МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. С.В. ШМЕГЕРА

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ РАЗРЕЗОМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

Построено решение начально-краевой задачи динамической теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух различных упругих полуплоскостей, по линии соединения которых с произвольной переменной скоростью движется разрез. Условия нагружения разреза – комбинирование, соответствующие нормальному отрыву и поперечному сдвигу. Для решения использован новый метод.

Рассматриваемая в данной работе задача является каноническим примером математических задач динамической теории межфазных (расположенных на границе раздела упругих сред) трещин. Аналитическое решение такой задачи, при нестационарных условиях нагружения и (или) распространения разреза, получено только в случае касательных нагрузок (трещина поперечного сдвига) [1]. В этом случае решение можно получить методом интегральных преобразований на основе интегралов Фурье и (или) Лапласа с использованием техники факторизации, распространенной на задачи с движущейся точкой раздела граничных условий [2]. В случае когда разрез находится под действием нормальных нагрузок (нормальный отрыв) или в общем случае комбинированного нагружения (нормальный отрыв и поперечный сдвиг), метод факторизации является неэффективным и решение такой задачи получить не удается.

В предлагаемой работе построено аналитическое решение указанной задачи для общего случая комбинированного нагружения. Для решения используется новый подход, основанный на преобразовании Радона и методах решения краевых задач теории функций комплексного переменного.

Стационарный динамический случай задачи (установившееся движение разреза) рассмотрен в [3] (см., также [4]).

1. Постановка задачи. Рассмотрим кусочно-однородную изотропную упругую плоскость (пространство в условиях плоской деформации), состоящую из двух полуплоскостей $y < 0$ (среда 1) и $y > 0$ (среда 2) с модулями сдвига μ_k и скоростями распространения продольных и поперечных волн c_{1k} и c_{2k} соответственно (индекс k фиксирует среду; $k = 1, 2$). По границе соединения полуплоскостей в момент времени $t = 0$ начинает распространяться разрез, вершина которого движется по закону $x = l(t)$, $y = 0$ ($l(0) = l_0$). К берегам разреза ($x < l(t)$, $y = \pm 0$) приложены нормальные и касательные нагрузки. На продолжении разреза ($x > l(t)$, $y = 0$) перемещения и напряжения непрерывны. До начала движения плоскость покоилась.

Таким образом, имеем следующие граничные и начальные условия для компонент вектора перемещения $\mathbf{w}_k = \{u_k, v_k\}$ и компонент тензора напряжений σ_{yk} и τ_{xyk}:

$$\sigma_{yk}(x,0,t) = \sigma_{0k}(x,t), \quad \tau_{xyk}(x,0,t) = \tau_{0k}(x,t) \quad (x < l(t), t > 0)$$

$$[u_k(x,0,t)] = [v_k(x,0,t)] = [\sigma_{yk}(x,0,t)] = [\tau_{xyk}(x,0,t)] = 0 \quad (x > l(t), t > 0)$$

$$\mathbf{w}_k(x,y,t) = \mathbf{C}_k(t) + O(r^{\varepsilon}), \quad \varepsilon \geqslant 1/2, \quad r \to 0 \quad (r = [(x - l(t))^2 + y^2]^{1/2}) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{w}_k(x,y,t)=\dot{\mathbf{w}}_k(x,y,t)=0 \ (t<0),\ (\dot{\cdots})\equiv\partial/\partial t$$

$$[f_k(x,0,t)]\equiv f_1(x,0,t)-f_2(x,0,t),\ \ f_k=(u_k,\upsilon_k,\sigma_{yk},\tau_{xyk})$$

$$u_k=\varphi_{1k,x}+\varphi_{2k,y},\ \upsilon_k=\varphi_{1k,y}-\varphi_{2k,x} \tag{1.2}$$

$$\sigma_{yk}=\mu_k[c_{2k}^{-2}\ddot{\varphi}_{1k}-2(\varphi_{1k,xx}+\varphi_{2k,xy})]$$

$$\tau_{xyk}=\mu_k[c_{2k}^{-2}\ddot{\varphi}_{2k}-2(\varphi_{2k,xx}-\varphi_{1k,xy})]\ \ (\cdots)_{,p}\equiv\partial/\partial p\ \ (p=x,y)$$

где функции φ_{jk} ($j=1,2$) удовлетворяют волновым уравнениям

$$\varphi_{jk,xx}+\varphi_{jk,yy}=c_{jk}^{-2}\ddot{\varphi}_{jk} \tag{1.3}$$

Будем искать решение уравнений (1.3) в виде интегральной суперпозиции плоских волн произвольного вида [5]:

$$\varphi_{jk}(x,y,t)=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F_{jk}(z_{jk}(x,y,t,c),c)dc \tag{1.4}$$

Здесь $F_{jk}(z_{jk})$ – произвольные аналитические функции своих аргументов в области их комплексности; функции z_{jk} имеют вид

$$z_{jk}=\xi+in_{jk},\ \ \xi=x-ct,\ \ \eta_{jk}=\gamma_{jk}y\ \ \gamma_{jk}=(1-c^2/c_{jk}^2)^{1/2} \tag{1.5}$$

Ветви радикалов γ_{jk} на плоскости c с разрезами $[-\infty,-c_{jk}]$ и $[c_{jk},\infty]$ фиксированы условиями $\gamma_{jk}>0$ при $c=ia$ ($a>0$). Контур Г – произвольный.

Подставляя (1.4) при учете (1.5) в (1.2), получаем следующие представления перемещений и напряжений через функции F_{jk}:

$$u_k=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma[F_{1k}'+i\gamma_{2k}(c)F_{2k}']dc,\ \ \upsilon_k=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma[i\gamma_{1k}(c)F_{1k}'-F_{2k}']dc$$

$$\sigma_{yk}=-\mu_k\,\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma[\gamma_k(c)F_{1k}''+2i\gamma_{2k}(c)F_{2k}'']dc \tag{1.6}$$

$$\tau_{xyk}=\mu_k\,\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma[2i\gamma_{1k}(c)F_{1k}''-\gamma_k(c)F_{2k}'']dc$$

$$F_{jk}=F_{jk}(z_{jk}(c),c),\ \ \gamma_k=1+\gamma_{2k}^2,\ \ (\ )_{jk}'\equiv\partial/\partial z_{jk}$$

Из представлений (1.6) следует, что для решения задачи (1.1)–(1.3) достаточно найти функции F_{jk} и (или) их производные.

2. Сведение к системе краевых задач Римана – Гильберта. Подставляя (1.6) при $\eta_{jk}=0$ ($y=0$) в граничные условия из (1.1) (предварительно продифференцировав условия для перемещений по x), перепишем их в виде

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\begin{bmatrix}\Sigma_k\\ \mathrm{T}_k\end{bmatrix}dc=\begin{bmatrix}\sigma_{0k}(x,t)\\ \tau_{0k}(x,t)\end{bmatrix}\ \ (x<l(t),t>0)$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\begin{bmatrix}\Sigma_1-\Sigma_2\\ \mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2\end{bmatrix}dc=0\ \ (x>l(t),t>0)$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\left\{\frac{1}{\mu_1R_1(c)}\left(\begin{bmatrix}-q_1(c)\\ n_{11}(c)\end{bmatrix}\Sigma_1+\begin{bmatrix}n_{21}(c)\\ q_1(c)\end{bmatrix}\mathrm{T}_1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu_2R_2(c)}\left(\begin{bmatrix}-q_2(c)\\ n_{12}(c)\end{bmatrix}\Sigma_2+\begin{bmatrix}n_{22}(c)\\ q_2(c)\end{bmatrix}\mathrm{T}_2\right)\right\}dc=0\ \ (x>l(t),t>0)$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_k\\ \mathrm{T}_k\end{bmatrix}=\mu_k\left\{\begin{bmatrix}-\gamma_k(c)\\ (-1)^{k-1}2i\gamma_{1k}(c)\end{bmatrix}F_{1k}''(\xi(x,t,c),c)-\begin{bmatrix}(-1)^{k-1}2i\gamma_{2k}(c)\\ \gamma_k(c)\end{bmatrix}F_{2k}''(\xi(x,t,c),c)\right\}$$

$$q_k=\gamma_k-2\gamma_{1k}\gamma_{2k},\;\; n_{jk}=(-1)^{k-1}i\gamma_{jk}(1-\gamma_{2k}^2) \tag{2.2}$$

$$R_k=\gamma_k^2-4\gamma_{1k}\gamma_{2k}$$

Применяя к выражениям (2.1) преобразование Радона [5] в виде

$$F(\xi,c)=\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\delta(x-ct-\xi)dxdt \tag{2.3}$$

($\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака) с формулой обращения

$$f(x,t)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\xi',c)d\xi'dc}{\xi'-\xi(x,t,c)} \tag{2.4}$$

получаем

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\Sigma_k(\xi)=\begin{cases}\Sigma_{0k}(\xi) & (\xi<l_*-ct)\\ 0 & (\xi>l_*)\end{cases}\\ &\operatorname{Re}\mathrm{T}_k(\xi)=\begin{cases}\mathrm{T}_{0k}(\xi) & (\xi<l_*-ct)\\ 0 & (\xi>l_*)\end{cases}\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re}[\Sigma_1(\xi)-\Sigma_2(\xi)=0\\ \operatorname{Re}[\mathrm{T}_1(\xi)-\mathrm{T}_2(\xi)]=0\end{aligned}\right\}\;(l_*-ct<\xi<l_*) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1R_1}\left(\begin{bmatrix}-q_1\\ n_{11}\end{bmatrix}\Sigma_1(\xi)+\begin{bmatrix}n_{21}\\ q_1\end{bmatrix}\mathrm{T}_1(\xi)\right)-\right.\\ &\left.-\frac{1}{\mu_2R_2}\left(\begin{bmatrix}-q_2\\ n_{12}\end{bmatrix}\Sigma_2(\xi)+\begin{bmatrix}n_{22}\\ q_2\end{bmatrix}\mathrm{T}_2(\xi)\right)\right\}=0\;\;(l_*-ct<\xi<l_*)\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $l_*=l(t_*)$, t_* – решение уравнения

$$l(t_*)-\xi+ct_*=0 \tag{2.8}$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{0k}(\xi)\\ \mathrm{T}_{0k}(\xi)\end{bmatrix}=\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{l(t)}\begin{bmatrix}\sigma_{0k}(x,t)\\ \tau_{0k}(x,t)\end{bmatrix}\delta(x-ct-\xi)dxdt \tag{2.9}$$

Выражения (2.5)–(2.7) представляют собой систему краевых задач типа Римана – Гильберта для определения функций $\Sigma_k(\xi)$ и $\mathrm{T}_k(\xi)$ на оси $\operatorname{Im} z_{jk}=0$. Если эти функции будут определены, то из (2.2) можно найти $F_{jk}''(\xi)$:

$$F_{jk}''(\xi)=\Lambda_{jk}(\xi) \tag{2.10}$$

$$\Lambda_{1k}(\xi)=\frac{1}{\mu_kR_k}[-\gamma_k\Sigma_k(\xi)+(-1)^{k-1}2i\gamma_{2k}\mathrm{T}_k(\xi)]$$

$$\Lambda_{2k}(\xi)=\frac{1}{\mu_kR_k}[(-1)^{k-1}2i\gamma_{1k}\Sigma_k(\xi)+\gamma_k\mathrm{T}_k(\xi)]$$

а затем, умножив обе части равенства (2.10) на $d\xi[2\pi i(\xi-z_{jk})]^{-1}$ и проинтегрировав с учетом свойств интеграла Коши, определить функции $F''_{jk}(z_{jk})$ и $F'_{jk}(z_{jk})$:

$$F''_{jk}(z_{jk})=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Lambda_{jk}(\xi)}{\xi-z_{jk}}d\xi,\quad F'_{jk}(z_{jk})=\int_{-\infty}^{z_{jk}}F''_{jk}(z_{jk})dz_{jk} \tag{2.11}$$

Тогда представления (1.6) дадут решение исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3)

3. Решение системы краевых задач. Перепишем условия (2.5) в виде

$$\mathrm{Re}[\Sigma_1(\xi)-\Sigma_2(\xi)]=\begin{cases}\Sigma_{01}(\xi)-\Sigma_{02}(\xi) & (\xi<l_*-ct)\\ 0 & (\xi>l_*)\end{cases}$$

$$\mathrm{Re}[\mathrm{T}_1(\xi)-\mathrm{T}_2(\xi)]=\begin{cases}\mathrm{T}_{01}(\xi)-\mathrm{T}_{02}(\xi) & (\xi<l_*-ct)\\ 0 & (\xi>l_*)\end{cases}$$

Эти условия, совместно с условиями (2.6), представляют собой две независимые задачи типа Дирихле для выражений заключенный в квадратные скобки. Решения этих задач даются интегралом Шварца [6] и имеют вид при $z=\xi+i0$ (z – вспомогательная переменная):

$$\begin{bmatrix}\Sigma_1(\xi)-\Sigma_2(\xi)\\ \mathrm{T}_1(\xi)-\mathrm{T}_2(\xi)\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{l_*-ct}\begin{bmatrix}\Sigma_{01}(\xi')-\Sigma_{02}(\xi')\\ \mathrm{T}_{01}(\xi')-\mathrm{T}_{02}(\xi')\end{bmatrix}\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}+$$

$$+\begin{bmatrix}\Sigma_{01}(\xi)-\Sigma_{02}(\xi)\\ \mathrm{T}_{01}(\xi)-\mathrm{T}_{02}(\xi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma_-(\xi)\\ \mathrm{T}_-(\xi)\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Теперь, при помощи (3.1) и тождеств

$$\Sigma_k(\xi)=(-1)^{k-1}\tfrac{1}{2}[\Sigma_1(\xi)-\Sigma_2(\xi)]+\tfrac{1}{2}[\Sigma_1(\xi)+\Sigma_2(\xi)]$$

$$\mathrm{T}_k(\xi)=(-1)^{k-1}\tfrac{1}{2}[\mathrm{T}_1(\xi)-\mathrm{T}_2(\xi)]+\tfrac{1}{2}[\mathrm{T}_1(\xi)+\mathrm{T}_2(\xi)] \tag{3.2}$$

условия (2.7) можно переписать в виде

$$\mathrm{Re}[-q\Sigma_+(\xi)+n_2\mathrm{T}_+(\xi)]=M(\xi),\quad \mathrm{Re}[n_1\Sigma_+(\xi)+q\mathrm{T}_+(\xi)]=N(\xi) \tag{3.3}$$

$$\Sigma_+(\xi)=\tfrac{1}{2}[\Sigma_1(\xi)+\Sigma_2(\xi)],\quad \mathrm{T}_+(\xi)=\tfrac{1}{2}[\mathrm{T}_1(\xi)+\mathrm{T}_2(\xi)]$$

$$M(\xi)=\mathrm{Re}[q_+\Sigma_-(\xi)-n_{2+}\mathrm{T}_-(\xi)]$$

$$N(\xi)=\mathrm{Re}[-n_{1+}\Sigma_-(\xi)+q_+\mathrm{T}_-(\xi)]$$

$$q_\pm=\frac{q_1}{\mu_1R_1}\pm\frac{q_2}{\mu_2R_2},\quad n_{j\pm}=\frac{n_{j1}}{\mu_1R_1}\pm\frac{n_{j2}}{\mu_2R_2}$$

$$q=q_-,\quad n_j=n_{j-}$$

Перепишем условия (3.3) и (2.5) (учитывая принятые в (3.3) обозначения) в виде задач Римана (сопряжения) [7, 8]:

$$\begin{gathered}-q\Sigma_+^+(\xi)+n_2\mathrm{T}_+^+(\xi)+\bar{q}\Sigma_+^-(\xi)-\bar{n}_2\mathrm{T}_+^-(\xi)=2M(\xi)\\ n_1\Sigma_+^+(\xi)+q\mathrm{T}_+^+(\xi)-\bar{n}_1\Sigma_+^-(\xi)+\bar{q}\mathrm{T}_+^-(\xi)=2N(\xi)\\ (l_*-ct<\xi<l_*)\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}\Sigma_+^+(\xi)-\Sigma_+^-(\xi)=\begin{cases}\Sigma_{01}(\xi)+\Sigma_{02}(\xi)=\Sigma_0(\xi) & (\xi<l_*-ct)\\ 0 & (\xi>l_*)\end{cases}\\ \mathrm{T}_+^+(\xi)-\mathrm{T}_+^-(\xi)=\begin{cases}\mathrm{T}_{01}(\xi)+\mathrm{T}_{02}(\xi)=\mathrm{T}_0(\xi) & (\xi<l_*-ct)\\ 0 & (\xi>l_*)\end{cases}\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь $\Sigma_+^{\pm}(\xi)$ и $T_+^{\pm}(\xi)$ граничные, при $z = \xi \pm i0$, значения аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ функций $\Sigma_+^{\pm}(z)$ и $T_+^{\pm}(z)$ (z – вспомогательная переменная).

Умножая второе уравнение системы (3.4) на некоторую постоянную s и складывая почленно с первым, получим

$$(sn_1 - q)[\Sigma_+^+(\xi) + aT_+^+(\xi)] - (s\bar{n}_1 - \bar{q})[\Sigma_+^-(\xi) + bT_+^-(\xi)] = 2[M(\xi) + sN(\xi)] \quad (3.6)$$

$$a = \frac{n_2 + sq}{sn_1 - q}, \quad b = \frac{\bar{n}_2 + s\bar{q}}{s\bar{n}_1 - \bar{q}} \quad (3.7)$$

Подберем s таким образом, чтобы $a = b$. Тогда из (3.7) находим

$$s_n = \tfrac{1}{2} m_1^{-1}[p + (-1)^{n-1}(p^2 - 4m_1 m_2)^{1/2}] \quad (n = 1, 2)$$
$$m_j = \bar{n}_j q - n_j \bar{q}, \quad p = n_1\bar{n}_2 - \bar{n}_1 n_2 \quad (3.8)$$

Подставляя s_n в (3.6) и (3.7), имеем

$$[\Sigma_+^+(\xi) + a_n T_+^+(\xi)] - \varkappa_n[\Sigma_+^-(\xi) + a_n T_+^-(\xi)] =$$
$$= 2\beta_n[M(\xi) + s_n N(\xi)] \quad (l_* - ct < \xi < l_*) \quad (3.9)$$

$$a_n = \frac{n_2 + s_n q}{s_n n_1 - q}, \quad \varkappa_n = \frac{s_n n_1 - \bar{q}}{s_n n_1 - q}, \quad \beta_n = \frac{1}{s_n n_1 - q}$$

Условия (3.5) перепишем в аналогичном виде

$$[\Sigma_+^+(\xi) + a_n T_+^+(\xi)] - [\Sigma_+^-(\xi) + a_n T_+^-(\xi)] = \begin{cases} \Sigma_0(\xi) + a_n T_0(\xi) & (\xi < l_* - ct) \\ 0 \quad (\xi > l_*) \end{cases} \quad (3.10)$$

Выражения (3.9) и (3.10) представляют собой две (соответственно для $n = 1$ и $n = 2$) независимые задачи типа Римана с разрывными коэффициентами относительно функций $\Sigma_+(\xi) + a_n T_+(\xi)$. Решения этих задач при $z_{jk} = \xi + i0$, обращающиеся на бесконечности в нуль, имеют вид (см., например, [7, 8]):

$$\Sigma_+(\xi) + a_n T_+(\xi) = Q_n(\xi) + P_n(\xi) \quad (3.11)$$

$$Q_n(\xi) = \frac{1}{\pi i}\beta_n\left\{G_n(\xi)\int_{l_*-ct}^{l_*} G_n^{-1}(\xi')[M(\xi') + s_n N(\xi')] + \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + \pi i[M(\xi) + s_n N(\xi)]\right\}$$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}G_n(\xi)\int_{-\infty}^{l_*-ct} G_n^{-1}(\xi')[\Sigma_0(\xi') + a_n T_0(\xi')]\frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + \frac{1}{2}[\Sigma_0(\xi) + a_n T_0(\xi)]$$

$$G_n(\xi) = \left(\frac{\xi - l_*}{\xi - l_* + ct}\right)^{\alpha_n}, \quad \alpha_n = -\frac{1}{2\pi i}\ln\varkappa_n \quad (-2\pi \leqslant \arg\varkappa_n < 0)$$

Отсюда, рассматривая (3.11) как систему двух (для n = 1, 2) алгебраических уравнений относительно $\Sigma_+(\xi)$ и $T_+(\xi)$, находим

$$\begin{bmatrix}\Sigma_+(\xi) \\ T_+(\xi)\end{bmatrix} = \frac{1}{a_2 - a_1}\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}a_{3-n} \\ -1\end{pmatrix}[Q_n(\xi) + P_n(\xi)] \quad (3.12)$$

Окончательные выражения для $\Sigma_k(\xi)$ и $T_k(\xi)$ получим подставляя (3.1) и (3.12) (при учете принятых в (3.3) обозначений) в тождества (3.2):

$$\Sigma_k(\xi) = (-1)^{k-1}\tfrac{1}{2}\Sigma_-(\xi) + \Sigma_+(\xi), \quad T_k(\xi) = (-1)^{k-1}\tfrac{1}{2}T_-(\xi) + T_+(\xi) \quad (3.13)$$

Теперь, когда функции $\Sigma_k(\xi)$ и $T_k(\xi)$ известны, формулы (2.10), (2.11) и представления (1.6) дают решение задачи (1.1)–(1.3) в замкнутом виде.

4. Некоторые особенности решения. Рассмотрим некоторые свойства общего решения на примере выражений для напряжений на продолжении разреза ($x > l(t)$, $y = 0$). Эти выражения можно получить непосредственно при помощи функций $\Sigma_k(\xi)$ и $T_k(\xi)$ из (3.13) применив к ним формулу обращения преобразования Радона в виде (2.4):

$$\begin{bmatrix}\sigma_{yk}(x,0,t)\\ \tau_{xyk}(x,0,t)\end{bmatrix} = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \begin{bmatrix}\Sigma_k(\xi(x,t,c),c)\\ T_k(\xi(x,t,c),c)\end{bmatrix}dc \tag{4.1}$$

Для упрощения формульного текста остановимся на относительно простом случае, когда нормальные напряжения на верхнем и нижнем берегах разреза одинаковы: $\sigma_{01}(x, t) = \sigma_{02}(x, t) = \sigma_0(x, t)$, а касательные напряжения отсутствуют: $\tau_{01}(x, t) = \tau_{02}(x, t) = 0$. Тогда из (2.9) и (3.1), находим $\Sigma_{01}(\xi) = \Sigma_{02}(\xi) = \Sigma_0(\xi)$, $T_{0k}(\xi) = 0$, $\Sigma_-(\xi) = T_-(\xi) = 0$. В этом случае, из (4.1) при учете принятых в (3.12) и (1.5) обозначений, получаем

$$\begin{bmatrix}\sigma_{yk}(x,0,t)\\ \tau_{xyk}(x,0,t)\end{bmatrix} = -\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{Re}\int_\Gamma \frac{1}{a_2(c)-a_1(c)}\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n-1}\begin{bmatrix}a_{3-n}(c)\\ -1\end{bmatrix}\times$$
$$\times\left(\frac{x-ct-l_*}{x-l_*}\right)^{\alpha_n(c)}\int_{-\infty}^{l_*-ct}\left(\frac{\xi'-l_*}{\xi'-l_*-ct}\right)^{-\alpha_n(c)}\frac{\Sigma_0(\xi',c)}{\xi'-x+ct}d\xi' dc \tag{4.2}$$

Многие свойства, отмеченные при рассмотрении стационарного аналога выражения (4.2) (см., например, [3]), практически без изменений переносятся на нестационарный случай и на них останавливаться не будем. Укажем только некоторые отличительные особенности решения, связанные с нестационарным характером задачи.

Определим асимптотику напряжений в вершине разреза ($x = l(t)$). Положим $l_* = l(t_*) \simeq l(t) - \dot{l}(t)(t-t_*)$ при $x \to l(t) + 0$. Тогда из уравнения (2.8), находим

$$t_* \simeq t - \frac{x-l(t)}{c-\dot{l}(t)}, \quad l(t_*) \simeq x - \frac{c(x-l(t))}{c-\dot{l}(t)}$$

Подставляя эти асимптотические равенства в (4.2), получим

$$\begin{bmatrix}\sigma_{yk}(x,0,t)\\ \tau_{xyk}(x,0,t)\end{bmatrix} = \int_{\dot{l}(t)}^{c_*}\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{c-\dot{l}(t)}{x-l(t)}t\right)^{\alpha_n(c)}\begin{bmatrix}a_{3-n}(c)\\ -1\end{bmatrix}K_n(t,c)dc \quad (x \to l(t)+0) \tag{4.3}$$

$$K_n(t,c) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{(-1)^{n-1}}{a_2(c)-a_1(c)}\int_{-\infty}^{l(t)-ct}\frac{(\xi'+ct-l(t))^{\alpha_n(c)-1}}{(l(t)-\xi')^{-\alpha_n(c)}}\Sigma_0(\xi',c)d\xi'$$

$$c_* = \max(c_{11}, c_{12}), \quad \dot{l}(t) \equiv dl/dt$$

Как видно из (4.2) и (4.3) характер напряжений существенно зависит от значений функций $\alpha_n(c)$ которые, в свою очередь, зависят от упругих постоянных, характеризующих среду. Примем для определенности, что скорости упругих волн в среде 1 и среде 2 связаны неравенствами: $c_{R1} < c_{R2} < c_{21} < c_{22} < c_{11} < c_{21}$, где c_{Rk} – скорости волн Релея; $R_k(c_{Rk}) = 0$.

Пусть $\dot{l}(t) < c_{R1}$. Рассмотрим выражение для $\alpha_n(c)$ на интервале $0 < c < c_{21}$. В этом случае из (3.8) при учете принятых в (3.3) и (2.3) обозначений, находим

$$s_n = (-1)^n\left(\frac{\gamma_{21}\omega_1}{\gamma_{11}\omega_2}\right)^{1/2}, \quad \omega_j = 1 - \frac{n_{j2}\mu_1 R_1}{n_{j1}\mu_2 R_2} \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в выражение для α_n из (3.11) (см., также, (3.9)), получаем

$$\alpha_{n*} = \frac{-1}{2\pi i} \ln \varkappa_{n*}$$

$$\varkappa_{n*} = \frac{q_1\nu - (-1)^n (1-\gamma_{21}^2)(\gamma_{11}\gamma_{21}\omega_1\omega_2)^{1/2}}{q_1\nu + (-1)^n (1-\gamma_{21}^2)(\gamma_{11}\gamma_{21}\omega_1\omega_2)^{1/2}}, \quad \nu = 1 - \frac{q_2\mu_1 R_1}{q_1\mu_2 R_2} \tag{4.5}$$

Для $c < c_{R1}$ из (4.5) находим, что $\varkappa_{n*} < 0$. Тогда учитывая выбранную в (3.11) ветвь логарифма, получаем

$$\alpha_{n*} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \ln|\varkappa_{n*}| \tag{4.6}$$

и, следовательно, напряжения при $\dot{l}(t) < c_{R1}$ в вершине разреза, как и в случае соответствующей стационарной динамической задачи [3] имеют корневую особенность вида $(x - l(t))^{-1/2}$ на которую накладываются осцилляции, обусловленные наличием мнимого слагаемого в выражении (4.6). Существенная разница здесь заключается в том, что в нестационарном случае, размер области осцилляции, как это видно из (4.2) или (4.3), зависит не только от упругих постоянных и скорости движения разреза, но и от всей предыстории нагружения и движения разреза и является нестационарной величиной.

Отметим, что осциллирующий характер решения в окрестности вершины разреза приводит к появлению участков где происходит взаимопроникание берегов разреза. С физической точки зрения это является неприемлемым, и решение в окрестности вершины нуждается в соответствующей корректировке, например, путем введения дополнительных условий контакта берегов разреза в области осцилляций [9, 10]. Но это уже требует изменений в исходной постановке задачи и выходит за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симонов И.В.* Нестационарное движение трещины поперечного сдвига по границе раздела упругих сред // ПМТФ. 1986. № 6. С. 129–138.
2. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
3. *Гольдштейн Р.В.* О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов // Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 93–102.
4. *Achenbach J.D., Bazant Z.P., Khetan R.P.* Elastodynamic neartip fields for a rapidly propagation interface crack // Intern. J. Engng. Sci. 1976. V. 14. No. 9. P. 797–809.
5. *Шмегера С.В.* Метод решения плоских начально-краевых задач динамической теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 263–274.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1958. 543 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
9. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. No. 4. P. 631–636.
10. *Симонов И.В.* Динамика трещины отрыва-сдвига на границе раздела двух упругих материалов // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 65–68.

Киев

Поступила в редакцию
5.I.1996