

УДК 539.3

© 1997 г. Л.П. ДЗЮБАК, Е.Г. ЯНЮТИН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Вопросы, связанные с исследованием нестационарных волновых процессов в элементах конструкций цилиндрической формы относятся к актуальным и сложным проблемам механики деформируемого твердого тела. Статья посвящена дальнейшему развитию численно-аналитического метода решения динамических уравнений теории упругости, при этом обеспечивается точное удовлетворение системам граничных и начальных условий.

Описанный метод решения аналогичен изложенным в [1–3].

1. Рассмотрим задачу о нестационарном осесимметричном деформировании кругового полого цилиндра конечной длины l . Пусть R_0 и R_1 – внутренний и наружный радиусы боковых поверхностей соответственно. Движение точек упругой изотропной однородной среды описывается системой дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат [4]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial (r\omega_\theta)}{\partial r}$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \Delta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

где u_r , u_z – перемещения точек упругой среды в направлениях координатных осей r и z соответственно; λ , μ – упругие постоянные Ламе, ρ – плотность материала, Δ – объемное расширение, ω_θ – проекция вектора вращения на направление θ .

Уравнения (1.1) эквивалентны следующей системе для функций $\Delta(r, z, t)$ и $\omega_\theta(r, z, t)$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \omega_\theta = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Delta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

где a , b – скорости распространения продольных и поперечных волн деформации соответственно.

На цилиндрических граничных поверхностях упругого тела задается вектор перемещения (вторая краевая задача согласно классификации, приведенной в [5]). На

плоских торцах цилиндра граничные условия могут быть сформулированы в форме третьей или четвертой краевой задачи, когда заданы соответственно нормальная составляющая вектора перемещения и касательные составляющие вектора напряжения или нормальная составляющая вектора напряжения и касательные составляющие вектора перемещения. При выполнении нулевых граничных условий на торцах в форме четвертой краевой задачи предполагается, что торцы скреплены с абсолютно гибкими плоскими мембранами, которые нерастяжимы в своей плоскости. Отметим, что форма задания на торцах цилиндра двух указанных вариантов граничных условий допускает эффективное отделение осевой координаты в решаемой начально-краевой задаче.

Используя способ разделения пространственных переменных, представим компоненты вектора перемещения, вектора вращения и объемное расширение в виде разложений в ряды Фурье по тригонометрическим функциям переменной z . Приведенная форма разложений

$$u_r(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(r, t) \sin \lambda_n z \quad (1.3)$$

$$u_z(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r, t) \cos \lambda_n z, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$$

где $\Psi_n(r, t)$, $\Phi_n(r, t)$ – функции, подлежащие определению, обеспечивает выполнение в плоскостях $z = 0, l$ граничных условий, отвечающих равенству нулю радиальных перемещений и нормальных напряжений, т.е.

$$\begin{aligned} u_r(r, z, t) &= 0 \quad \text{при } z = 0, l \\ \sigma_z(r, z, t) &= 0 \quad \text{при } z = 0, l \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если граничные условия на торцах задаются в виде равенства нулю нормальной составляющей вектора перемещений и касательного напряжения

$$\begin{aligned} u_z(r, z, t) &= 0 \quad \text{при } z = 0, l \\ \sigma_{zr}(r, z, t) &= 0 \quad \text{при } z = 0, l \end{aligned}$$

то их удовлетворение обеспечивается следующим разложением соответствующих функций:

$$u_r(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r, t) \cos \lambda_n z, \quad u_z(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r, t) \sin \lambda_n z$$

В дальнейшем, для определенности, ограничимся заданием граничных условий на торцевых поверхностях в форме (1.4). Объемное расширение Δ и компоненту вектора вращения ω_θ поэтому представим по аналогии с разложениями (1.3) рядами:

$$\Delta(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r, t) \sin \lambda_n z, \quad \omega_\theta(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(r, t) \cos \lambda_n z \quad (1.5)$$

где $A_n(r, t)$, $B_n(r, t)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Применяя к системе (1.2) преобразование Лапласа по переменной t с учетом нулевых начальных условий

$$u_r(r, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, z, t)|_{t=0} = 0$$

$$u_z(r, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}(r, z, t)|_{t=0} = 0$$

а также принимая во внимание ортогональность соответствующих тригонометриче-

ских функций, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения коэффициентов разложения в ряды Фурье (1.5) объемного расширения и вектора вращения

$$\frac{d^2 A_n^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_n^L}{dr} - \left(\frac{s^2}{a^2} + \lambda_n^2 \right) A_n^L = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2 B_n^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_n^L}{dr} - \frac{B_n^L}{r^2} - \left(\frac{s^2}{b^2} + \lambda_n^2 \right) B_n^L = 0$$

Здесь индекс (L) указывает на соответствующее изображение по Лапласу, s – параметр преобразования.

2. Решение уравнений (1.6) представляется с помощью модифицированных функций Бесселя [6]. Общие интегралы уравнений имеют следующий вид:

$$A_n^L(r, s) = C_{n1}^L(s) K_0 \left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 a^2} \right) + C_{n2}^L(s) I_0 \left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 a^2} \right)$$

$$B_n^L(r, s) = C_{n3}^L(s) K_1 \left(\frac{r}{b} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right) + C_{n4}^L(s) I_1 \left(\frac{r}{b} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right),$$

где $C_{ni}^L(s)$ ($i = \overline{1, 4}$) – произвольные функции параметра s , $I_i(z)$, $K_i(z)$ ($i = 0, 1$) – модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда i -го порядка соответственно.

Уравнения (1.1), после применения к ним преобразования Лапласа, запишутся в форме

$$u_r^L(r, z, s) = \frac{a^2}{s^2} \frac{\partial \Delta^L}{\partial r} + \frac{2b^2}{s^2} \frac{\partial \omega_\theta^L}{\partial z}$$

$$u_z^L(r, z, s) = \frac{a^2}{s^2} \frac{\partial \Delta^L}{\partial z} - \frac{2b^2}{rs^2} \frac{\partial (r\omega_\theta^L)}{\partial r}$$

Используя эти соотношения, а также разложения (1.3) и (1.5), получим в пространстве изображений дифференциальную связь между коэффициентами разложения в ряды Фурье – $\psi_n(r, t)$, $\varphi_n(r, t)$ и $A_n(r, t)$, $B_n(r, t)$ – компонентов вектора перемещения, объемного расширения и вектора вращения

$$\psi_n^L(r, s) = \frac{a^2}{s^2} \frac{dA_n^L}{dr} - \frac{2b^2 \lambda_n}{s^2} B_n^L$$

$$\varphi_n^L(r, s) = \frac{a^2 \lambda_n}{s^2} A_n^L - \frac{2b^2}{rs^2} \frac{d(rB_n^L)}{dr}$$

Для того чтобы перейти в пространство оригиналов, принимая во внимание произвол функций $C_{ni}^L(s)$ ($i = \overline{1, 4}$), выражения для коэффициентов $\psi_n^L(r, s)$ и $\varphi_n^L(r, s)$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_n^L(r, s) = & \frac{a^2}{s} \frac{d}{dr} \left\{ C_{n1}^L(s) e^{sR_0/a} K_0 \left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 a^2} \right) + C_{n2}^L(s) e^{-sR_1/a} I_0 \left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 a^2} \right) \right\} - \\ & - \frac{2b^2 \lambda_n}{s} \left\{ C_{n3}^L(s) e^{sR_0/b} K_1 \left(\frac{r}{b} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right) / \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} + \right. \\ & \left. + C_{n4}^L(s) e^{-sR_1/b} I_1 \left(\frac{r}{b} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right) / \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right\} \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n^L(r, s) = & \frac{a^2 \lambda_n}{s} \left\{ C_{n1}^L(s) e^{sR_0/a} K_0 \left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 a^2} \right) + C_{n2}^L(s) e^{-sR_1/a} I_0 \left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 a^2} \right) \right\} - \\ & \frac{2b^2}{rs} \frac{d}{dr} r C_{n3}^L(s) e^{sR_0/b} K_1 \left(\frac{r}{b} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right) / \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} + \\ & + r C_{n4}^L(s) e^{-sR_1/b} I_1 \left(\frac{r}{b} \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \right) / \sqrt{s^2 + \lambda_n^2 b^2} \end{aligned}$$

Согласно [7] имеет место следующее соответствие изображений и оригиналов:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} (s^2 + \alpha^2)^{-\nu/2} e^{-s} C_n^\nu \left(\frac{s^2}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} \right) I_{\nu+n} \left(\sqrt{s^2 + \alpha^2} \right) = \\ = L \begin{cases} (-1)^n \alpha^{1/2-\nu} (2t-t^2)^{\nu/2-1/4} C_n^\lambda(t-1) I_{\nu-1/2}(\alpha \sqrt{2t-t^2}), & 0 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{e^{\beta s} K_\nu(\beta \sqrt{s^2 + \alpha^2})}{(s^2 + \alpha^2)^{\nu/2}} = L \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^{1/2-\nu} \beta^{-\nu} (t^2 + 2\beta t)^{\nu/2-1/4} J_{\nu-1/2}(\alpha(t^2 + 2\beta t)^{1/2}) \right\} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Re} \nu > -1/2, \quad \operatorname{Im} \beta < \pi$$

где $C_n^\nu(x)$ – многочлены Гегенбауэра.

Выбирая соответствующим образом значения величин n и ν ($n=0, \nu=0; n=0, \nu=1$ в формуле (2.2) и $\nu=0, \nu=1$ в формуле (2.3)), а также используя выражения модифицированных функций Бесселя и функций Макдональда полуцелого порядка через элементарные функции, после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} e^{-s} I_0(\sqrt{s^2 + \alpha^2}) &= L \left\{ \frac{1}{\pi} H(2-t) \frac{\operatorname{ch}(\alpha \sqrt{2t-t^2})}{\sqrt{2t-t^2}} \right\} \\ e^{-s} \frac{I_1(\sqrt{s^2 + \alpha^2})}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} &= L \left\{ \frac{1}{\pi \alpha} H(2-t) \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{2t-t^2}) \right\} \\ e^{\beta s} K_0(\beta \sqrt{s^2 + \alpha^2}) &= L \left\{ \frac{\cos(\alpha \sqrt{t^2 + 2\beta t})}{\sqrt{t^2 + 2\beta t}} \right\} \\ e^{\beta s} \frac{K_1(\beta \sqrt{s^2 + \alpha^2})}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} &= L \left\{ \frac{\sin(\alpha \sqrt{t^2 + 2\beta t})}{\alpha \beta} \right\} \end{aligned}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Воспользовавшись основными свойствами преобразования Лапласа, выражения (2.1) для коэффициентов разложения перемещений представим в пространстве оригиналов в виде таких формул:

$$\begin{aligned} \Psi_n(r, t) = & a^2 \left\{ H(t_1) \int_0^{t_1} C_{n1}(\tau) P_{n2}^a(r, t_1 - \tau) d\tau + \right. \\ & + H(t_2) \int_0^{t_2} C_{n2}(\tau) P_{n1}^a(r, t_2 - \tau) d\tau \left. \right\} - 2b^2 \lambda_n \left\{ H(t_3) \int_0^{t_3} C_{n3}(\tau) G_{n2}^b(r, t_3 - \tau) d\tau + \right. \\ & \left. + H(t_4) \int_0^{t_4} C_{n4}(\tau) G_{n1}^b(r, t_4 - \tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(r, t) = & a^2 \lambda_n \left\{ H(t_1) \int_0^{t_1} C_{n1}(\tau) F_{n2}^a(r, t_1 - \tau) d\tau + \right. \\ & + H(t_2) \int_0^{t_2} C_{n2}(\tau) F_{n1}^a(r, t_2 - \tau) d\tau \left. \right\} - \frac{2b^2}{r} \left\{ H(t_3) \times \right. \\ & \times \int_0^{t_3} C_{n3}(\tau) Q_{n2}^b(r, t_3 - \tau) d\tau + H(t_4) \int_0^{t_4} C_{n4}(\tau) Q_{n1}^b(r, t_4 - \tau) d\tau \\ & t_1 = t - (r - R_0) / a, \quad t_2 = t - (R_1 - r) / a \end{aligned}$$

$$t_3 = t - (r - R_0) / b, \quad t_4 = t - (R_1 - r) / b$$

$$F_{n1}^a(r, t_2 - \tau) = \int_0^{t_2 - \tau} f_{n1}^a(r, \tau_1) d\tau_1, \quad F_{n2}^a(r, t_1 - \tau) = \int_0^{t_1 - \tau} f_{n2}^a(r, \tau_1) d\tau_1$$

$$G_{n1}^b(r, t_4 - \tau) = \int_0^{t_4 - \tau} g_{n1}^b(r, \tau_1) d\tau_1, \quad G_{n2}^b(r, t_3 - \tau) = \int_0^{t_3 - \tau} g_{n2}^b(r, \tau_1) d\tau_1$$

$$P_{n1}^a(r, t_2 - \tau) = \frac{\partial}{\partial r} F_{n1}^a(r, t_2 - \tau), \quad P_{n2}^a(r, t_1 - \tau) = \frac{\partial}{\partial r} F_{n2}^a(r, t_1 - \tau)$$

$$Q_{n1}^b(r, t_4 - \tau) = \frac{\partial}{\partial r} (r G_{n1}^b(r, t_4 - \tau)), \quad Q_{n2}^b(r, t_3 - \tau) = \frac{\partial}{\partial r} (r G_{n2}^b(r, t_3 - \tau))$$

$$f_{n1}^a(r, t) = \frac{1}{\pi} H\left(\frac{2r}{a} - t\right) \operatorname{ch}\left(a \lambda_n \sqrt{t(2r/a - t)}\right) / \sqrt{t(2r/a - t)}$$

$$f_{n2}^a(r, t) = \cos\left(a \lambda_n \sqrt{t(2r/a + t)}\right) / \sqrt{t(2r/a + t)}$$

$$g_{n1}^b(r, t) = \frac{1}{\pi r \lambda_n} H\left(\frac{2r}{b} - t\right) \operatorname{sh}\left(b \lambda_n \sqrt{t(2r/b - t)}\right)$$

$$g_{n2}^b(r, t) = \frac{1}{r \lambda_n} \sin\left(b \lambda_n \sqrt{t(2r/b + t)}\right)$$

3. Неизвестные функции $C_{ni}(t)$ ($i = \overline{1, 4}$) в выражениях для перемещений (2.4) определяются при удовлетворении граничным условиям на цилиндрических боковых поверхностях рассматриваемого тела

$$u_r(R_0, z, t) = \mu_0(z, t), \quad u_z(R_0, z, t) = \nu_0(z, t)$$

$$u_r(R_1, z, t) = \mu_1(z, t), \quad u_z(R_1, z, t) = \nu_1(z, t)$$

где $\mu_0(z, t)$, $\nu_0(z, t)$, $\mu_1(z, t)$, $\nu_1(z, t)$ – заданные функции, которые по аналогии с (1.3) разлагаются в тригонометрические ряды с коэффициентами $\mu_{0n}(t)$, $\nu_{0n}(t)$, $\mu_{1n}(t)$, $\nu_{1n}(t)$ соответственно.

Укажем, что развернутую запись выражений

$$\Psi_n(R_0, t) = \mu_{0n}(t), \quad \Phi_n(R_0, t) = \nu_{0n}(t)$$

(3.1)

$$\Psi_n(R_1, t) = \mu_{1n}(t), \quad \Phi_n(R_1, t) = \nu_{1n}(t)$$

следует рассматривать как систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода относительно функций $C_{ni}(t)$ ($i = \overline{1, 4}$).

Система (3.1) решается методом квадратур [8], основанным на замене интегралов в

уравнениях Вольтерра конечными суммами и получения аппроксимирующей алгебраической системы, при использовании формулы средних прямоугольников. Расчет перемещений и напряжений, развивающихся в цилиндре, осуществляется при переходе к дискретному времени $t_i = (i - 1)/\Delta t$ ($\Delta t = T_N/(N - 1)$), T_N – фиксированный предел интегрирования, N – количество узлов, ($i = 1, 2, \dots, N$) и определении дискретных аналогов функций $C_m(t)$ ($i = \overline{1, 4}$).

4. Результаты теоретического анализа нестационарного деформирования толсто-стенных цилиндров конечной длины могут быть использованы в различных практических приложениях. Приведенные результаты относятся к оценке деформированного состояния круглоцилиндрических матриц, которые применяются в технологических процессах импульсного формообразования тонкостенных деталей (взрывная штамповка, электрогидроимпульсная штамповка).

Моделированию технологических процессов формообразования тонкостенных деталей с использованием импульсных источников энергии посвящено большое количество публикаций, частичный обзор которых представлен в [9]. Там же приводятся решения ряда задач по численному исследованию процессов осесимметричного деформирования и контактного взаимодействия упругопластических оболочек (заготовок) с жесткими телами вращения (матрицами) при взрывной обработке заготовок. Предполагается, что заготовки деформируются в результате нестационарного давления, порождаемого подрывом сферических или шнуровидных зарядов.

В настоящее время намечено несколько путей совершенствования технологического процесса импульсного формообразования тонкостенных деталей. Один из них связан с необходимостью учета упругих нестационарных деформаций матриц, поскольку полученные при этом результаты могут быть полезными для проектирования технологической оснастки.

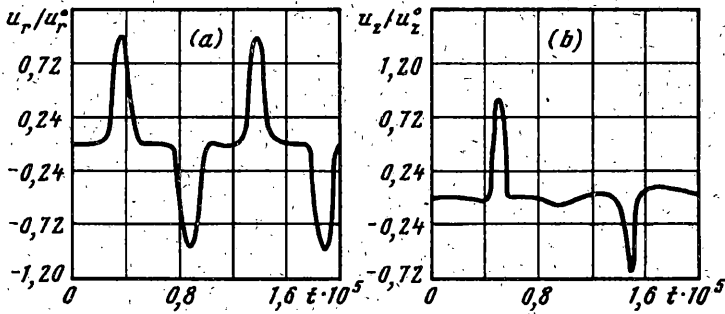
При проектировании матриц для импульсного формообразования оболочек считается перспективным закрепление на их внешней (нерабочей) стороне различных типов бандажей для исключения влияния импульсных нагрузок на окружающую среду и повышения жесткости механической системы матрица-бандаж. Применение бандажирования матрицы может обеспечивать реализацию граничных условий, отвечающих отсутствию перемещений на внешней поверхности матрицы.

Граничные условия типа (1.4) на торцах матрицы реализуются приближенно, причем это достигается за счет характера их закрепления. Матрица в торцах скрепляется через кольцевую резиновую прокладку с круговыми в плане крышками, которые выполнены в форме двухступенчатых соосных цилиндров. Радиус меньшего цилиндра равен внутреннему радиусу матрицы, а радиус большего цилиндра – внешнему радиусу матрицы. Толщина крышки в центральной ее части равна сумме значений высот двух указанных цилиндров, а ее толщина у края равна высоте цилиндра с большим радиусом. Крышка изготавливается таким образом, что ее толщина в центральной части превалирует по сравнению с толщиной у края.

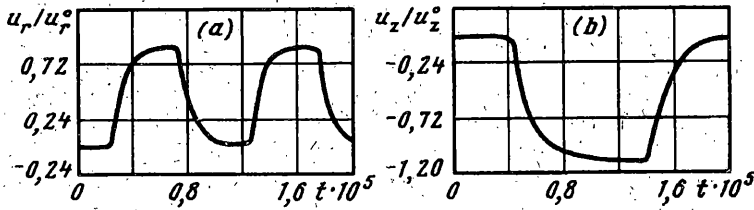
Скрепление крышки с матрицей осуществляется путем ввода цилиндра с меньшим радиусом в матрицу и прижатия крышки к торцам матрицы регулируемым усилием, приложенным в центральной части ко внешней стороне крышки.

В процессе импульсного воздействия на заготовку контакт между матрицей и крышкой может ослабевать в результате воздействия на внутреннюю поверхность крышки нестационарного давления, однако разрушение соединения должно быть исключено за счет выбора параметров импульсных технологических нагрузок и величины регулируемого усилия прижатия.

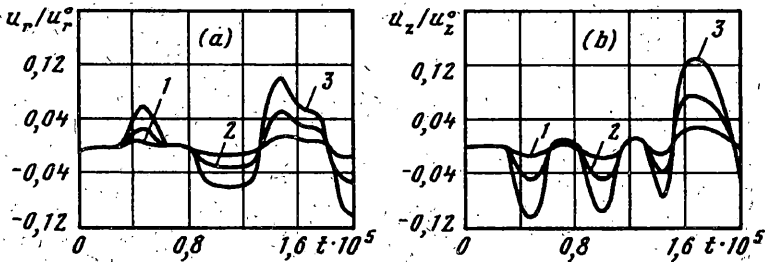
Упрощенный учет контактного взаимодействия заготовки, которая претерпевает конечные пластические деформации, с матрицей, деформирующейся упруго, можно свести к заданию на внутренней цилиндрической поверхности матрицы компонент вектора перемещения. При этом осевое перемещение обусловлено скольжением с трением заготовки по матрице, а радиальное перемещение вызвано вдавливанием заготовки в матрицу.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Процесс формообразования заготовки, как правило, состоит из нескольких этапов импульсного нагружения. Завершающий этап (калибровка заготовки) является наиболее простым для математического моделирования. Представленные ниже результаты применимы для оценок деформирования матрицы на этом этапе нагружения заготовки.

Цель приведенного численного анализа – изучение деформированного состояния полого цилиндра конечной длины, моделирующего круглоцилиндрическую матрицу, при различных вариантах задания нестационарных перемещений на его внутренней поверхности.

5. Рассмотрим численные примеры. Приведенные на фиг. 1, 2 графики иллюстрируют изменение во времени безразмерных радиальных и осевых перемещений на интервале времени $0 < t < T_N$ ($T_N = 4(R_1 - R_0)/a$). Вычисления проводились с шагом $\Delta t = 10^{-7}$ с при следующих значениях параметров: $l = 0,4$ м, $R_0 = 0,09$ м, $R_1 = 0,12$ м, $r = 0,105$ м, $\lambda = 1,187 \times 10^{11}$ Н/м², $\mu = 0,792 \times 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³.

Предполагается, что на наружной цилиндрической поверхности перемещения

отсутствуют, а на внутренней – изменяются по закону (фиг. 1, 2 соответственно):

$$u_r(R_0, z, t) = u_r^0 H(T/2 - t) \sin^2(2\pi t/T) \sin \lambda_1 z$$

$$u_z(R_0, z, t) = u_z^0 H(T/4 - t) \sin^2(4\pi t/T) \cos \lambda_1 z$$

$$u_r(R_0, z, t) = u_r^0 (I - e^{-\alpha t}) \sin \lambda_1 z$$

$$u_z(R_0, z, t) = u_z^0 (-I + e^{-\alpha t}) \cos \lambda_1 z$$

$$\alpha = 10^6 c^{-1}, \quad T = (R_1 - R_0) / a$$

Осевые перемещения вычислялись в точке $z = 0$, а радиальные – в точке $z = l/2$.

Из представленного графического материала видно, что полученные результаты описывают волновую картину деформации в цилиндрическом слое, в том числе и образование отраженных волн. Вследствие того, что скорость распространения продольных волн больше, чем поперечных, радиальные перемещения имеют большее количество минимумов и максимумов, чем осевые перемещения. Из анализа полученных результатов следует, что для рассматриваемых вариантов начально-краевой задачи теории упругости основной вклад в формирование радиальных перемещений вносят продольные волны деформации, а осевых – поперечные волны деформации.

На фиг. 3 представлены графики, характеризующие изменение перемещений в тех же точках цилиндра для различных его длин (кривой 1 соответствует длина цилиндра $l = 1, 2$ м; кривым 2, 3 – $l = 0,4$ м и $l = 0,2$ м). На внутренней и наружной цилиндрических боковых поверхностях заданы граничные условия в форме (первый и второй варианты):

$$u_r(R_0, z, t) = u_r^0 H(T/2 - t) \sin^2(2\pi t/T) \sin \lambda_1 z$$

$$u_r(R_1, z, t) = u_z(R_0, z, t) = u_z(R_1, z, t) = 0$$

$$u_z(R_0, z, t) = u_z^0 H(T/2 - t) \sin^2(2\pi t/T) \cos \lambda_1 z$$

$$u_r(R_0, z, t) = u_r(R_1, z, t) = u_z(R_1, z, t) = 0$$

Осевые и радиальные перемещения отвечают соответственно первому и второму варианту задания граничных условий. Кривые радиальных (первый вариант) и осевых (второй вариант) перемещений, соответствующих различным длинам цилиндра, практически совпадают и незначительно отличаются от кривых, приведенных на фиг. 1, поэтому они здесь не представлены. С уменьшением длины цилиндра наблюдается увеличение тех перемещений, граничные значения которых были нулевыми.

Реальные значения u_r^0 , входящие в различные варианты граничных условий, соответствующих процессу калибрования заготовки, превосходят реальные значения u_z^0 . В связи с этим на основе представленных численных результатов можно сделать вывод о том, что определяющей при оценке деформированного состояния матрицы будет компонента вектора перемещения u_r , а в тензоре напряжения будут преобладать компоненты σ_r и σ_θ , т. е. радиальные и широтные напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.И. Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 2. С. 69–72.
2. Янютин Е.Г. Контактное взаимодействие вложенных цилиндрических слоев с учетом соударений // Изв. АН СССР. МГТ. 1987. № 4. С. 162–165.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вищ. шк. 1984. 207 с.

4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: Л.: Гостехиздат. 1935. 674 с.
5. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
6. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.
7. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк. 1965. 466 с.
8. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
9. *Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Севрюков В.И., Янютин Е.Г.* Скоростное деформирование элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 190 с.

Харьков

Поступила в редакцию
10.VII.1995