МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1997

УДК 539.214; 539.374

© 1997 г. А.М. ВАСИЛЬЕВА

РАСТЯЖЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ИЗ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Задача о растяжении бесконечно длинной идеальнопластической полосы рассмотрена А.Ю. Ишлинским в работе [1]. В настоящей работе, следуя идеям [1], рассматривается осесимметричное течение растягиваемого бесконечно длинного круглого стержня переменного сечения из идеального жестко-пластического материала при условии полной пластичности. Отметим, что в [2] исследовано выпучивание толстостенной жесткопластической трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой, при условии полной пластичности.

Уравнение поверхности стержня представим в виде

$$\rho = (a + \delta f(z)), \quad \delta \ll 1 \tag{1}$$

Запишем условия предельного состояния [3]:

$$f_1 \equiv \left(\sigma_\rho - \sigma_z\right)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 - 4k^2 = 0, \quad f_2 \equiv \sigma_\theta - \tfrac{1}{2}\left[\left(\sigma_\rho + \sigma_z\right) \pm 2k\right] = 0 \tag{2}$$

Компоненты скорости деформаций связаны с компонентами скорости перемещения формулами Коши:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{v}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) \tag{3}$$

Соотношения пластического течения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4}$$

где $\lambda_{1,2}$ – неопределенные множители. Решение будем искать в виде

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^\circ + \delta\sigma_\rho', \ldots, \quad \varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^\circ + \delta\varepsilon_\rho', \ldots, \quad u = u_\rho^\circ + \delta u_\rho', \ldots, \quad \lambda = \lambda^\circ + \delta\lambda' \tag{5}$$

где индекс "штрих" приписан компонентам возмущения, индекс "градус" – компонентам начального невозмущенного состояния ($\delta = 0$):

$$\sigma_\rho^\circ = \sigma_\theta^\circ = \tau_{\rho z}^\circ = 0, \quad \sigma_z^\circ = 2k, \quad \varepsilon_\rho^\circ = \varepsilon_\theta^\circ = \varepsilon_z^\circ = \varepsilon_{\rho z}^\circ = u^\circ = v^\circ = 0 \tag{6}$$

Линеаризируя условие пластичности (2), используя (5), (6), получим

$$\sigma_\rho' = \sigma_\theta' = \sigma_z' = \sigma', \quad \sigma' = \tfrac{1}{3}\left(\sigma_\rho' + \sigma_\theta' + \sigma_z'\right) \tag{7}$$

Уравнения равновесия для компонент возмущенного состояния, учитывая (7), имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau'_{\rho z}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau'_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma'}{\partial z}+\frac{\tau'_{\rho z}}{\rho}=0 \tag{8}$$

Полагая

$$\sigma'=-\partial\Phi/\partial z,\quad \tau'_{\rho z}=\partial\Phi/\partial\rho \tag{9}$$

из (8) получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=0 \tag{10}$$

Решение уравнения (10) представим в виде

$$\Phi=CI_0(n\rho)\sin nz \tag{11}$$

где $I_0(n\rho)$ – функция Бесселя нулевого порядка, тогда из (9) найдем

$$\sigma'=-CnI_0(n\rho)\cos nz,\quad \tau'_{\rho z}=-CnI_1(n\rho)\sin nz \tag{12}$$

Обратимся к граничным условиям. С точностью до малых 2-го порядка имеем

$$\cos n\rho\approx 1,\ \cos nz\approx-\delta df(z)/dz \tag{13}$$

Предполагая, что боковая поверхность свободна от напряжений, используя (5), (6), (13), запишем линеаризованные граничные условия

$$\sigma'_\rho=0,\quad \tau'_{\rho z}-\sigma^\circ_z\frac{df(z)}{dz}=0,\quad \rho=a,\ \forall z \tag{14}$$

Из 1-го граничного условия получаем

$$I_0(an)=0 \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет бесчисленное счетное множество корней [4]:

$$an=n_k,\ k\in N \tag{16}$$

Из 2-го граничного условия имеем

$$-C\frac{n_k}{a}I_1(n_k)\sin\frac{n_k}{a}z-\sigma_z^0\frac{df(z)}{dz}=0 \tag{17}$$

Полагая $f(z)=A\cos n_k z/a$ найдем

$$C=A\sigma_z^0/I_1(n_k),\quad k\in N \tag{18}$$

Максимальная длина выточки будет при $n_1=2{,}4048$.

Согласно (12), (16), (18), определим искомое напряженное состояние

$$\sigma'_\rho=\sigma'_\theta=\sigma'_z=\frac{-A\sigma_z^0 n_k}{aI_1(n_k)}I_0\left(\frac{n_k}{a}\rho\right)\cos\frac{n_k}{a}z$$

$$\tau'_{\rho z}=\frac{-A\sigma_z^0 n_k}{aI_1(n_k)}I_1\left(\frac{n_k}{a}\rho\right)\sin\frac{n_k}{a}z \tag{19}$$

Рассмотрим уравнения для компонент скоростей перемещений. Из (4), используя (5), (6), получим линеаризованный закон пластического течения

$$\varepsilon'_\rho+\varepsilon'_z+\varepsilon'_\theta=0,\quad \varepsilon'_{\rho z}=0 \tag{20}$$

Согласно (3), (20) будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{v}{\rho}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \rho}=0 \tag{21}$$

Здесь и далее индекс "штрих" у компонент u и v опущен. Положим

$$u=-\partial\Psi/\partial z, \quad v=\partial\Psi/\partial\rho \tag{22}$$

тогда из (21) получим уравнение $\partial^2\Psi/\partial\rho^2 - \partial^2\Psi/\partial z^2 + 1/\rho\, \partial\Psi/\partial\rho = 0$, совпадающее с уравнением (10). Представляя решение в виде $\Psi = DI_0(m\rho)\sin mz$, из (22) получим:

$$u=-DmI_0(m\rho)\cos mz, \quad v=-DmI_1(m\rho)\sin mz, \quad D=\text{const} \tag{23}$$

Выражения (23) могут быть использованы для определения поля скоростей перемещений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. 1958. № 1. С. 12–15.
2. *Ивлев Д.Д.* Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 5. С. 73–79.
3. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. М.: Наука, 1978. 214 с.
4. *Грей Е., Метьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. М.: ИЛ, 1953. 198 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
13.III.1996