

УДК 539.214;539.374

© 1997 г. А.В. КОНОВАЛОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПРИ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Получены определяющие соотношения для больших пластических деформаций упругопластической среды, обладающей свойствами упрочнения и разупрочнения. Решена тестовая задача упругопластического сдвига.

1. Исходные посылки и допущения. Согласно [1] для ковариантных компонент (и только для них) тензоров упругих ϵ_{ij}^e , пластических ϵ_{ij}^p и полных ϵ_{ij} деформаций в текущей лагранжевой системе координат ξ^i ($i = 1, 2, 3$) с базисными векторами e^i справедливы разложения:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.1)$$

которые не зависят от величины компонент ϵ_{ij}^e и ϵ_{ij}^p . Точкой сверху обозначена полная производная по времени.

Основываясь на экспериментальных данных [2] для процессов с конечными (но малыми) упругими и большими пластическими деформациями, которые имеют место при обработке металлов давлением, примем следующие модельные допущения.

1. Связь между упругими деформациями и напряжениями описывается законом Гука в обобщенной форме

$$\sigma = \lambda \Theta I + 2\mu A, \quad \Theta = (V - V_0) / V_0 \quad (1.2)$$

где σ – тензор напряжений Коши; λ, μ – коэффициенты Ламе, $I = g_{ij} e^i e^j$ ($i, j = 1, 2, 3$) – единичный тензор, $g_{ij} = e_i \cdot e_j$, $A = \epsilon_{ij} e^i e^j$ – тензор деформации Альманси; Θ – относительное изменение индивидуального объема бесконечно малой частицы среды [3]; V_0, V – соответственно индивидуальный объем бесконечно малой частицы среды до деформации и после деформации.

2. Металл пластически несжимаемый; скорость пластической деформации подчиняется ассоциированному закону пластического течения [1] с гладкой поверхностью нагружения, уравнение которой имеет вид

$$f = f(S, k) = 0, \quad S = \sigma - \sigma_0 I \quad (1.3)$$

где f – скалярная функция нагружения; σ_0 – среднее нормальное напряжение; k – напряжение текучести, в момент начала пластических деформаций $k = k_0$. В частности, наиболее приемлемым является условие текучести Мизеса

$$f = 0,5S \cdot S - k^2 = 0 \quad (1.4)$$

где двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров.

Рассмотрим пример простого сдвига материала без изменения его объема, закон движения при котором в декартовой ортонормированной системе координат наблюдателя x^i с базисными векторами e_i ($i = 1, 2, 3$) определяется формулами: $x^1 = \xi^1 + w\xi^2$, $x^2 = \xi^2$, $x^3 = \xi^3$, где w – величина сдвига при $\xi^2 = 1$; $\xi^i = x^i(t_0)$, t_0 – момент времени начала сдвига. Ненулевые компоненты тензора деформации Альманси $A = E_{ij} e^i e^j$ в этой системе координат равны соответственно:

$$E_{12} = 0,5w, \quad E_{22} = -0,5w^2 \quad (1.5)$$

В случае упругих деформаций и закона Гука (1.2) связь между напряжениями и деформациями при простом сдвиге имеет вид

$$\sigma = 2\mu A \quad (1.6)$$

Из (1.6) и (1.5) следует, что первый инвариант тензора напряжений отличен от нуля: $\sigma \cdot I = -\mu w^2$, хотя изменение объема отсутствует, и среднее нормальное напряжение должно равняться нулю. Данный пример показывает, что в случае конечных, а тем более больших деформаций среднее нормальное напряжение не определяется первым инвариантом тензора напряжений Коши так же, как и относительное изменение объема Θ согласно [3] не определяется первым инвариантом тензора деформации Альманси.

В связи с этим для конечных деформаций связь между средним нормальным напряжением и относительным изменением объема в виде $\sigma_0 = K\Theta$, где K – объемный модуль упругости; в силу малости упругих деформаций $K = \lambda + 2/3\mu$. Тогда тензор S в условии пластичности (1.3) вычисляется по формуле

$$S = \sigma - K\Theta I \quad (1.7)$$

Из формулы (1.7) следует, что в тензоре S исключена доля напряжений, ответственная за всестороннее сжатие–растяжение частицы среды, т.е. за изменение ее объема. Поэтому этот тензор в соответствии с принятой нами гипотезой пластической несжимаемости материала фигурирует в качестве аргумента в функции нагружения (1.3). В случае отсутствия изменения объема частицы среды в процессе деформации тензор S совпадает с тензором напряжений σ . Отметим, что первый инвариант тензора S в общем случае не равен нулю. В данном примере, когда $\Theta = 0$, имеем $S \cdot I = \sigma \cdot I = -\mu w^2$.

Как показывает рассмотренный пример простого сдвига, использование при конечных деформациях для пластически несжимаемого материала в качестве аргумента функции нагружения девиатора напряжений $\tilde{\sigma} = \sigma - 1/3(\sigma \cdot I)I$ не допустимо, так как при этом в напряжениях, вызывающих пластические деформации, не исключается полностью доля напряжений, ответственная за изменение объема. Поскольку в примере $\sigma \cdot I = -\mu w^2 \neq 0$, то девиатор $\tilde{\sigma}$ не равен тензору напряжений σ несмотря на то, что объем при сдвиге не изменяется.

Введение тензора S по формуле (1.7) снимает проблему выбора подходящей коротационной производной тензора напряжений в определяющих соотношениях для упругопластического материала, связанную с требованием стационарности инвариантов тензора напряжений в случае равенства нулю коротационной производной [4, 5].

Дальнейшее построение определяющего соотношения основывается только на корректном введении связей между напряжениями и деформациями как для упругой, так и для пластической составляющих. Будем исходить из того, что имеют место законы Гука (1.2) и пластического течения [1]. Однако для учета конечных упругопластических деформаций введем в них ряд изменений.

2. Вывод определяющих соотношений. Закон Гука (1.2) в компонентной записи в базисе e^i текущей лагранжевой системы координат имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta g_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e \quad (2.1)$$

Дифференцируя равенство (2.1) по времени, получим

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\Theta} g_{ij} + \lambda \Theta \dot{g}_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (2.2)$$

Запишем это равенство с базисными векторами e^i :

$$\dot{\sigma}_{ij} e^i e^j = \lambda \dot{\Theta} g_{ij} e^i e^j + \lambda \Theta \dot{g}_{ij} e^i e^j + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^e e^i e^j$$

Откуда в тензорной форме имеем

$$\sigma^{cr} = \lambda \Theta I + 2\lambda \Theta D + 2\mu D^e \quad (2.3)$$

$$\sigma^{cr} = \dot{\sigma}_{ij} e^i e^j = \dot{\sigma} + \nabla v \cdot \sigma + \sigma \cdot \nabla v^T, \quad D^e = \dot{\epsilon}_{ij}^e e^i e^j \quad (2.4)$$

$$D = \dot{\epsilon}_{ij} e^i e^j = 0,5 \dot{g}_{ij} e^i e^j = 0,5(\nabla v + \nabla v^T) = A^{cr} = \dot{A} + \nabla v \cdot A + A \cdot \nabla v^T$$

буквами (cr) обозначена производная Коттер и Ривлина [4], ∇v – градиент скорости перемещений, значок T означает транспонирование; D – тензор скоростей деформаций.

В равенстве (2.2) величина Θ определяется по формуле

$$\Theta = \frac{\dot{V}}{V_0} = \frac{\dot{V}}{V} \frac{V}{V_0} = (I \cdot D)(1 + \Theta)$$

Подставляя разложение (1.1) в равенство (2.2), получим

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\Theta} g_{ij} + 2(\lambda \Theta + \mu) \dot{\epsilon}_{ij} - 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.5)$$

Будем считать, что функция k в условии текучести (1.3) описывает как упрочнение, так и разупрочнение материала в процессе пластической деформации. Представим скорость изменения этой функции в аддитивном виде

$$\dot{k} = u\dot{\chi} - \dot{r} \quad (2.6)$$

где $u > 0$ – некоторая функция; χ – параметр упрочнения, $\chi > 0$; $\dot{r}$ – скорость разупрочнения (не зависит однозначно от χ). Величины u и $\dot{r}$ в общем случае зависят от температуры. Разупрочнение может происходить за счет процессов возврата, рекристаллизации, накопления поврежденности и должно описываться своей системой дифференциальных уравнений.

Дифференцируя условие текучести (1.3) по времени и учитывая зависимость (2.6), получим

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} + \frac{\partial f}{\partial k} (u\dot{\chi} - \dot{r}) = 0 \quad (2.7)$$

Пластическая составляющая тензора скоростей деформаций согласно ассоциированному закону [1] и равенству (2.7) записывается в виде

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \begin{cases} c \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{r} \right) \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} & \text{при } f = 0, f' \geq 0 \\ 0 & \text{при } f < 0 \text{ и при } f = 0, f' \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$f' = \frac{1}{\partial f / \partial k} \left(-\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} + \dot{r} \right)$$

где $c > 0$ – функция переменных параметров.

Из равенства (2.8) имеем

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}^{pij} = c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{r} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} \tilde{S}^{ij} \quad \dot{\epsilon}^{pij} = \tilde{g}^{jk} \tilde{g}^{in} \dot{\epsilon}_{nk}^p, \quad \tilde{S}^{ij} = \tilde{g}^{jk} \tilde{g}^{in} \frac{\partial f}{\partial S^{nk}}, \quad \tilde{g}^{in} \tilde{g}_{nj} = \delta_j^i \quad (2.9)$$

Здесь δ_j^i – символ Кронекера, $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}^0 + 2(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^e)$ согласно [1], $g_{ij}^0 = g_{ij}(t_0)$, t_0 – момент начала деформирования.

В качестве скорости параметра упрочнения примем величину

$$\dot{\chi} = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}^{pij}} \quad (2.10)$$

Из равенств (2.9), (2.10), (2.7) получим выражение для величины c :

$$c = \frac{1}{2\rho u |\partial f / \partial k|} \quad (2.11)$$

$$p = \sqrt{0,5 \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} \tilde{S}^{ij}} \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.8) в равенство (2.5), получим

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\Theta} g_{ij} + 2(\lambda \Theta + \mu) \dot{\epsilon}_{ij} - 2J\mu c \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{r} \right) \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} \quad (2.13)$$

где $J = 0$ при $f < 0$ и при $f = 0, f' \leq 0$; $J = 1$ при $f = 0, f' > 0$.

Равенство (2.13) в тензорной форме с базисом e^i запишется в виде

$$\sigma^{cr} = \lambda \dot{\Theta} I + 2(\lambda \Theta + \mu) D - 2J\mu c \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{r} \right) \frac{\partial f}{\partial S} \quad (2.14)$$

Подставляя выражение для σ^{cr} (2.4) в уравнение (2.14) и умножая двойным скалярным произведением обе части полученного равенства на тензор $\partial f / \partial S$, после несложных преобразований при $J = 1$ с учетом формул (1.7) и (2.11) получим

$$\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} = \left(b_1 + 2\mu c \frac{\partial f}{\partial k} \dot{r} \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \right) / (2\mu c b_2) \quad (2.15)$$

$$b_1 = 2\mu \left(1 - \frac{2}{3} \Theta \right) \frac{\partial f}{\partial S} \cdot D - \left(S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \right) \cdot \nabla v - \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \right) \cdot \nabla v^T - \frac{2}{3} \mu \dot{\Theta} \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot I \right)$$

$$b_2 = \frac{\rho u}{\mu} \left| \frac{\partial f}{\partial k} \right| + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{\partial f}{\partial S}$$

Подставляя зависимость (2.15) в уравнение (2.14), получим определяющее соотношение для упругопластической среды, обладающей свойствами упрочнения и разупрочнения

$$\sigma^{cr} = \lambda \dot{\Theta} I + 2(\lambda \Theta + \mu) D - J b \frac{\partial f}{\partial S} \quad b = \left(b_1 - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{r} \right) / b_2 \quad (2.16)$$

Поскольку равенство (2.16) содержит только индифферентные тензоры [6], то оно удовлетворяет принципу объективности [7]. Полученное определяющее соотношение справедливо для конечных упругих и больших пластических деформаций. В нем в ходе преобразований (2.1)–(2.3) появилась производная Коттер и Ривлина тензора напряжений Коши. Пара мер напряженного состояния и скорости изменения деформированного состояния (σ, D) , фигурирующая в определяющем соотношении (2.16), является сопряженной [1, 4, 6].

Из закона (2.8) и зависимостей (2.5), (2.16) следует формула для вычисления скорости ковариантных компонент тензора пластических деформаций в базисе текущей лагранжевой системы координат

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{b}{2\mu} \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} \quad (2.17)$$

Для сред, удовлетворяющих условию текучести Мизеса (1.4), определяющее соотношение согласно (2.16) имеет вид

$$\sigma^{cr} = \lambda \dot{\Theta} I + 2(\lambda \Theta + \mu) D - J h S \quad (2.18)$$

$$h = \left[\left[\mu \left(1 - \frac{2}{3} \Theta \right) S - S \cdot S \right] \cdot D - \frac{\mu}{3} \dot{\Theta} S \cdot I + k \dot{r} \right] / \left(k^2 + \frac{k \rho u}{\mu} \right)$$

а компоненты ε_{ij}^p в соответствии с выражением (2.17) вычисляются по формуле

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{h}{2\mu} S_{ij}, \quad p = \sqrt{0,5 S_{ij} \cdot \tilde{S}^{ij}}, \quad \tilde{S}^{ij} = \tilde{g}^{jk} \tilde{g}^{in} S_{ij}$$

Для упругопластических сред, не обладающих свойством разупрочнения, в определяющих соотношениях (2.16), (2.18) $\dot{\gamma} = 0$ и согласно соотношению (2.6) $\dot{\gamma} = dk/d\chi$.

В работах [4, 8] показано, что всевозможные коротационные производные тензора однозначно связаны между собой и с производной тензора по времени. Выражая через эти связи в равенстве (2.16) (или (2.18)) производную σ^{cr} через любую другую коротационную производную, в том числе и через $\dot{\sigma}$ согласно (2.4), получим определяющее соотношение, в левой части которого будет стоять рассматриваемая производная тензора напряжений Коши, а в правой части появятся дополнительные конвективные слагаемые, не связанные с упругопластическими свойствами материала. Полученные таким образом определяющие соотношения будут удовлетворять принципу объективности.

Из логики выполненных выкладок видно, что вопрос о выборе наилучшей коротационной производной в определяющих соотношениях не является проблемой, требующей своего разрешения. Проблемой в построении определяющих соотношений является описание законов, адекватно отражающих механические свойства и реологию материалов таких, как упругое поведение (закон Гука (1.2)) и пластические свойства (1.3), (1.4), (1.7), (2.6), (2.8). После решения этих проблем весь дальнейший вывод определяющих соотношений в скоростной форме базируется на формальном дифференцировании принятых исходных законов.

Использование в определяющих соотношениях вместо тензора напряжений Коши первого или второго тензоров напряжений Пиола – Кирхгофа, например, как в [9–11], само по себе не снимает проблем корректного описания исходных законов. В силу взаимной зависимости всех этих тензоров предпочтение, на наш взгляд, следует отдать тензору напряжений Коши, так как он имеет наиболее ясный физический смысл.

В [9–14] получены или используются некорректные определяющие соотношения. В них авторы в левой части равенств типа (2.18) (при $\dot{\gamma} = 0$) использовали непосредственно производную Яуманна. Такой подход вытекал из потребности исключить влияние жесткого вращения частицы при распространении определяющих соотношений для малых деформаций на большие и восходит еще к работам Прагера [5] и Хилла [15]. Если учесть зависимость $\sigma^{cr} = \sigma^J + D \cdot \sigma + \sigma \cdot D$, где индексом J обозначена производная Яуманна, то ясно, что такое использование производной Яуманна дает ошибку на величину $D \cdot \sigma + \sigma \cdot D$, причем величина этой ошибки не зависит от вращательного движения частицы. Такое некорректное использование производной Яуманна в определяющем соотношении приводит к известному факту осцилляции напряжений при простом сдвиге [4] и, как показано в [16], дает некорректную постановку задачи Коши, что проявляется в локальной неустойчивости разностной схемы типа Уилкинса.

Авторы [8] на примере расчетов задачи простого сдвига анализируют различные коротационные производные. При этом вывод определяющих соотношений основывался на использовании в левой части равенства (2.3) вместо производной Коттер и Ривлина непосредственно любой другой производной тензора напряжений Коши. Ясно, что при этом в определяющее соотношение вносится погрешность, зависящая от разности между производной Коттер и Ривлина и применяемой производной.

В [17] при дифференцировании по времени условия пластичности в формуле типа (2.7) вместо $\dot{\sigma}$ (здесь $\tilde{S}$) также искусственно была использована производная Яуманна.

В [4] предложено использовать определяющее соотношение в виде

$$\sigma^Z = M \cdot H^Z \quad (2.19)$$

где M – четырехвалентный тензор свойств материала; H – тензор деформаций Генки; Z – обозначает любую коротационную производную. Если проинтегрировать это равенство, то нетрудно видеть, что полученное соотношение $\sigma = M \cdot H$ не описывает закон Гука (1.2), который должен иметь вид $\sigma = M \cdot A$. Поэтому определяющее соотношение не может иметь вид (2.19).

Полученные здесь определяющие соотношения отличаются от всех известных автору определяющих соотношений для больших деформаций типа (2.16) наличием члена $(\partial f / \partial k) \dot{r}$, учитывающего разупрочнение, а также представлением тензора S в условии пластичности (1.3) в виде зависимости (1.7), в результате чего, в частности, в полученных определяющих соотношениях имеют место составляющие $S \cdot \partial f / \partial S$, $\partial f / \partial S \cdot S$, величины p , Θ и $\dot{\Theta}$.

3. Пример. Рассмотрим задачу определения компонент тензора напряжений Коши в декартовой ортонормированной системе координат при сдвиге на величину $\dot{w}$ вдоль оси x^1 куба с длиной ребра, равной 1. В отличие от рассмотренной выше задачи простого сдвига откажемся от условия неизменности объема. В этом случае для полноты задания граничных условий будем считать, что в процессе сдвига отсутствуют нормальные напряжения на всех боковых поверхностях куба:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_n = \dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{33} = \dot{\sigma}_n = 0 \quad (3.1)$$

где $\sigma_n = n \cdot \sigma \cdot n$ – нормальное напряжение на наклонной боковой поверхности с нормалью $n = \left(1 / \sqrt{1 + w^2} - w / \sqrt{1 + w^2}, 0 \right)$. Среда упругопластическая без разупрочнения, т. е. $\dot{r} = 0$.

Закон движения зададим в виде

$$x^1 = (1 + \gamma) \xi^1 + (1 + \alpha) w \xi^2, \quad x^2 = (1 + \alpha) \xi^2, \quad x^3 = (1 + \beta) \xi^3,$$

где величины α , β и γ в момент начала сдвига равны нулю и определяются в процессе решения задачи. Принятый закон движения благодаря величинам α , β и γ допускает изменение объема куба в процессе сдвига.

Векторы поля скоростей имеют компоненты

$$v^1 = \frac{\dot{\gamma} x^1}{1 + \gamma} + q x^2, \quad v^2 = \frac{\dot{\alpha} x^2}{1 + \alpha}, \quad v^3 = \frac{\dot{\beta} x^3}{1 + \beta} \quad (3.2)$$

$$q = \dot{w} + w \left(\frac{\dot{\alpha}}{1 + \alpha} - \frac{\dot{\gamma}}{1 + \gamma} \right)$$

Ненулевые компоненты тензора скоростей деформаций соответственно равны:

$$D_{11} = \frac{\dot{\gamma}}{1 + \gamma}, \quad D_{12} = D_{21} = 0,5q, \quad D_{22} = \frac{\dot{\alpha}}{1 + \alpha}, \quad D_{33} = \frac{\dot{\beta}}{1 + \beta} \quad (3.3)$$

Из определяющего соотношения (2.18), с учетом равенств (2.4), (3.2), (3.3) и (3.1) получим систему дифференциальных уравнений для компонент тензора напряжений Коши

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= \lambda \dot{\Theta} + 2(\lambda \Theta + \mu) D_{11} - 2 D_{11} \sigma_{11} - J_h S_{11} \\ \dot{\sigma}_{12} &= 2(\lambda \Theta + \mu) D_{12} - q \sigma_{11} - (D_{11} + D_{22}) \sigma_{12} - J_h S_{12} \\ \dot{\sigma}_{13} &= \dot{\sigma}_{23} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

с ограничениями

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{22} &= \lambda \dot{\Theta} + 2(\lambda \Theta + \mu) D_{22} - 2q \sigma_{12} - Jh S_{22} = 0 \\ \dot{\sigma}_{33} &= \lambda \dot{\Theta} + 2(\lambda \Theta + \mu) D_{33} - Jh S_{33} = 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\dot{\sigma}_n = \dot{\sigma}_{11} - 2w \dot{\sigma}_{12} - 2 \frac{w \sigma_{11} + (1 - w^2) \sigma_{12}}{1 + w^2} \dot{w} = 0$$

и начальными условиями при $t = 0$:

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \Theta = 0, \quad \dot{\Theta} = (D_{11} + D_{22} + D_{33})(1 + \Theta) \quad (3.6)$$

Система уравнений (3.5) дает три линейных алгебраических уравнения для определения в каждый момент времени величин $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ и $\dot{\gamma}$, что позволяет проинтегрировать их с нулевыми начальными условиями. При этом ненулевые компоненты σ_{11} , σ_{12} вычисляются из дифференциальных уравнений (3.4) с начальными условиями (3.6).

В расчетах коэффициент Ламе λ определялся через коэффициент Ламе μ и коэффициент Пуассона ω по формуле $\lambda = 2\mu/(1 - 2\omega)$. Коэффициент Пуассона положили постоянным и равным 0,3. Напряжение текучести бралось в виде кусочно-линейной зависимости $k = k_{l-1} + B_l(\chi - \chi_{l-1})$, $l = 1, 2, \dots, 7$. Значения k_l , χ_l и B_l получались аппроксимацией экспериментальных данных работы [2] для меди. При этом $k_0/\mu = 0,0005$, $\chi_0 = 0$, $\mu = 40000$ МПа. Значения χ_l и B_l/μ приведены ниже

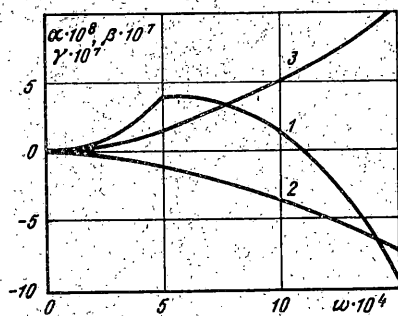
l	1	2	3	4	5	6	7
χ_l	0,01	0,1	0,25	0,5	1	1,5	7
B_l/μ	0,035	0,015	0,008	0,004	0,002	0,001	0,0001

Расчеты показали, что при моделировании сдвига в рассматриваемой постановке с определяющим соотношением (2.18) имеет место как удлинение, так и укорочение материала вдоль оси x^2 на величину α . Вдоль оси x^3 материал укорачивается на величину β , вдоль оси x^1 — удлиняется на величину γ . Кроме этого отличны от нуля компонента тензора напряжений σ_{11} , относительное изменение объема Θ и среднее нормальное напряжение σ_0 .

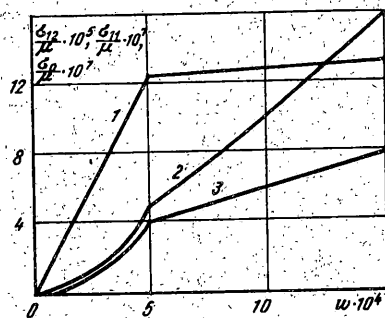
На фиг. 1, 2 приведены вычисленные значения α , β , γ (фиг. 1, кривые соответственно 1, 2 и 3) и σ_{12}/μ , σ_{11}/μ , σ_0/μ (фиг. 2, кривые соответственно 1, 2 и 3) при упругопластическом сдвиге на малую величину сдвига $w \leq 0,0015$. Видно, что вдоль оси x^2 при упругих деформациях происходит удлинение материала. С началом пластических деформаций удлинение замедляется и переходит в сжатие. Вдоль оси x^3 материал укорачивается, а вдоль оси x^1 — удлиняется, причем с началом пластических деформаций интенсивность этих процессов возрастает. Расчеты показали, что поведение материала вдоль оси x^2 не зависит от интенсивности упрочнения $dk/d\chi$. Значения σ_{11}/μ и σ_0/μ положительны и с ростом w возрастают.

На фиг. 3–4 приведены вычисленные значения α , β , γ (фиг. 3, кривые соответственно 1, 2 и 3) и σ_{12}/μ , σ_{11}/μ , σ_0/μ , k/μ (фиг. 4, кривые соответственно 1, 2, 3 и 4) при большом упругопластическом сдвиге на величину $w \leq 3$. Видно, что вдоль осей x^2 и x^3 материал укорачивается на одинаковую величину, а вдоль оси x^1 — удлиняется. При величине сдвига $w > 0,2$ напряжение σ_{12} начинает заметно отличаться от величины k за счет достаточно больших значений напряжения σ_{11} . Среднее нормальное напряжение σ_0 положительно и принимает значения того же порядка, что и напряжения σ_{12} и σ_{11} .

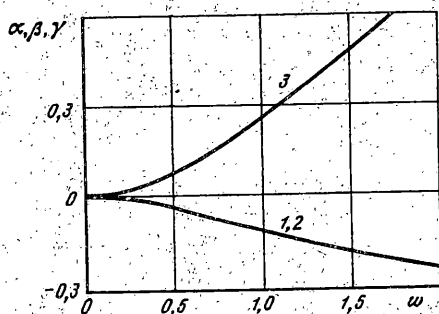
На фиг. 5–8 представлены результаты расчетов при знакопеременном упругопластическом сдвиге за три цикла (номера у кривых обозначают номер цикла). Изменение величины α (см. фиг. 5) имеет сложный характер. Сначала в первом цикле значения α



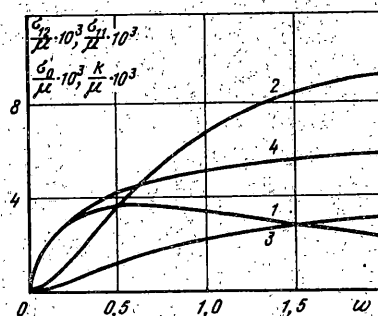
Фиг. 1



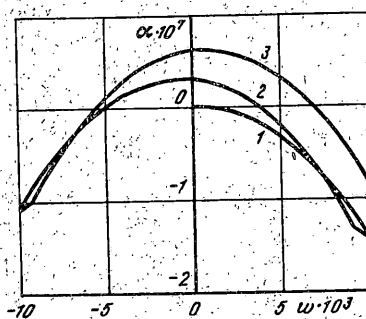
Фиг. 2



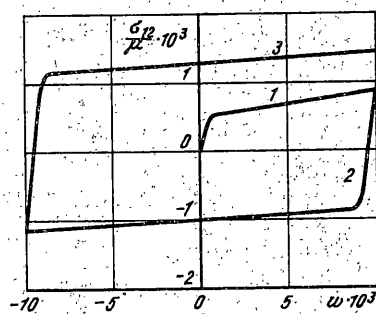
Фиг. 3



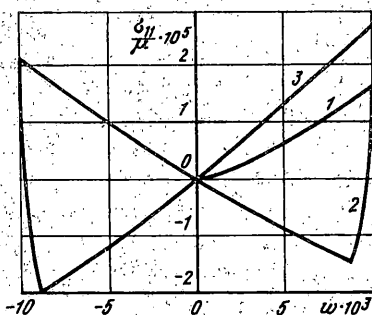
Фиг. 4



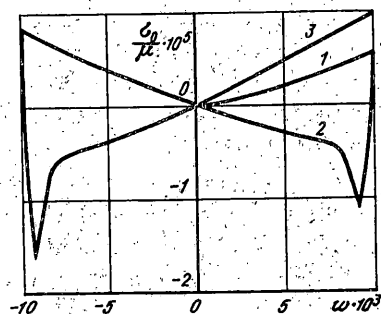
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

уменьшаются, а во втором и третьем циклах возрастают. При этом величина α принимает как положительные, так и отрицательные значения. Смена знака деформации приводит сначала к уменьшению по модулю значения величины α . Однако, несмотря на эти колебания, тенденция изменения ее значений остается той же, что и при знакопостоянном сдвиге.

Напряжения σ_{12} , σ_{11} и α_0 (см. фиг. 6–8 соответственно) во время цикла изменяют свой знак и увеличивают диапазон изменения своих значений от цикла к циклу.

Все отмеченные в данном примере особенности поведения напряженно-деформируемого состояния при упругопластическом сдвиге с конечными деформациями имеют место благодаря конвективным слагаемым $\nabla v \cdot \sigma$ и $\sigma \cdot \nabla v^T$ в определяющем соотношении (2.16) с учетом формулы (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1983. 560 с.
2. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
4. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
5. Прагер В. Элементарный анализ определений скорости изменения напряжений // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1960. № 3. С. 69–74.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
8. Szabo L., Balla M. Comparison of some stress rates // Int. J. Solids Struct. 1989. V. 25. No. 3. P. 279–297.
9. Bathe K.J., Snyder M.D., Cimento A.P., Donald R.W. On some current procedures and difficulties in finite element analysis of elastic-plastic response // Comput. and Struct. 1980. V. 12. No. 4. P. 607–624.
10. Cheng J.-H., Kikuchi N. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations // Comput. Meths. Appl. Mech. Eng. 1985. V. 49. No. 7. P. 71–108.
11. Needlman A. On finite element formulations for large elastic-plastic deformations // Comput. and Struct. 1985. V. 20. No. 1–3. P. 247–257.
12. Nagtegaal J.C., Veldpaus F.E. On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model // Numerical Analysis of Forming Processes / Eds. by J.F.T. Pittman et al. N.J.: Wiley, 1984. P. 351–371.
13. Lee E.H. Finite deformation effect in plasticity analysis // Numerical Analysis of Forming Processes / Eds. by J.F.T. Pittman et al. N.J.: Wiley, 1984. P. 372–393.
14. Lange K., Herrmann M., Keck P., Wilhelm M. Application of an elasto-plastic finite element code to the simulation of metal forming processes // J. Mater. Proc. Technol. 1991. V. 27. No. 1–3. P. 239–261.
15. Хилл Р. Некоторые основные принципы механики твердых тел при отсутствии влияния естественного времени // Механика: Сб. перев. иностр. статей. 1960. № 3. С. 75–93.
16. Быченков В.А., Свиденский В.А. Некорректность модели упругопластического течения в методе Уилкинса // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26. № 1. С. 118–122.
17. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.