

УДК 539.214; 539.374

© 1997 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Ф. БАРЛАТ

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ В БЕСКОНЕЧНОМ СХОДЯЩЕМСЯ КАНАЛЕ МЕТАЛЛА С ГЦК РЕШЕТКОЙ

При применении модели идеального жесткопластического материала в случае неплоской, в частности осесимметричной, деформации решение зависит от выбранного условия текучести, которое, в свою очередь, определяется физическими свойствами материала. Для наиболее часто используемых в настоящее время условий текучести Мизеса и Треска известны только несколько точных аналитических решений задач в условиях осевой симметрии. В частности, с применением условия Мизеса решены задачи о различных видах течения в осесимметричном бесконечном сходящемся канале [1, 2], о выдавливании пластической массы из сжимающейся втулки [3, 4], о внедрении бесконечного конуса в бесконечное пространство [5]. Аналогичные задачи решены при использовании условия Треска, например [6]. Однако, экспериментальные работы и расчеты, проведенные на основе кристаллографического подхода, позволили найти более точную форму поверхности текучести для некоторых типов кристаллографических решеток. В частности, в [7, 8] было предложено обобщенное условие текучести, которое при определенных значениях коэффициентов, как показали кристаллографические вычисления и экспериментальные данные, соответствует металлам с ГЦК решеткой [9–11]. Аналитические решения задач для этого условия текучести, по-видимому, неизвестны. В связи с этим было бы интересно найти такие решения и, сравнивая их с решениями, полученными при использовании условия Мизеса или Треска, определить влияние формы поверхности текучести на характеристики напряженно-деформированного состояния. В публикуемой работе предлагается одно из таких решений: течение в сходящемся бесконечном осесимметричном канале пластического материала, подчиняющегося условию текучести, полученному в [9–11], что соответствует материалу с ГЦК решеткой. Аналогичное решение для среды Мизеса получено в [1]. Произведено сравнение этих решений. Показано, что при применении условия [9–11] сохраняется сингулярность в поведении проекции скорости, касательной к поверхности предельного трения, вблизи этой поверхности, которая имеет место в общем случае при применении условия Мизеса вблизи поверхности предельного трения или поверхности разрыва скорости [12–16].

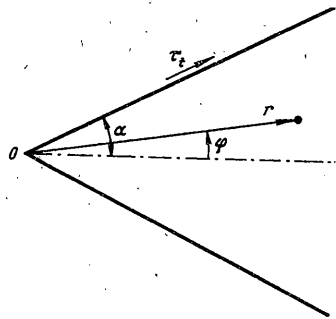
1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный осесимметричный сходящийся канал с углом раствора 2α . Введем сферическую систему координат r, θ, φ как показано на фиг.1. Течение предполагается осесимметричным, поэтому все искомые величины не зависят от координаты φ . Будем использовать модель идеального жесткопластического материала и примем, что для металлов с ГЦК решеткой имеет силу условие текучести вида [9–11]:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^8 + (\sigma_2 - \sigma_3)^8 + (\sigma_3 - \sigma_1)^8 = 2\sigma^8 \quad (1.1)$$

Здесь σ_i – главные напряжения и σ_t – предел текучести при одноосном растяжении.

Будем считать справедливым ассоциированный закон течения, который в терминах главных скоростей деформаций ξ_i при использовании условия текучести (1.1) примет вид

$$\xi_i = \lambda [(\sigma_i - \sigma_j)^7 + (\sigma_i - \sigma_k)^7], \quad \lambda \geq 0 \quad (i \neq j, i \neq k, k \neq j) \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Для получения определенной системы уравнений к (1.1), (1.2) необходимо добавить уравнения равновесия и уравнения связи между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций в сферической системе координат и главными компонентами. Пусть ψ – угол между осью r и первым главным направлением тензора напряжений, отсчитываемый от оси r против хода часовой стрелки.

Тогда

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos 2\psi + \tau_{r\theta} \sin 2\psi \quad (1.3)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos 2\psi - \tau_{r\theta} \sin 2\psi$$

$$0 = -\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\psi + \tau_{r\theta} \cos 2\psi, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi$$

и, ввиду соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций для изотропного материала

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\xi_r + \xi_\theta) + \frac{1}{2}(\xi_r - \xi_\theta) \cos 2\psi + \xi_{r\theta} \sin 2\psi \quad (1.4)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(\xi_r + \xi_\theta) - \frac{1}{2}(\xi_r - \xi_\theta) \cos 2\psi - \xi_{r\theta} \sin 2\psi$$

$$0 = -\frac{1}{2}(\xi_r - \xi_\theta) \sin 2\psi + \xi_{r\theta} \cos 2\psi, \quad \xi_3 = \xi_\varphi$$

Уравнения равновесия в сферической системе координат имеют вид

$$\partial \sigma_r / \partial r + r^{-1} \partial \tau_{r\theta} / \partial \theta + r^{-1} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0 \quad (1.5)$$

$$\partial \tau_{r\theta} / \partial r + r^{-1} \partial \sigma_\theta / \partial \theta + r^{-1} [(\sigma_\theta - \sigma_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] = 0 \quad (1.6)$$

Краевые условия для напряжений определяются условием симметрии, $\tau_{r\theta} = 0$ при $\theta = 0$ и условием трения на стенках канала. Примем, что имеет силу закон трения Прандтля $\tau_{r\theta} = K$ при $\theta = \alpha$. Здесь K – предел текучести при чистом сдвиге, который, в соответствии с условием текучести (1.1), связан с пределом текучести при одноосном растяжении зависимостью $\sigma_t = 129^{1/8} K$. Краевые условия для скоростей состоят из условия на оси симметрии, $v_\theta = 0$ при $\theta = 0$, и условия непроницаемости стенки канала, $v_\theta = 0$ при $\theta = \alpha$. Кроме того, будем считать заданным объемный расход материала в единицу времени, Q .

2. Основные предположения. Предположим, что течение материала происходит без вращения относительно оси канала, тогда $v_\varphi = 0$. Так как из крайних условий следует, что $v_\theta = 0$ при $\theta = 0$ и при $\theta = \alpha$, положим, как это было сделано в аналогичных задачах [1, 2], что эта скорость равна нулю во всем объеме деформируемого материала и обозначим $v_r = v$. Тогда выражения для скоростей деформаций в сферической системе координат примут форму

$$\xi_r = \partial v / \partial r, \quad \xi_\theta = \xi_\varphi = v / r, \quad 2\xi_{r\theta} = r^{-1} \partial v / \partial \theta, \quad \xi_{r\varphi} = \xi_{\theta\varphi} = 0 \quad (2.1)$$

3. Анализ уравнений. Из ассоциированного закона течения (1.2) следует условие

несжимаемости, которое в сферической системе координат имеет вид $\xi_r + \xi_\theta + \xi_\varphi = 0$ или с учетом (2.1) $\partial v / \partial r + 2v / r = 0$. Решение этого уравнения будет

$$v = u(\theta)r^{-2} \quad (3.1)$$

Здесь u — функция только угла θ .

Так как объемный расход материала задан, то функция u должна удовлетворять условию

$$Q = -2\pi \int_0^\alpha u \sin \theta d\theta \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) выражения для скоростей деформаций (2.1) примут вид

$$\xi_r = -2ur^{-3}, \quad \xi_\theta = \xi_\varphi = ur^{-3}, \quad 2\xi_{r\theta} = r^{-3} du / d\theta \quad (3.3)$$

Из третьего уравнения системы (1.4) и (3.3) найдем угол ψ :

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\xi_{r\theta} / (\xi_r - \xi_\theta) = -\frac{1}{3}u^{-1} du / d\theta \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что угол ψ зависит только от θ . Так как из физических соображений $\xi_r > \xi_\theta$ (материальный элемент удлиняется вдоль оси r), кроме того, исходя из направления сил трения $\tau_{r\theta} > 0$, а, следовательно, и $\xi_{r\theta} > 0$, то из (3.4) получаем, что $0 \leq 2\psi \leq \pi / 2$ или

$$0 \leq \psi \leq \pi / 4 \quad (3.5)$$

Из третьего уравнения (1.3) следует

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\tau_{r\theta} / (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (3.6)$$

Принимая во внимание (3.5), найдем

$$\cos 2\psi = (1 + \operatorname{tg}^2 2\psi)^{-1/2}, \quad \sin 2\psi = \operatorname{tg} 2\psi (1 + \operatorname{tg}^2 2\psi)^{-1/2} \quad (3.7)$$

Тогда из (1.3) и (3.6) получим

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2} \quad (3.8)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2}$$

Подставляя (3.8) и условие $\sigma_3 = \sigma_\varphi$ в условие текучести (1.1), найдем

$$[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^4 + \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_\varphi) + \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2} \right\}^8 + \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_\varphi) - \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2} \right\}^8 = 2\sigma_r^8 \quad (3.9)$$

Комбинируя (1.4) и (3.3), выразим главные скорости деформации в виде

$$\xi_1 = -\frac{1}{2}r^{-3}[u(1 + 3\cos 2\psi) - \sin 2\psi du / d\theta]$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}r^{-3}[u(1 - 3\cos 2\psi) + \sin 2\psi du / d\theta]$$

Тогда уравнения ассоциированного закона течения (1.2), с учетом (3.8), преобразуются к форме

$$-\frac{1}{2}r^{-3}[u(1 + 3\cos 2\psi) - \sin 2\psi du / d\theta] = \lambda[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2} + \lambda\left\{ \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_\varphi) + \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2} \right\}^7$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}r^{-3}[u(1-3\cos 2\psi) + \sin 2\psi du / d\theta] = -\lambda[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{7/2} + \\
& + \lambda\{\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_\varphi) - \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2}\}^7 \\
& ur^{-3} = -\lambda\{\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_\varphi) + \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2}\}^7 - \\
& - \lambda\{\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_\varphi) - \frac{1}{2}[4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2}\}^7
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку условие несжимаемости уже удовлетворено, а одно из уравнений (3.10) служит для определения λ , то из этой системы может быть получено только одно независимое уравнение, связывающее $\tau_{r\theta}$, σ_r , σ_θ , σ_φ , u и ψ . Возьмем его, принимая во внимание (3.4), в виде

$$\begin{aligned}
(\xi_1 - \xi_2) / \xi_3 &= (\sin 2\psi du / d\theta - 3u \cos 2\psi) / u = -3 / \cos 2\psi = \\
&= \frac{-2\tau^{7/2} - \{\frac{1}{2}[(s_r + s_\theta - 2s_\varphi) + \tau^{1/2}]\} + \{\frac{1}{2}[(s_r + s_\theta - 2s_\varphi) - \tau^{1/2}]\}^7}{\{\frac{1}{2}[(s_r + s_\theta - 2s_\varphi) + \tau^{1/2}]\} + \{\frac{1}{2}[(s_r + s_\theta - 2s_\varphi) - \tau^{1/2}]\}^7}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\tau = 4\tau_{r\theta}^2 + (s_r - s_\theta), \quad s_r = \sigma_r - \sigma, \quad s_\theta = \sigma_\theta - \sigma, \quad s_\varphi = \sigma_\varphi - \sigma$$

$$\sigma = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi) / 3.$$

Девiatorные части тензора напряжений, s_r , s_θ , s_φ и $\tau_{r\theta}$, могут быть выражены из (3.6), (3.9), (3.11) и условия $s_r + s_\varphi + s_\theta = 0$ через ψ . Так как ψ является функцией только от θ , то очевидно, что компоненты тензора девiatorа напряжений также не зависят от полярного радиуса. В этом случае уравнения равновесия (1.5) и (1.6) примут вид

$$\partial\sigma / \partial r + r^{-1}d\tau_{r\theta} / d\theta + r^{-1}(2s_r - s_\theta - s_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0 \tag{3.12}$$

$$\partial\sigma / \partial\theta + ds_\theta / d\theta + (s_\theta - s_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta} = 0 \tag{3.13}$$

Чтобы удовлетворить уравнению (3.12), среднее напряжение необходимо представить в форме

$$\sigma = c_1 \ln r + \sigma_0 \tag{3.14}$$

Тогда из (3.13) следует, что c_1 должна быть константой, а σ_0 может быть функцией от θ . В этом случае (3.12) и (3.13) преобразуются к виду

$$c_1 + d\tau_{r\theta} / d\theta + 2s_r - s_\theta - s_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta = 0 \tag{3.15}$$

$$d\sigma_0 / d\theta + ds_\theta / d\theta + (s_\theta - s_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta} = 0 \tag{3.16}$$

Так как $s_\varphi = -(s_r + s_\theta)$, то уравнения (3.6), (3.9), (3.11) и (3.15) могут быть сведены к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции ψ :

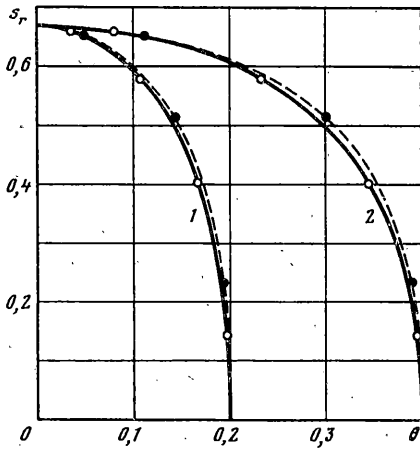
$$\tau^4 + [\frac{1}{2}(s + \tau^{1/2})]^8 + [\frac{1}{2}(s - \tau^{1/2})]^8 = 2\sigma_0^8 \tag{3.17}$$

$$\frac{3\{[\frac{1}{2}(s + \tau^{1/2})]^7 + [\frac{1}{2}(s - \tau^{1/2})]^7\}}{2\tau^{7/2} + [\frac{1}{2}(s + \tau^{1/2})]^7 - [\frac{1}{2}(s - \tau^{1/2})]^7} = \cos 2\psi$$

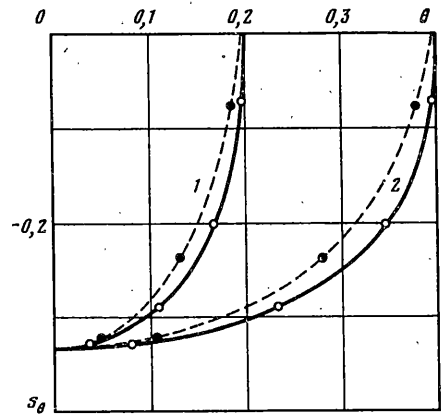
$$2\tau_{r\theta} / (\tau - 4\tau_{r\theta}^2)^{1/2} = \operatorname{tg} 2\psi$$

$$c_1 + d\tau_{r\theta} / d\theta + \frac{3}{2}(\tau - 4\tau_{r\theta}^2)^{1/2} + 2s + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta = 0$$

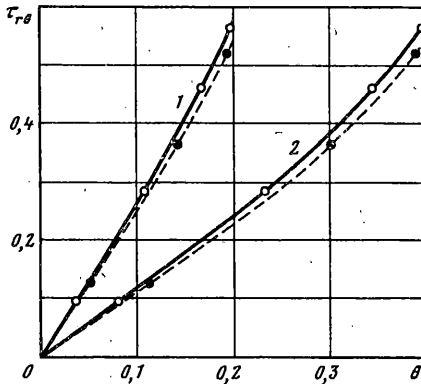
$$s = 3(s_r + s_\theta)$$



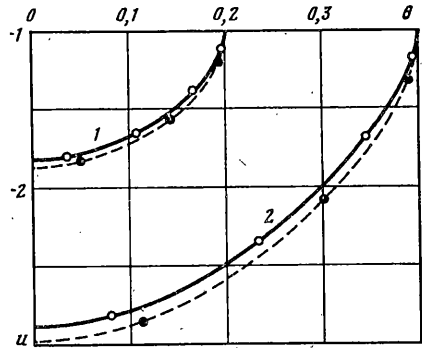
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Здесь предполагается, что $\tau_{r,\theta}$, τ и s должны быть выражены как функции ψ из первых трех уравнений, а затем эти выражения должны быть подставлены в четвертое уравнение, которое будет иметь вид

$$d\psi / d\theta = f(c_1, \psi, \theta) \quad (3.18)$$

Решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные (c_1 и постоянная интегрирования), которые определяются из краевых условий для $\tau_{r,\theta}$ на оси симметрии и поверхности трения. Так как на оси симметрии $\tau_{r,\theta} = 0$, то из (3.5) и (3.6) следует, что $\psi = 0$ при $\theta = 0$. Из (3.9) следует, что если $\tau_{r,\theta} = K$, то $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\phi$. Тогда из (3.5) и (3.6) найдем, что на поверхности трения $\psi = \pi/4$ при $\theta = \alpha$.

После решения (3.18) величины $\tau_{r,\theta}$, τ и s , а, следовательно, и компоненты тензора напряжений определяются из конечных уравнений системы (3.17). Функция u определяется из (3.4) интегрированием

$$u = u_0 \exp[-3 \int \operatorname{tg} 2\psi d\theta] \quad (3.19)$$

Постоянная u_0 находится из краевого условия (3.2):

$$u_0 = -Q \left[2\pi \int_0^\alpha \exp[-3 \int \operatorname{tg} 2\psi d\theta] \sin \theta d\theta \right]^{-1} \quad (3.20)$$

Распределение скорости определяется из (3.1), (3.19) и (3.20):

$$v = -Q[2\pi \int_0^\alpha \exp(-3 \int \operatorname{tg} 2\psi d\theta) \sin \theta d\theta]^{-1} \exp[3 \int \operatorname{tg} 2\psi d\theta] r^{-2} \quad (3.21)$$

Уравнение (3.16) служит для определения σ_0 , которое, в свою очередь, определяет среднее напряжение в соответствии с (3.14). Как это обычно имеет место в аналогичных задачах [1–3], эта величина может быть найдена только с точностью до константы A :

$$\sigma_0 = -s_\theta - \int_0^\theta [(s_\theta - s_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] d\theta + A \quad (3.22)$$

4. Пример расчета. Численное решение уравнения (3.18) и последующее численное интегрирование в (3.21) было выполнено для угла $\alpha = 0,2$ и $\alpha = 0,4$. На фиг. 2–5 представлены распределения девиаторных компонент тензора напряжений и профиль скорости для рассматриваемого условия текучести (штриховые линии) и условия текучести Мизеса (сплошные линии), $\alpha = 0,2$ – кривые 1, $\alpha = 0,4$ – кривые 2.

5. Заключение. Решение осесимметричной задачи теории пластичности при условии текучести, описывающем поведение материала с ГЦК решеткой, сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению и численному интегрированию. Профиль скорости (фиг. 5) показывает, что для рассматриваемого условия текучести сохраняется сингулярность в поведении поля скоростей, свойственная для материала Мизеса вблизи поверхности предельного трения [12–16]: скорость деформаций сдвига стремится к бесконечности на этих поверхностях. Построенное решение, также как и другие аналогичные решения [1–3], не применимо ко всему объему материала, так как из (3.14) следует, что при любом выборе постоянных c_1 и A (A из (3.22)) на поверхности канала будет зона, где не выполняется условие трения в связи с тем, что в этой зоне $\sigma_\theta > 0$. На это обстоятельство указывалось в [17, 18]. Однако, при исследовании конкретных практических задач, например при анализе процесса экструзии, постоянные c_1 и A всегда могут быть выбраны так, чтобы построенное решение имело силу.

Работа выполнена при финансовой поддержке компании ALCOA, США и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М. – Л.: Гостехиздат, 1950. 396 с.
2. Brovman M.J. Steady forming processes of plastic materials with their rotation // Intern. J. Mech. Sci. 1987. V. 29. No. 7. P. 483–489.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
4. Добровольский В.Л. Об одной осесимметричной задаче для идеального пластического тела // Вопросы исследования прочности деталей машин. М.: Моск. ин-т приборостроения, 1993. Вып. 1. С. 29–32.
5. Durban D., Fleck N.A. Singular plastic fields in steady penetration of a rigid cone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. No. 4. P. 706–710.
6. Spenser A.J.M. A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. No. 3. P. 197–209.
7. Hershey A.V. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1954. V. 21. N 3. P. 241–249.
8. Hosford W.F. A generalized isotropic yield criterion // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1972. V. 39. No. 2. P. 607–609.
9. Barlat F., Richmond O. Prediction of tricomponent plane stress yield surfaces and associated flow and failure behavior of strongly textured F.C.C. polycrystalline Sheets // Mater. Sci. and Engng. 1987. V. 95. P. 15–29.

10. *Barlat F., Chung K.* Anisotropic potentials for plastically deforming metals // *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.* 1993. V. 1. No. 4. P. 403–416.
11. *Barlat F., Maeda Y., Yanagawa M., Chung K., Brem J.C., Hayashida Y., Lege D.J., Matsui K., Murtha S.J., Hattori S.* Yielding description of solution strengthened aluminum alloys // *Computational Plasticity: Fundamentals and applications. Proc. 4th Intern. Conf. Barcelona, Spain, 1995.* Pineridge Press, 1995. P. 879–888.
12. *Соколовский В.В.* Об уравнениях пластического течения в пограничном слое // *ПММ.* 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 328–334.
13. *Александров С.Е., Друянов Б.А.* Об условиях трения пластических тел // *Изв. РАН. МТТ.* 1992. № 4. С. 116–122.
14. *Друянов В., Alexandrov S.* Laws of external friction of plastic bodies // *Intern. J. Plasticity.* 1992. V. 8. No. 7. P. 819–826.
15. *Александров С.Е.* О разрывных полях скоростей при произвольной деформации идеального жесткопластического тела // *Докл. РАН.* 1992. Т. 324. № 4. С. 769–772.
16. *Александров С.Е.* Поле скорости вблизи поверхности их разрыва при произвольном течении идеального жесткопластического материала // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 5. С. 116–122.
17. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Течение пластической массы в сходящемся канале: Особенности решения // *Докл. РАН.* 1993. Т. 332. № 3. С. 314–316.
18. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* От отрывных течений в теории пластичности // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 4. С. 144–149.

Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1995