

УДК 531.36

© 1997 г. А.Н. ДЕМИДОВ, М.Ю. ОВЧИННИКОВ

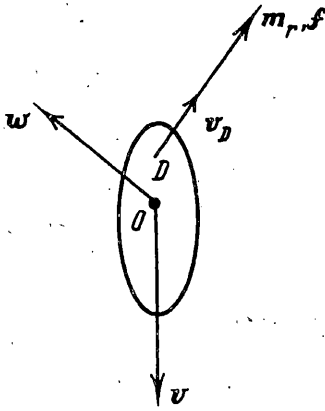
**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ  
СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ  
ТРЕХОСНОГО ТЕЛА В АТМОСФЕРЕ**

Рассматривается стационарное движение вращающегося вокруг одной из главных осей инерции твердого тела в однородной атмосфере. Главные центральные моменты инерции тела попарно не равны друг другу. Действие атмосферы сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления, а также вращательному моменту, направленному вдоль главной оси инерции и моменту сил трения, приложенному к телу и пропорциональному его угловой скорости вращения. Такие условия могут быть реализованы в системе груз – вращающийся парашют. Выбором нужной формы парашюта при движении системы в атмосфере создается вращательный момент вокруг его продольной оси, который через узел крепления передается телу. Если парашют раскрыт, не меняет своих динамических характеристик при движении системы, а его масса и моменты инерции с учетом присоединенных масс воздуха значительно меньше соответствующих характеристик тела, то действие парашюта может быть аппроксимировано силой  $f$ , приложенной в точке  $D$  крепления парашюта к телу и направленной против скорости этой точки относительно воздуха и равной силе лобового сопротивления парашюта (модель безынерционного парашюта) и вращающим моментом  $m_{\omega}$ , направленным вдоль вектора  $f$  (фиг. 1).

Целью работы является построение в общем виде границы области асимптотической устойчивости стационарного движения описанной выше системы в пространстве параметров задачи для случая, когда динамически трехосное тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг одной из главных центральных осей инерции тела, направленной вертикально, а центр масс тела снижается по вертикали с постоянной скоростью. Исследование проводится на основе анализа коэффициентов характеристического уравнения, по действительным частям корней которого определяется степень устойчивости движения. Отметим опубликованные работы, близкие рассматриваемой задаче. Приближенные выражения для степени устойчивости построены для динамически осесимметричного [1] и трехосного<sup>1</sup> вращающегося в атмосфере тела. Для динамически и аэродинамически осесимметричного вращающегося тела границы области устойчивости были построены на основе обобщенного критерия Рауса – Гурвица<sup>2</sup>. Границы области устойчивости в пространстве параметров системы построены и подробно исследованы в [2] для вращающегося в однородной атмосфере динамически осесимметричного тела.

<sup>1</sup> См. В.А. Сарычев, М.Ю. Овчинников, В.Н. Бондаренко. Исследование устойчивости стационарного движения вращающегося тела в атмосфере: Препринт № 157, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1990. 28 с.

<sup>2</sup> См. С.А. Мирер, В.А. Тимофеев. Авторотационное движение твердого тела в атмосфере. Вертикальный режим. Препринт № 51, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1991. 25 с.



Фиг. 1

**1. Уравнения движения.** Для записи уравнений движения рассматриваемой механической системы введем две правые прямоугольные системы координат.  $O_aXYZ$  – абсолютная система координат. Ее ось  $O_aZ$  направлена вертикально вверх; точка  $O_a$  лежит на поверхности Земли.  $Oxyz$  – связанная с телом система координат, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Поворот связанной с телом системы координат относительно абсолютной системы координат определим с помощью самолетных углов  $\alpha, \beta, \gamma$ . Матрицу поворота обозначим через  $A$ .

Движение рассматриваемой механической системы описывается следующими уравнениями:

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + A\mathbf{f}, \quad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d} \times \mathbf{f} + \mathbf{m}_r + \mathbf{m}_d$$

$$\dot{\alpha} = (w_x \cos \gamma - w_y \sin \gamma) / \cos \beta, \quad \dot{\beta} = w_x \sin \gamma + w_y \cos \gamma, \quad (1.1)$$

$$\dot{\gamma} = w_z - (w_x \cos \gamma - w_y \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta$$

Здесь  $m$  и  $J$  – масса и тензор инерции тела,  $\mathbf{v}$  – скорость центра масс тела,  $\boldsymbol{\omega}$  – абсолютная угловая скорость тела,  $\mathbf{m}_d$  – демпфирующий момент,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения. Векторы  $\mathbf{u}, \mathbf{g}$  заданы в абсолютной системе координат, а векторы  $\mathbf{w}, \mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{m}_r, \mathbf{m}_d$  – в связанной с телом системе координат.

Выражение для силы  $\mathbf{f}$  имеет вид  $\mathbf{f} = -\frac{1}{2}\rho S_p c_p |\mathbf{v}_D| \mathbf{v}_D$ , где  $\rho$  – плотность воздуха,  $S_p$  – площадь купола парашюта в раскрые,  $c_p$  – коэффициент лобового сопротивления,  $\mathbf{v}_D = A^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}$  – скорость точки  $D$  крепления парашюта к телу. Для вращающего момента, создаваемого парашютом, воспользуемся следующим выражением:

$$\mathbf{m}_r = -\frac{1}{2}\rho S_p l_p v_D^2 (p_0 - p_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_D) \mathbf{e}_D$$

Здесь  $p_0, p_1, l_p$  – соответственно коэффициент вращения, коэффициент трения и характерный размер парашюта;  $\mathbf{e}_D = \mathbf{v}_D / v_D$  – единичный вектор, направленный вдоль вектора скорости точки  $D$ . Демпфирующий момент, обусловленный трением тела о воздух, представим в виде  $\mathbf{m}_d = -\frac{1}{2}\rho S l k v_D^2 \mathbf{w}$ , где  $S$  – площадь сечения тела,  $l$  – характерный размер тела,  $k$  – коэффициент трения.

**2. Тривиальное стационарное решение.** При  $\mathbf{J} = \operatorname{diag} (J_x, J_y, J_z)$ ,  $\mathbf{d} = (0, 0, d)$  система (1.1) допускает частное решение

$$\alpha = \beta = 0, \quad w_x = w_y = 0, \quad v_x = v_y = 0$$

$$\gamma = \gamma(t), \quad w_z = w_z(t), \quad v_z = v_z(t) \quad (2.1)$$

описывающее движение, при котором центр масс тела движется по вертикали, а вращение происходит вокруг оси  $Oz$ , совпадающей с этой вертикалью. Будем считать, не теряя общности, что  $v_z(t) \leq 0$ . Зависящие от времени функции из (2.1) удовлетворяют системе уравнений

$$m\dot{v}_z = -mg + \frac{1}{2}\rho S_p c_p v_z^2$$

$$J_z \dot{w}_z = \frac{1}{2}\rho S_p l_p v_z^2 (p_0 - p_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_D) - \frac{1}{2}\rho S l k v_z^2 w_z \quad (2.2)$$

$$\dot{\gamma} = w_z$$

Решение этой системы для  $v_z$  и  $w_z$  при  $\rho = \text{const}$  имеют вид

$$v_z(t) = \frac{v_z(0)\sqrt{ug} - g \operatorname{th} \sqrt{ug} t}{\sqrt{ug} - uv_z(0) \operatorname{th} \sqrt{ug} t}$$

$$w_z(t) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} + \left[ w_z(0) - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \right] \exp[-\vartheta_1(gt - \sqrt{g/u} \operatorname{th} \sqrt{ug} t) / u]$$

$$u = \rho S_p c_p / 2m, \quad \vartheta_1 = \rho(S_p l_p p_1 + Slk) / 2J_z, \quad \vartheta_2 = p_0 \rho S_p l_p / 2J_z.$$

Здесь  $v_z(0)$  – начальная скорость вертикального движения системы,  $w_z(0)$  – угловая скорость осевого вращения тела в начальный момент времени.

Решение для  $w_z$  найдено в предположении  $v_z(0) = 0$ , когда выполняется условие  $v_z(t) = -\sqrt{g/u} \operatorname{th} \sqrt{ug} t$ . Для предельного значения  $v_z$  можно записать выражение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = -\sqrt{g/u} < 0.$$

При  $v_z = -v_0 = \text{const}$  для осевого движения из (2.2) получаем линейное относительно  $w_z$  уравнение, решение которого имеет вид  $w_z = w_0 + (w_{z0} - w_0)e^{-\kappa_1 w_0 t}$ . Здесь  $w_0 = \rho S_p l_p / (S_p l_p p_1 + Slk)$  – стационарная скорость вращения,  $\kappa_1 = \rho S_p l_p v_0^2 / (2J_z w_0^2)$ ,  $w_{z0} = w_z(0)$ . Так как  $\kappa_1 w_0 > 0$ , то  $w_z$  с течением времени стремится к своему стационарному значению  $w_0$ .

Предельные значения  $v_0, w_0$  функций  $v_z, w_z$  и отвечающая им функция времени  $\gamma(t)$  определяют в совокупности с (2.1) тривиальное (центр масс тела движется вдоль вертикали, ось  $Oz$  направлена вертикально) стационарное (скорости снижения и вращения системы постоянные) решение

$$w_z = w_0, \quad v_z = -v_0, \quad \gamma = w_0 t + \gamma_0 \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (1.1), получаем условия

$$v_0 = [2mg / (\rho S_p c_p)]^{1/2}, \quad w_0 = \rho S_p l_p / (p_1 S_p l_p + kSl)$$

существования этого решения.

**3. Исследование устойчивости номинального движения.** Анализ устойчивости системы проведем в линейном приближении. Из (1.1), (2.1) с учетом замены переменных

$$p_x = \vartheta_x \cos \omega_z \tau + \vartheta_y \sin \omega_z \tau, \quad p_y = -\vartheta_x \sin \omega_z \tau + \vartheta_y \cos \omega_z \tau$$

$$q_x = -\alpha \sin \omega_z \tau + \beta \cos \omega_z \tau, \quad q_y = \alpha \cos \omega_z \tau - \beta \sin \omega_z \tau$$

и введения безразмерных переменных и параметров

$$\tau = v_z t / d, \quad \vartheta_n = v_n / v_z, \quad \omega_n = w_n d / v_z$$

$$\lambda_x = (J_y - J_z) / J_x, \quad \lambda_y = (J_x - J_z) / J_y,$$

$$\mu = \rho S_p d c_p / 2m, \quad \eta_n = md^2 / J_n, \quad \xi_n = \eta_n + mlk v_z S / (c_p S_p J_n)$$

$$(n = x, y, z)$$

получаем линеаризованную в окрестности решения (2.1) систему уравнений

$$\dot{p}_x = \omega_z p_y - \mu(p_x + \omega_y), \quad \dot{p}_y = -\omega_z p_x - \mu(p_y - \omega_x)$$

$$\dot{q}_x = \omega_z q_y + \omega_y, \quad \dot{q}_y = -\omega_z q_x - \omega_x \quad (3.1)$$

$$\dot{\omega}_x = \lambda_x \omega_z \omega_y - \mu \xi_x \omega_x + \mu \eta_x (q_y + p_y)$$

$$\dot{\omega}_y = -\lambda_y \omega_z \omega_x - \mu \xi_y \omega_y - \mu \eta_y (q_x + p_x)$$

Соответствующее ей характеристическое уравнение имеет вид

$$u^6 + a_5 u^5 + a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = 0 \quad (3.2)$$

где коэффициенты  $a_0, \dots, a_5$  суть функции параметров системы<sup>3</sup>.

Будем считать, что отношение плотности атмосферы к средней плотности тела мало, то есть справедливо неравенство  $\mu \ll 1$ . Характеристическое уравнение при  $\mu = 0$  имеет вид

$$u^6 + \omega_z^2 (2 + \lambda_x \lambda_y) u^4 + \omega_z^4 (1 + 2\lambda_x \lambda_y) u^2 + \omega_z^6 \lambda_x \lambda_y = 0$$

$$(u^2 + \lambda_x \lambda_y \omega_z^2) (u^2 + \omega_z^2)^2 = 0$$

Полагая  $\lambda_x \lambda_y > 0$ , находим корни исходного уравнения в виде формальных рядов по степеням малого параметра  $\mu$ :

$$u_{1,2} = \pm i \omega_z - \mu - \mu^2 \left( \frac{1}{1 + (\omega_z / \eta_z)^2} \pm i \frac{\omega_z / \eta_z}{1 + (\omega_z / \eta_z)^2} \dots \right) O(\mu^3)$$

$$u_{1,2} = \pm i \omega_z \pm i \mu \frac{\eta_z}{\omega_z} + \mu^2 \left( \frac{1}{1 + (\omega_z / \eta_z)^2} - \frac{\eta_z / \xi_z}{\omega_z^2} \pm i \dots \right) + O(\mu^3) \quad (3.3)$$

$$u_{1,2} = \pm i \omega_z \sqrt{\lambda_x \lambda_y} - \frac{\mu}{2} \left( \xi_x + \xi_y \pm i \frac{2\eta_z - \eta_x - \eta_y}{\omega_z \sqrt{\lambda_x \lambda_y}} \right) + O(\mu^2)$$

Действительные значения корней, полученных при помощи выражений (3.3), близки полученным численным решением уравнения (3.2) действительным частям корней при  $\mu \ll \omega_z / \eta_z$ , если характеристические числа комплексны. В этом случае они имеют отрицательные действительные части. Графики действительных частей  $\chi_j = -\text{Re}(u_j)$  корней уравнения (3.2), полученных численно и аналитически, приведены на фиг. 2. По причине слабой сходимости рядов имеет место значительное расхождение результатов, полученных численно и по формулам (3.3), особенно, в случае действительных собственных чисел.

Покажем, что система (3.1) не может иметь чисто мнимых характеристических чисел при  $\mu > 0$  и  $md^2 \geq \min_n (J_n)$ . Доказательство проведем от противного. Пусть существует такое чисто мнимое число  $i\omega$  ( $\omega \neq 0$ ). Тогда уравнение (3.2) эквивалентно системе двух уравнений

$$\omega^6 - a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_0 = 0, \quad a_5 \omega^4 - a_3 \omega^2 + a_1 = 0 \quad (3.4)$$

которые при  $a_5 > 0$ ,  $a_4 a_5 - a_3 > 0$  и  $(a_2 a_5^2 - a_3 a_4 a_5 - a_1 a_5 + a_3^2)(a_0 a_5^2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 a_5) \geq 0$  равносильны уравнению

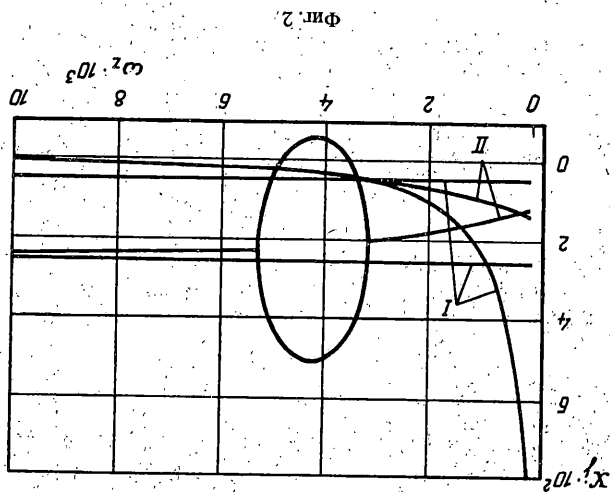
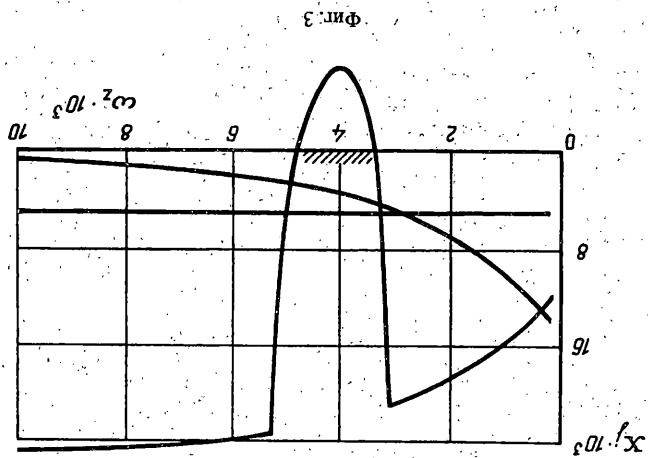
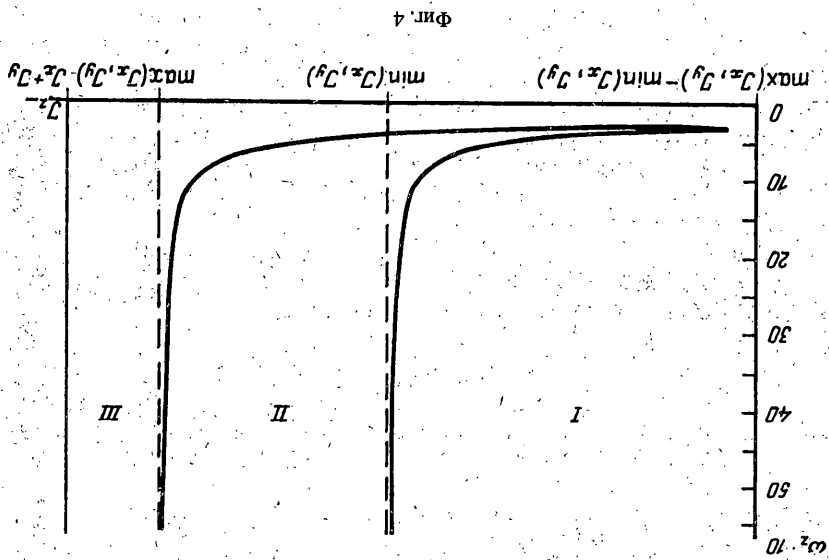
$$a_5 (a_0 a_5^2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 a_5)^2 + a_1 (a_2 a_5^2 - a_3 a_4 a_5 - a_1 a_5 + a_3^2)^2 -$$

$$- a_3 (a_2 a_5^2 - a_3 a_4 a_5 - a_1 a_5 + a_3^2) (a_0 a_5^2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 a_5) = 0$$

Левая часть последнего уравнения – это функция от параметров системы  $\mu, J_n, md^2, \kappa, \omega_z^2$ . Численное ее исследование показывает, что она строго отрицательна при выполнении условий

$$\mu > 0, \quad md^2 \geq \min_n (J_n)$$

<sup>3</sup> См. М.Ю. Овчинников, А.Н. Демидов. Исследование устойчивости одного режима движения вращающегося трехосного тела в атмосфере. Препринт № 89, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1994. 19 с.



Второе условие можно интерпретировать как ограничение на конструкцию спускаемого тела. Отметим, что глобальный максимум этой функции не является локальным и достигается на ограничениях

$$\kappa = \omega_z^2 = 0, \quad md^2 = \min_n (J_n)$$

Таким образом, поскольку система (3.4) не имеет решения, то полученное противоречие и доказывает утверждение об отсутствии чисто мнимых корней характеристического уравнения (3.2). Поскольку чисто мнимых характеристических чисел уравнения (3.2) нет и они являются непрерывной функцией параметров, область определения которых линейно связана, то существуют точки потери устойчивости, в которых характеристическое уравнение имеет нулевое решение.

Отметим, что из трех пар корней лишь одна (а именно, последняя из (3.3)) может быть действительной при  $\lambda_x \lambda_y \leq 0$ . В этом случае система может потерять устойчивость, как это показано на фиг. 3. В точке потери устойчивости характеристическое уравнение допускает решение  $u = 0$ , т.е. в этой точке свободный член уравнения (3.2)  $a_0$  обращается в нуль

$$a_0 \equiv \omega_z^6 \lambda_x \lambda_y + \omega_z^4 \mu [\mu (\xi_x \xi_y + \lambda_x \lambda_y + \lambda_x \eta_y + \lambda_y \eta_x) - \eta_x \lambda_y - \eta_y \lambda_x] + \omega_z^2 \mu^2 (\xi_x \xi_y - \eta_x \xi_y - \eta_y \xi_x + \eta_x \eta_y) - \mu (\eta_x \lambda_y + \eta_y \lambda_x + 2\eta_x \eta_y) + \eta_x \eta_y + \mu^4 \eta_x \eta_y = 0.$$

После преобразования получаем

$$a\omega_z^6 + \mu[\mu(\xi^2 + a + b) - b]\omega_z^4 + \mu^2[\eta^2 - \mu(b + 2\eta^2) + \mu^2\kappa^2]\omega_z^2 + \mu^4\eta^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\eta = md^2, \quad \kappa = mlkv_z S / c_p S_p, \quad \xi = \eta + \kappa$$

$$a = (J_x - J_y)(J_y - J_z), \quad b = (J_x + J_y - 2J_z)\eta$$

Свободный член  $\mu^4\eta^2$  уравнения (3.5) положителен и при  $\mu \ll 1$  существенно меньше остальных коэффициентов. Поэтому получающийся отсюда малый по  $\mu$  корень — чисто мнимый и не имеет физического смысла. Чтобы продемонстрировать качественное поведение корней, сохраним в коэффициентах уравнения (3.5) слагаемые порядка  $O(\mu^2)$  и получим биквадратное относительно  $\omega_z$  уравнение

$$a\omega_z^4 - b\mu\omega_z^2 + \mu^2\eta^2 = 0 \quad (3.6)$$

Его корни отвечают интервалу неустойчивости (возможно, бесконечному по  $\omega_z$ ). Видно, что решение ведет себя качественно по-разному в следующих трех зонах (см. фиг. 4):

$$\max(J_x, J_y) - \min(J_x, J_y) \leq J_z \leq \min(J_x, J_y) \quad \text{при } a, b \geq 0 \quad \text{(I)}$$

$$\min(J_x, J_y) \leq J_z \leq \max(J_x, J_y) \quad \text{при } a \leq 0 \quad \text{(II)}$$

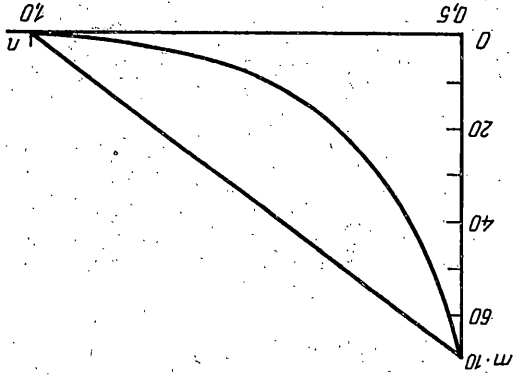
$$\max(J_x, J_y) \leq J_z \leq J_x + J_y, \quad \text{при } a \geq 0, b \leq 0 \quad \text{(III)}$$

В зоне (I) имеем два решения, а при малых  $J_z$  возможно их исчезновение (корни становятся кратными, а потом исчезают); в зоне (II) существует одно решение; в зоне (III) решений нет. Соответствующие графики степени устойчивости приведены на фиг. 5, 7. В пространстве параметров, объединяющем все три зоны (фиг. 4), возникает "рог" неустойчивости. Это, однако, справедливо при достаточно малых  $\mu$ . С увеличением  $\mu$  абсцисса точки исчезновения решений также растет и может покинуть первую зону (фиг. 8). В любом случае сохраняются топологические свойства кривой (фиг. 4, 8).

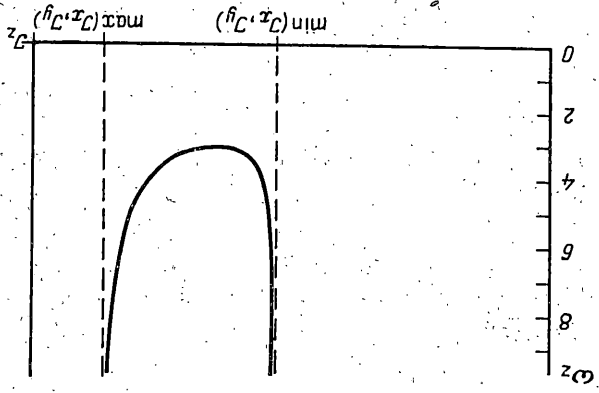
**4. Анализ зоны неустойчивости номинального движения.** Фактически, наибольший интерес представляет первая зона, которая существует при выполнении неравенства

$$\max(J_x, J_y) < 2 \min(J_x, J_y)$$

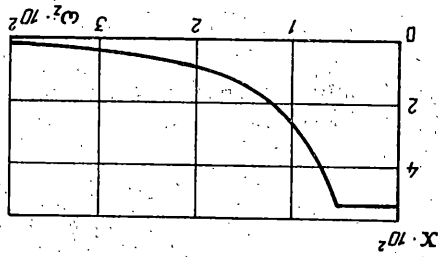
Фиг. 9



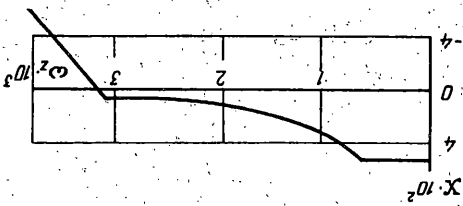
Фиг. 8



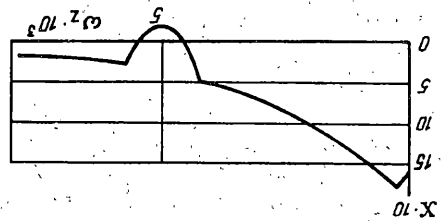
Фиг. 7



Фиг. 6



Фиг. 5



Точка исчезновения решений отвечает детерминанту, равному нулю. Однако в области малых  $J_z$  пренебрегать младшим коэффициентом бикубического уравнения не следует, поэтому найдем детерминант Кардана во втором по параметру  $\mu$  приближении

$$D \equiv b_1^2 b_2^2 - 4b_1^3 b_3 - 4b_0 b_2^3 + 18b_0 b_1 b_2 b_3 - 27b_0^2 b_3^2 = \\ = (J_x - J_y)^2 \eta(1 - 6\mu) + 2\mu(\xi^2 - (J_x - J_y)^2)(2J_z - J_x - J_y) + O(\mu^2) \quad (4.1)$$

Так как это выражение линейное относительно  $J_z$ , то существует не более одной точки исчезновения решений. Система устойчива, когда выполняется неравенство  $D \leq 0$ . С учетом выражения (4.1) имеем неравенство

$$J_z \leq \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{(J_x - J_y)^2 \eta(1 - 6\mu)}{4\mu[\xi^2 - (J_x - J_y)^2]} \quad (4.2)$$

Теперь возникает вопрос, при каких параметрах  $J_x, J_y, \eta, \xi, \mu$  в первой зоне нет потери устойчивости? При этом точка исчезновения решений попадает во вторую зону, которая определяется неравенством  $J_z \geq \min(J_x, J_y)$ . Приравняем детерминант  $D$  из (4.1) нулю и определим  $J_z$  из этого уравнения. Далее, используя предыдущее неравенство и найденное  $J_z$ , получаем выражение для  $\xi$  в виде ряда по степеням малого параметра  $\kappa$ , полагая  $\kappa = o(\xi)$

$$\xi \geq |J_x - J_y|(1/2\mu - 3) - \kappa + O(\kappa^2) \quad (4.3)$$

Однако возможен случай, когда система теряет устойчивость при любых  $J_z$  из первой зоны, т.е. существует интервал изменения параметра  $\omega_z$ , в котором система неустойчива. При этом абсцисса точки исчезновения решений становится меньше величины  $\max(J_x, J_y) - \min(J_x, J_y)$ . Далее, аналогично тому, как это делалось выше, из уравнения (4.1) получим приближенное неравенство

$$(J_x - J_y)^2 \eta(1 - 6\mu) + 2\mu(\xi^2 - (J_x - J_y)^2)[\max(J_x, J_y) - 3\min(J_x, J_y)] \leq 0 \quad (4.4)$$

На этот раз область параметров не является линейно связанной, но состоит из двух подобластей, так как левая часть неравенства представляет собой полином второй степени по  $\xi$ . В одной из этих подобластей  $\xi$  неотрицательно.

Полагая  $\kappa = 0$ , представим (фиг. 9) неравенства (4.2), (4.3) в координатах  $(n, m)$ , где  $n = \min(J_x, J_y) / \max(J_x, J_y)$ ,  $m = \eta / \max(J_x, J_y)$  — безразмерные параметры и  $1/2 \leq n \leq 1$ . Однако, если нужно определить точку исчезновения решений с высокой точностью (например, при очень малых  $J_z$  в случае  $n \rightarrow 1$ , т.е.  $J_x \rightarrow J_y$ ) следует воспользоваться формулой (4.1) для детерминанта Кардана с учетом следующего по  $\mu$  приближению. Тогда получаем полином второй степени по  $J_z$ :

$$\mu^2 J_z^2 [6(J_x - J_y)^2 + 8\eta\xi - 16\xi^2] + \mu J_z [4\eta(\xi^2 - (J_x - J_y)^2) + \mu(8\eta(J_x - J_y)^2 - \\ - 20\eta\xi^2 - (J_x + J_y)(6(J_x - J_y)^2 + 8\eta\xi - 16\xi^2))] + (J_x - J_y)^2 [\eta^2 + 2\mu\eta(J_x + J_y - 3\eta) + \\ + \mu^2(15\eta^2 - 4\eta(J_x + J_y) + J_x^2 + 4J_x J_y + J_y^2 - 6\xi^2 - 4\eta\xi)] + \mu\eta\xi^2 (J_x + J_y)(10\mu - 2) + \\ + 8\mu^2 \xi J_x J_y (\eta - 2\xi) + \mu^2 \xi^4$$

один из корней которого не подходит по каким-либо причинам (очень велик или отрицателен) и не удовлетворяет условиям, налагаемым на значения  $J_z$  системы. Для выделения подходящего корня полинома при решении соответствующего квадратного уравнения выполним предельный переход при  $\mu \rightarrow 0$ . При этом коэффициент по-



линома при  $J_z^2$  становится малым по сравнению с оставшимися коэффициентами и детерминант вырождается в линейный полином (4.1). С этой целью для получения необходимого корня полинома выберем перед знаком радикала знак второго коэффициента, так как при  $\mu \rightarrow 0$  именно этот корень стремится к корню линейного уравнения (второй корень соответствует совпадению других двух корней бикубического уравнения).

*Заключение.* Рассматриваемая механическая система при некоторых ограничениях на ее параметры имеет не более одного интервала неустойчивости по  $\omega_z$ , который может быть конечным или бесконечным. Если  $J_z$  – минимальный момент инерции, то система устойчива при любых значениях  $\omega_z$  или имеется конечный интервал неустойчивости, причем, он сокращается с уменьшением  $J_z$  и увеличением  $\xi$ . Если  $J_z$  – средний момент инерции, то система всегда теряет устойчивость на некотором интервале изменения  $\omega_z$ , не ограниченном справа. Если же  $J_z$  – максимальный момент инерции тела, то система всегда устойчива. Эти утверждения особенно наглядно интерпретируются сечениями  $J_z = \text{const}$  на фиг. 4.

Приведенные формулы позволяют по известным параметрам системы рассчитать ее свойства: интервал неустойчивости, значение  $J_z$ , при котором этот интервал появляется, значение  $\xi$  "полной устойчивости" (т.е. для любого  $\omega_z$  и  $J_z$  из первой зоны) и начала "полной неустойчивости" (при любых  $J_z$  из первой зоны).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-16249) и International science Foundation (grant No. MLC000).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овчинников М.Ю. Об устойчивости стационарного движения вращающегося тела с аэродинамическим стабилизатором // Процессы управления в механических системах. М.: МФТИ, 1990. С. 61–66.
2. Привалов В.А., Самсонов В.А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 37–48.

Москва

Поступила в редакцию  
24.III.1995