overline{C} r I_1(\mu r)$, $\varphi_2 = C r I_1(\overline{\mu} r)$, то $\varphi_1' = \overline{C}\mu r I_0(\mu r)$, $\varphi_2' = C\overline{\mu} r I_0(\overline{\mu} r)$.

Тогда выражения (27) примут вид

$$\sigma_r' = \frac{\cos(\nu z)}{6\lambda^0}\nu\left(\frac{2}{r}\overline{C}I_1(\mu r) - e^{\frac{1}{3}\pi i}\overline{C}\mu I_0(\mu r) + \frac{2}{r}CI_1(\overline{\mu}r) - e^{-\frac{1}{3}\pi i}C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r)\right)$$

$$\sigma_\theta' = \frac{\cos(\nu z)}{6\lambda^0}\nu\left\{(2 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\overline{C}\mu I_0(\mu r) - \frac{2}{r}\overline{C}I_1(\mu r) + (2 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r) - \frac{2}{r}CI_1(\overline{\mu}r)\right\}$$

$$\sigma_z' = \frac{\cos(\nu z)}{6\lambda^0}\nu((1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\overline{C}\mu I_0(\mu r) + (1 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})\overline{C}\mu I_0(\overline{\mu}r))$$

$$\tau_{rz}' = \frac{\sin(\nu z)}{6\lambda^0}\nu^2((1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\overline{C}I_1(\mu r) + (1 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})CI_1(\overline{\mu}r))$$

$$u' = -\nu\cos(\nu z)(\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r)) \tag{28}$$

$$w' = \sin(\nu z)(\overline{C}\mu I_0(\mu r) + C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r))$$

$$\varepsilon_r' = \nu\cos(\nu z)\left(\frac{1}{r}(\overline{C}I_1(\mu r)\right) + CI_1(\overline{\mu}r)) - \overline{C}\mu I_0(\mu r) - C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r))$$

$$\varepsilon_\theta' = -\frac{\nu\cos(\nu z)}{r}(\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r))$$

$$\varepsilon_z' = \nu\cos(\nu z)(\overline{C}\mu I_0(\mu r) + C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r))$$

$$\varepsilon_{rz}' = \frac{\sin(\nu z)}{2}\nu^2((1 - e^{\frac{1}{3}\pi i})\overline{C}I_1(\mu r) + (1 - e^{-\frac{1}{3}\pi i})CI_1(\overline{\mu}r))$$

Линеаризуя граничные условия (4), получим

$$\sigma'_r = 0, \quad \tau'_{rz} - \sigma_z^0 \frac{df}{dz} = 0, \quad r = a \tag{29}$$

Удовлетворяя выражения (28) условиям (29), находим

$$\frac{2}{a}\overline{C}I_1(\mu a) - e^{\frac{1}{3}\pi i}\overline{C}\mu I_0(\mu a) + \frac{2}{a}CI_1(\overline{\mu}a) - e^{-\frac{1}{3}\pi i}C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}a) = 0$$

$$f = \frac{\nu\cos(\nu z)}{6\lambda^0\sigma_z^0}((1-e^{\frac{1}{3}\pi i})\overline{C}I_1(\mu a) + (1-e^{-\frac{1}{3}\pi i})CI_1(\mu a)) \tag{30}$$

Из первого условия находим

$$\overline{C} = \frac{2\bar{I}_1 + i\gamma\bar{I}_0}{i\gamma I_0 - 2I_1}C \tag{31}$$

$$I_0 = I_0(\gamma e^{\frac{1}{3}\pi i}), \quad \bar{I}_0 = I_0(\gamma e^{-\frac{1}{3}\pi i}), \quad I_1 = I_1(\gamma e^{\frac{1}{3}\pi i}), \quad \bar{I}_1 = I_1(\gamma e^{-\frac{1}{3}\pi i}), \quad \gamma = \nu a$$

Тогда из второго условия

$$f = \frac{C\nu\cos(\nu z)}{6\lambda^0\sigma_z^0}\,\frac{\sqrt{3}\gamma v^* + i\gamma u^* - 2\sqrt{3}(u_1^2 + v_1^2)}{i\gamma I_0 - 2I_1} \tag{32}$$

$$I_0 = u_0 + iv_0, \quad I_1 = u_1 + iv_1, \quad u^* = u_0u_1 + v_0v_1, \quad v^* = u_0v_1 - u_1v_0$$

Положим $f = A\cos z$, $A = \text{const}$, тогда искомое решение будет определяться выражениями (28), где коэффициент C находим из соотношения (32), а $\overline{C}$ из (31).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 2. С. 109–130.
2. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 6. С. 405–412.
3. *Ишлинский А.Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. Киев. 1958. № 1. С. 12–15.
4. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластического тела // Уч. зап. МГУ. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
5. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Сб. тр. Т.1. М.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 50–99.
6. *Жуков А.М.* К вопросу о возникновении шейки в образце при растяжении // Инженерный сборник. 1949. Т. 5. Вып. 2. С. 34–51.
7. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 15–24.

Чебоксары

Поступила в редакцию
13. III. 1996