

УДК 539.3

© 1997 г. С.А. ЛУРЬЕ

## **О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ**

Предлагается термодинамическая модель для описания материалов с памятью формы. Построена система определяющих уравнений, которая представляет некоторое обобщение известных соотношений в части описания фазовой диафрагмы. Предложен вариант инкрементального метода построения решения связанных нелинейных задач о деформировании элементов из материалов с памятью формы.

**1. Введение.** Проблема исследования деформирования элементов конструкции, выполненных из материалов со свойством памяти формы при термомеханических воздействиях сводится в первую очередь к формулировке определяющих уравнений. Сложность этой задачи связана с тем, что процесс деформирования существенным образом зависит от фазовых аустенитно-мартенситных (прямых) и мартенситно-аустенитных (обратных) превращений. Процесс прямого фазового превращения происходит в результате уменьшения температуры и, как правило, существенным образом зависит от напряженного состояния. Характер превращений при прямом и обратном фазовых переходах различен, так же как различны и зависимости фазовой части деформаций от объемной доли мартенсита в материнской фазе (аустените) при прямом и обратном превращениях. В целом задача представляется существенно нелинейной, связанной термомеханической проблемой. В общем случае поэтому она допускает лишь приближенное решение в приращениях. В работе предлагается термодинамическая модель исследуемых материалов, основанная на предположении о независимости при термомеханическом описании напряжений, деформаций, температуры и объемной доли мартенсита, а также на идее [1] о пропорциональности энергии диссипации скалярному параметру – объемной доле мартенситной фазы в материнской аустенитной фазе. Показано, что полученные в результате определяющие соотношения вполне соответствуют и в некотором отношении обобщают известные уравнения структурно-аналитической теории материалов со свойством памяти формы [2–5], соотношения, полученные в рамках феноменологических [6] и термодинамических моделей [7–11], а также весьма эффективные и удобные для решения конкретных задач определяющие соотношения, найденные в результате микромеханического описания [12, 13]. Предлагается алгоритм решения задач о деформировании конструктивных элементов из сплавов с памятью формы в приращениях.

**2. Термодинамические определяющие соотношения.** Нетрадиционное поведение материалов с памятью формы (МПФ) связывается в первую очередь с фазовыми аустенитно-мартенситными (прямое превращение) и мартенситно-аустенитными (обратное превращение, память формы) переходами. Термодинамические свойства описываемых материалов зависят от доли мартенситной фазы – основной характеристики аустенитно-мартенситного превращения и, следовательно, от всего процесса фазового перехода. Эта зависимость является весьма существенной, ибо абсо-

лютные значения характеристик материала в мартенситной и аустенитной фазах могут отличаться друг от друга в несколько раз.

Фазовые превращения являются следствием изменения температур, а также зависят от напряженного состояния. Для большинства сплавов, обладающих свойством памяти формы, зависимость фазовых превращений от напряженного состояния является весьма существенной, что приводит к необходимости рассматривать процесс деформирования таких материалов в связанной, физически нелинейной постановке.

Поэтому при описании термомеханического поведения МПФ будем считать, что компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  не связаны конечными соотношениями с компонентами тензора деформаций  $\epsilon_{ij}$ , а в качестве величин, которые наряду с  $\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  описывают изучаемые процессы, примем температуру  $T$  и скалярный параметр  $\xi$  ( $\xi$ , который определяет долю мартенситной фазы,  $0 < \xi < 1$ ) [1]. Полагаем, что величины  $\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $T$  и  $\xi$  являются независимыми, а соответствующие термодинамические потенциалы определяются как функции этих параметров.

Обозначим через  $\Phi$  и  $S$  термодинамический потенциал Гиббса и энтропию единицы массы представительного объема исследуемой среды

$$\Phi = \Phi(\epsilon, \sigma, \xi, T), \quad S = S(\epsilon, \sigma, \xi, T)$$

где  $\epsilon$ ,  $\sigma$  – тензоры деформаций и напряжений. Запишем первый закон термодинамики

$$d\Phi + \epsilon \cdot d\sigma + SdT = -dW \quad (2.1)$$

Здесь  $dW$  – отнесенное к единице массы некомпенсированное диссипационное тепло, связанное с необратимыми процессами.

Второй закон термодинамики дает следующее равенство

$$TdS = dQ + dW \quad (2.2)$$

где  $dQ$  – внешний приток тепла, отнесенный к единице массы среды.

В качестве основной гипотезы полагаем, что необратимый процесс определяется только процессом фазового превращения, т.е. выполняется соотношение

$$dW = \kappa \frac{d\xi}{dt} d\xi \quad (2.3)$$

где  $\kappa$  – некоторая скалярная функция параметров  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $T$ ,  $\xi$ . В частности, если в качестве реального времени протекания процесса принять величину  $\xi$ , то вместо (2.3) можем принять  $dW = \kappa d\xi$ . Из второго закона термодинамики (2.2) следует, что

$$dS = \frac{(dQ + dW)}{T} = dS_Q + dS_W$$

Здесь  $dS_Q$  следует рассматривать как прирост энтропии за счет переноса тепла,  $dS_W$  – как прирост энтропии внутри тела вследствие необратимых процессов. Величина  $S_W$  представляет особый интерес ибо позволяет описать диссипативные характеристики материалов с памятью формы. Первый закон термодинамики (2.1) перепишем в виде

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \epsilon \right) \cdot d\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} \cdot d\epsilon + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} + S \right) dT + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) d\xi = 0 \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) является следствием предположения о независимости переменных  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $T$ ,  $\xi$ . Следует иметь в виду, с другой стороны, что в случае независимости дифференциалов  $d\sigma$ ,  $d\epsilon$ ,  $dT$ ,  $d\xi$  соотношение (2.4) приводит к системе конечных соотношений, полученных приравниванием нулю множителей перед соответствующими дифференциалами. При этом уравнения определяют значения параметров. Следова-

тельно, противоречивым становится исходное предположение о независимости переменных  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $\xi$ . Чтобы избежать этих противоречий, предположим, в дальнейшем также, что дифференциалы переменных  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $T$ ,  $\xi$ , а именно величины  $d\sigma$ ,  $d\varepsilon$ ,  $dT$ ,  $d\xi$  связаны между собой системой неголономных соотношений, в которых в качестве независимых являются приращения величин  $d\sigma$ ,  $d\varepsilon$ ,  $dT$ ,  $d\xi$ . В таком случае система исходных переменных остается независимой. Дополнительную систему неголономных соотношений запишем в виде наиболее общей линейной формы дифференциалов  $d\sigma$ ,  $d\varepsilon$ ,  $dT$ ,  $d\xi$ . Последнюю естественно представить как уравнение, связывающее  $d\varepsilon$  и  $d\sigma$  и обобщающее определяющие соотношения термоупругости

$$d\varepsilon = A \cdot d\sigma + BdT + Cd\xi \quad (2.5)$$

В соотношении (2.5) приращения  $d\sigma$ ,  $d\varepsilon$ ,  $dT$ ,  $d\xi$  являются независимыми, а компоненты тензора второго ранга  $B$ ,  $C$  и тензора четвертого ранга  $A$  являются функциями системы параметров  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $\xi$ .

Для изотропного тела полагаем, что компоненты тензора податливости  $A$  и тензора коэффициентов линейного расширения  $B$  определяются соотношениями, подобными тем, что используются в термоупругости

$$A_{ij\alpha\beta} = \hat{\lambda}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \hat{\mu}(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{j\alpha}\delta_{i\beta}) \quad (2.6)$$

$$B_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial T} I_1(\sigma)\delta_{ij} + 2\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial T} \sigma_{km}\delta_{ik}\delta_{mj}$$

где  $I_1(\sigma)$  – первый инвариант тензора напряжений, величины  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\mu}$  выражаются через модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

Следует иметь в виду, что  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  в (2.6) могут являться скалярными функциями параметров  $T$  и  $\xi$ . Уравнение (2.4), имея в виду выражение (2.5), приводит к следующей системе определяющих соотношений

$$\varepsilon + \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} \cdot A = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial T} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} \cdot B + S = 0$$

и кинетическому уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} \cdot C + \kappa \frac{\partial\xi}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

Соотношения (2.6), обобщающие соответствующие выражения термомеханики, позволяют указать конкретный вид термодинамического потенциала Гиббса и энтропии, при которых уравнения (2.7) удовлетворяются тождественно. Действительно, уравнения (2.7) удовлетворяются, если принять по аналогии с термоупругостью

$$\Phi = +\hat{\lambda}/2I_1^2(\sigma) + \hat{\mu}I_2(\sigma) - \varepsilon \cdot \sigma + f(\xi, T) + s(\xi)(T - T_0)$$

$$S = -f'_T + \frac{1}{2} \frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial T} I_1^2(\sigma) + \frac{\partial\hat{\mu}}{\partial T} I_2(\sigma) - s(\xi) \quad (2.9)$$

Здесь  $I_2(\sigma)$  – второй инвариант тензора напряжений,  $I_2(\sigma) = \delta_{ij}\delta_{km}\sigma_{ik}\sigma_{jm}$ ,  $f(\xi, T)$  – некоторая скалярная функция, зависящая от  $\xi$  и  $T$ ,  $s(\xi)$  – специфическая энтропия [7].

Первое из уравнений (2.9) определяет выражение для потенциала Гиббса, найденное с точностью до функции  $f(\xi, T)$ , которая может трактоваться как внутренняя энергия, накопленная из-за взаимодействия хаотически расположенных мартенситных

образований с материнской фазой и между собой [7, 8]. Наконец, кинетическое уравнение (2.8) позволяет найти локальную скорость роста диссипаций вследствие необратимых процессов, определяемых фазовым переходом

$$dW = \Xi d\xi, \quad \Xi = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \xi} I_1^2(\sigma) - \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \xi} I_2(\sigma) - \frac{\partial f}{\partial \xi} + \sigma \cdot C + s'(\xi)(T - T_0) \quad (2.10)$$

где  $\Xi = \kappa \partial \xi / \partial t$  имеет смысл термодинамической силы, отвечающей термодинамическому потоку  $d\xi$ .

Необходимо отметить, что величина  $dW$ , деленная на  $T$ , определяет приращение плотности энтропии  $dS$  вследствие необратимых процессов, порожденных фазовыми переходами. В результате может быть найдена величина изменения плотности энтропии за полный цикл фазового превращения

$$\Delta S_W^* = \oint \frac{dW}{T} d\xi = \Delta S_1^* + \Delta S_2^* \quad (2.11)$$

$$\Delta S_1^* = \int_0^1 \frac{dW}{T} d\xi, \quad \Delta S_2^* = \int_1^0 \frac{dW}{T} d\xi.$$

Величина  $\Delta S_W^*$  может быть идентифицирована как площадь петли гистерезиса при полном цикле фазового превращения. Компоненты тензора  $C$  в выражении (2.9), (2.10) могут быть представлены, например, в виде

$$C_{ij} = \mu \delta_{ij} + \nu \Lambda_{ij} \quad (2.12)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  – скалярные функции  $T, \xi, \sigma, \epsilon$  или иначе  $T, \xi, I_i^\sigma(\sigma), I_i^\epsilon(\epsilon)$ , где  $I_i^\sigma, I_i^\epsilon$  – инварианты напряжений и деформаций соответственно;  $\Lambda_{ij}$  – некоторый тензор второго ранга, записанный через тензор напряжений либо деформаций (например,  $\Lambda_{ij} = \sigma'_{ij}$ , где  $\sigma'_{ij}$  – компоненты тензора дивергента напряжений).

Возвращаясь теперь к равенству (2.5) и учитывая соотношения (2.6), нетрудно видеть, что при  $\xi = \text{const}$  компоненты тензора деформаций определяются через напряжения по законам термоупругости. Следовательно (2.5) может быть переписано в виде

$$d\epsilon = d_{\xi = \text{const}} \epsilon_k + C d\xi \quad (2.13)$$

здесь  $\epsilon_k$  – компоненты тензора деформаций определяемые соотношениями классической термоупругости.

Второе слагаемое в (2.13) соответствует приращению фазовой деформации, определяемому фазовыми аустенитно-мартенситными превращениями. Следует отметить, что структура формул (2.13), указывающая на аддитивность выражения для полной деформации в отношении термоупругой и фазовой деформации следует, по существу, из основного предположения о независимости исходной группы переменных  $\sigma, \epsilon, \xi, T$ . Путем выбора матрицы  $C$  можно убедиться, что формулами (2.13) даются, в частности, термодинамические определяющие соотношения, построенные из других предпосылок [7, 8] и определяющие соотношения, которые были предложены в рамках структурно-аналитического подхода [2–5] и построены в результате микромеханического моделирования процесса [12].

**3. Некоторые формы определяющих уравнений.** Убедимся, что предлагаемое описание исследуемых сред в некотором частном случае в точности совпадает с термодинамической моделью, предложенной в [7, 8]. Действительно, положим в (2.13), (2.12):

$$\mu = 0, \quad \Lambda_{ij}^+ = \sigma'_{ij}, \quad \nu = \nu^+, \quad d\xi > 0$$

и

$$\mu = 0, \quad \Lambda_{ij}^- = \varepsilon'_{ij}, \quad v = v^-, \quad d\xi < 0$$

где  $\sigma'_{ij}$  и  $\varepsilon'_{ij}$  – тензоры девиатора напряжений и деформаций соответственно.

Выбирая соответствующим образом скалярные параметры функции  $v^+$  и  $v^-$  для прямого и для обратного превращений можно, в результате формулы (2.13), представить в виде [7]:

$$\dot{\varepsilon}_{ph} = \Lambda_{ij} \dot{\xi}, \quad \Lambda_{ij} = \begin{cases} v^+ \Lambda_{ij}^+ & d\xi > 0 \\ v^- \Lambda_{ij}^- & d\xi < 0 \end{cases}$$

где точкой обозначается дифференцирование по времени.

Следует отметить, что подобные соотношения не позволяют учесть явление ориентированного превращения при мартенситно-аустенитном превращении. Соотношение (2.10) предлагается [8, 10] использовать как определяющее соотношение для объемной доли фазового превращения. Сделаем предположение об изменении термоупругих характеристик материала  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\mu}$  по законам смеси, т.е.  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}^A + \xi(\hat{\lambda}^M - \hat{\lambda}^A)$ ,  $\hat{\mu} = \hat{\mu}^A + \xi(\hat{\mu}^M - \hat{\mu}^A)$ . Здесь  $\hat{\lambda}^A, \hat{\mu}^A$  – являются характеристиками аустенитной фазы,  $\hat{\lambda}^M, \hat{\mu}^M$  – характеристиками мартенситной фазы.

Тогда соотношения (2.10) совпадают с соответствующими формулами работы [7]. Причем в правой части (2.10) стоит величина  $\Delta W^*$ , которая может приниматься в качестве параметра материала. В таком случае уравнение (2.10) может быть получено как некоторый критерий, которому при фазовых превращениях подчиняется термодинамическая сила  $\Xi$ , связанная соответственно с термодинамическим потоком  $\xi$  ( $T\dot{\eta} = \Xi\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$  – скорость прироста плотности энтропии, связанной с потоком  $\xi$ ). Используя предположение, что процесс превращения идет лишь когда термодинамическая сила достигает своего критического значения  $\Xi = \Xi^*$ , можно вычислить величину  $\Delta W^*$  за полный цикл превращения

$$\Delta W^* = \oint dW d\xi = \int_0^1 \Xi^* d\xi + \int_1^0 (-\Xi^*) d\xi = 2\Xi^*$$

Величина  $\Xi^*$  (и соответственно  $\Delta W^*$ ) считается постоянной материала. Следует указать, на некоторые свойства функции  $f(\xi, T)$  в определяющем соотношении (2.10). Функция  $f(\xi, T)$ , будучи частью внутренней энергией и описывая трансформации в материале, вызванные фазовыми процессами, является базовой термодинамической величиной. Она должна подчиняться следующим условиям:

$f(\xi, T)$  – неотрицательная функция, обращается в нуль, если материал находится в аустенитном состоянии;

$f(\xi, T)$  – непрерывная функция переменной  $\xi$ , т.е. параметра процесса, включая точки возврата (точки возврата или точнее реверса процесса характерны тем, что в них меняется знак производной  $\dot{\xi}$ ). Функции  $f(\xi, T)$  могут быть различными для прямого и обратного, аустенитно-мартенситного превращения, но должны быть непрерывны в точках реверса

$$f(\xi) = \begin{cases} f^M(\xi) & d\xi > 0 \\ f^A(\xi) & d\xi < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

и

$$f^M(1) = f^A(1), \quad f^M(0) = f^A(0) = 0$$

Естественно, что функции  $f(\xi, T)$  зависят также от точек возврата, т.е.

$$f^{A,M} = f^{A,M}(\xi, \xi_0, T, T_0) \quad (3.2)$$

Если точки реверса совпадают с аустенитной и мартенситной фазой, то соответственно  $\xi_0 = 0$  и  $\xi_0 = 1$ . Обозначим  $f_0^M = f^M(\xi, \xi_0 = 0)$ ,  $f_0^A = f^A(\xi, \xi_0 = 1)$ . Тогда можно написать следующие выражения для функции  $f(\xi)$ :

$$f^M(\xi) = f_0^M(\xi) + \frac{f_0^M(1) - f_0^M(\xi)}{f_0^M(1) - f_0^M(\xi_0)} [f_0^A(\xi_0) - f_0^M(\xi_0)], \quad d\xi > 0 \quad (3.3)$$

$$f^A(\xi) = f_0^A(\xi) + \frac{f_0^A(\xi)}{f_0^A(\xi_0)} [f_0^M(\xi_0) - f_0^A(\xi_0)], \quad d\xi < 0$$

При прямом превращении ( $d\xi > 0$ )  $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ , при обратном (мартенситно-аустенитном,  $d\xi < 0$ )  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ .

Нетрудно видеть, что если функция  $f(\xi)$  подчиняется соотношениям (3.1)–(3.3), то сформулированное выше свойство этой функции выполняется.

Равенство (2.10) может служить определяющим соотношением для описания зависимости доли фазового превращения от температуры и напряженного состояния. Перепишем его в виде ( $d\xi > 0$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \sigma \cdot C + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \xi} I_1^2(\sigma) + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \xi} I_2(\sigma) - \Delta W^* + s^*(T - M_s^0) \quad (3.4)$$

где  $\Delta W^*$  – постоянная материала.

Обозначим  $\partial f / \partial \xi = \psi(\xi)$ , тогда из уравнения (3.4) найдем

$$\xi = \psi^{-1} \left[ s^*(T - M_s^0) + \sigma \cdot C + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \xi} I_1^2(\sigma) + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \xi} I_2(\sigma) - \Delta W^* \right], \quad s^* = \text{const} \quad (3.5)$$

Здесь  $\psi^{-1}$  – функция, обратная к функции  $\psi(\xi)$ ,  $M_s^0$  – температура начала фазового перехода при охлаждении в отсутствие напряжений.

Подбирая должным образом функцию  $\psi$ , можно получить различные описания фазовой диаграммы. Функция  $\psi^{-1}$  монотонно возрастает при прямом превращении. Ее аргумент, в частности, удобно представить в виде  $s(T - M_s^0) + kI(\sigma, \varepsilon)$ ,  $I(\sigma, \varepsilon)$  – некоторый инвариант. Как правило считают, что инвариант  $I$  является лишь инвариантом тензора напряжений. Тогда температура начала фазового превращения зависит от действующего напряжения  $M_s = M_s^0 + kI(\sigma)/s$ . Из (3.5) следует, что аналогичным образом зависит от напряжений температура конца превращения  $M_f$ .

Очевидно, например, что при полиномиальном описании диаграммы фазового превращения достаточно принять

$$\psi^M = b^M \xi + c^M, \quad d\xi > 0 \quad (3.6)$$

где  $b^M$  и  $c^M$  – постоянные материала.

Соответственно, чтобы получить экспоненциальную зависимость для фазовой диаграммы [6] следует принять

$$\psi^M = -b^M \ln(1 - \xi) + c^M, \quad d\xi > 0 \quad (3.7)$$

или

$$f_0^M(\xi) = b^M [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi] + c^M$$

причем постоянная  $c^M \neq 0$  [8]. Аналогично можно описать фазовую диаграмму для

обратного превращения  $d\xi < 0$ . Следует только иметь в виду что в соотношении (3.4) вместо  $\Delta W^*$  необходимо положить  $-\Delta W^*$ . Построенное выше термодинамическое описание материалов с памятью полностью соответствует и микромеханическому подходу [12]. Действительно из (2.13) следует представление  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T + \varepsilon^{ph}$ , где  $\varepsilon$  — общая деформация,  $\varepsilon^e, \varepsilon^T$  — упругая и температурная деформации. Для фазовой составляющей тензора деформации  $\varepsilon^{ph}$  можем записать  $d\varepsilon^{ph}/d\xi = C$ , где  $C$  определяется формулами (2.12).

Принимая, например, что  $C$  является линейной функцией переменных  $\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^{ph}$ , т.е. используя линейное приближение для  $C$ , получим следующие выражения для компонент тензора  $C$ :

$$C_{ij} = \mu \delta_{ij} + \nu \sigma'_{ij} + \gamma \varepsilon_{ij}^{ph}, \quad d\xi > 0$$

В результате, приходим к определяющим соотношениям, которые, имея в виду уравнение для объемной доли мартенситной фазы  $\xi$ , являются обобщением соотношений, полученных в рамках микромеханической модели [12]:

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} / d\xi = \mu \delta_{ij} + \nu \sigma'_{ij} + \gamma \varepsilon_{ij}^{ph}, \quad d\xi > 0$$

где  $\mu, \nu, \gamma$  — параметры материала. Зависимость  $\xi(\sigma, T)$  определяется формулами (3.5).

Соотношение для скорости изменения фазовой деформации, подобное по форме записанному выше, впервые, по-видимому, было приведено в работах [3–5]. Однако лишь в работах [12, 13] эти соотношения, построенные в результате микромеханического описания процесса фазового превращения, были в явной форме использованы для решения конкретных задач. Здесь необходимо отметить, что термодинамический подход позволяет предложить, вообще говоря, новую модель, в которой объемная доля мартенситной фазы зависит не только от компонентов тензора напряжений (его инвариантов), но и от смешанного инварианта, включающего тензор фазовой деформации. В результате фазовые превращения при прямом переходе могут быть изучены, например с помощью следующего соотношения:

$$\xi = \psi^{-1}[(T - M_s^0) - k\sigma_{ij}(\mu \delta_{ij} + \nu \sigma'_{ij} + \gamma \varepsilon_{ij}^{ph})]$$

Последнее равенство и, соответственно, связанный с ним анализ фазовой диаграммы требует дополнительных исследований путем идентификации модели по данным испытаний сплавов с памятью формы. Указанное обобщение представляется весьма важным, так как при прочих равных условиях может дать более детальное описание зависимости фазовой деформации и величины максимальных фазовых деформаций от температуры и условий прямого (обратного) превращения. Кроме того, в рамках такой модели можно предложить вариант определяющих соотношений в приращениях, допускающих обращение, и, следовательно, позволяющих получить единственное выражение для приращения девиатора напряжений при прямом превращении, что упрощает решение прикладных задач. При этом термодинамическое описание не только дает полную систему определяющих соотношений, необходимую для замкнутой постановки связанной нелинейной задачи деформирования, но и определяет диссипативные характеристики материала, если заданы соотношения термоупругости, закон фазовых превращений и уравнение, описывающее изменение фазовых деформаций.

**4. Система разрешающих уравнений. Некоторые частные случаи.** Запишем теперь полную систему определяющих соотношений

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T + \varepsilon^{ph}; \quad \varepsilon^e = A \cdot \sigma, \quad \varepsilon^T = BT \quad (4.1)$$

$$d\varepsilon^{ph} / d\xi = C(\sigma, \varepsilon, \xi, T), \quad \xi = \varphi(\sigma, T)$$

Функции  $C$  и  $\Phi$  для процессов прямого, аустенитно-мартенситного и обратного (мартенситно-аустенитного) превращения различны, причем  $\Phi$  в достаточно общем случае определяются зависимостями вида (3.5), а  $C$  – равенствами (2.12).

Уравнение для изменения фазовой деформации может быть записано в интегральной форме

$$\varepsilon^{ph} = \int_{\xi_0}^{\xi} C(\sigma, \varepsilon, \xi, T) d\xi \quad (4.2)$$

Напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$L(\sigma) = Q \quad (4.3)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор уравнений равновесия, а  $Q$  определяется приложенными к телу внешними усилиями.

Задача будет замкнутой, если к системе уравнений (4.1), (4.3) добавить равенства Коши и дополнительные кинематические соотношения, если речь идет об исследовании балок пластин и оболочек из сплавов с памятью формы. В целом, в общем случае задача является существенно нелинейной. Некоторые упрощения возможны для частных видов определяющих соотношений.

Рассмотрим прямое превращение. В этом случае в соответствии с данными экспериментов по прямому превращению естественно предположить, что [7, 12]:

$$d\varepsilon^{ph} / d\xi = C_0 \cdot \sigma' + C_1 \quad (4.4)$$

где  $\sigma'$  – тензор дивергенция напряжений,  $C_0(\xi)$ ,  $C_1(\xi)$  являются характеристиками материала.

Такое представление позволяет описать явление ориентированного превращения. Пусть возможно следующее представление для фазовой деформации:  $\varepsilon^{ph} = C \cdot \sigma$ ,  $C = C(\xi, T)$ . Тогда тензор деформаций можно записать в виде

$$\varepsilon = (A + C) \cdot \sigma + BT = [A(\xi(\sigma), T) + C(\xi(\sigma), T)] \cdot \sigma + B(\xi(\sigma), T)T \quad (4.5)$$

При температурном нагружении правая часть равенства (4.5) является тензорной функцией  $\sigma$ :

$$\varepsilon = \Phi(\sigma, T) \quad (4.6)$$

Если при фиксированной  $T$  уравнение (4.6) удастся разрешить относительно компонент тензора напряжений  $\sigma = \Phi^{-1}(\varepsilon)$ , то проблема сводится к нелинейной задаче термоупругости. При этом задача перестает быть связанной на этапе прямого (обратного) превращения. Подобное упрощение может быть осуществлено в одномерных задачах, когда активные участки фазовой диаграммы  $d\xi > 0$ ,  $d\xi < 0$  реализуются во всем исследуемом элементе. В противном случае задача в целом остается связанной.

В рамках классической термоупругости решается задача о деформировании элементов конструкций, если фазовые превращения не зависят от напряженного состояния  $\xi = \xi(T)$ , а выражение для фазовой деформации может быть записано в общем случае в виде свертки

$$\varepsilon^{ph} = [C(\xi, T) * \sigma(\xi)], \quad A = \text{const}, \quad B = B(\xi) \quad (4.7)$$

Тогда задача об исследовании напряженно-деформированного состояния при прямом аустенитно-мартенситном преобразовании сводится к проблеме термоупругости в пространстве трансформант Лапласа по переменной  $\xi$  [13]. Равенство (4.7) записано в матричной форме ибо по двум индексам тензора напряжений и тензора четвертого ранга  $C$  осуществляется свертка.

В общем случае здесь можно записать

$$\sigma = L^{-1}[(\hat{A} + \hat{C})^{-1} \cdot (\hat{\epsilon} - \hat{B}T)]$$

где  $L^{-1}$  – оператор обратного преобразования Лапласа.

В квадратных скобках стоят тензора, составленные из компонент соответственно тензоров  $A, C, \epsilon, B$ , преобразованных с помощью преобразования Лапласа по переменной  $\xi$ . Очевидно, что если операции дифференцирования по материальным координатам и интегрального преобразования по переменной  $\xi$  перестановочны, то, проблема прямого превращения сводится к соответствующей задаче термоупругости.

В общем случае, для решения связанной нелинейной задачи предлагается использовать инкрементальное описание. Пусть в соотношениях (2.4) компоненты тензора жесткостей  $A$  и тензора коэффициентов температурного расширения  $B$  изменяются на этапах фазового превращения при изменении параметров  $\xi, \sigma$  и  $T$ :

$$A = A[\xi(\sigma, T)], \quad B = B[\xi(\sigma, T)] \quad (4.8)$$

Получим соотношения инкрементальной теории, осуществляя линейризацию исходных уравнений по отношению к приращениям переменных  $\Delta\sigma$  и  $\Delta T$ . Имея в виду (4.8) и (2.4) получим

$$\Delta\epsilon = \hat{A} \cdot \Delta\sigma + \hat{B}\Delta T \quad (4.9)$$

$$\hat{A} = A + A_{,\xi} \cdot \xi_{,\sigma} \cdot \sigma + B_{,\xi} \cdot \xi_{,\sigma} \cdot T$$

$$\hat{B} = B + B_{,\xi} \cdot \xi_{,T} \cdot T + A_{,\xi} \cdot \xi_{,T} \cdot \sigma + C \cdot \xi_{,T}$$

Теперь, для определенности, рассмотрим задачу изгиба балок в рамках классической теории и в предположении  $\Delta T = 0$ .

Основные соотношения изгиба балки из нелинейного материала связывают изгибающий момент  $M$ , кривизну  $\kappa$  и прогиб  $\omega$ :

$$M_{,xx} + q(x) = 0, \quad M = 2 \int_0^h \sigma \cdot z dz, \quad \sigma = zE\kappa$$

где  $2h$  – высота балки единичной ширины,  $q(x)$  – поперечная нагрузка.

Для инкрементального варианта теории получаем с учетом (4.9):

$$\Delta M_{,xx} = 0 \quad (4.10)$$

$$\Delta M = I\Delta\kappa + \Delta M_0 \quad (4.11)$$

$$\Delta\epsilon = \hat{A}\Delta\sigma \quad \text{или} \quad \Delta\sigma = z\Delta\kappa / \hat{A}$$

Величина  $\Delta M_0$  вычисляется следующим образом:

$$\Delta M_0 = \kappa_0 \Delta I, \quad \Delta I = 2 \int_0^h (\Delta E) z^2 dz, \quad E = \frac{1}{\hat{A}}$$

$$\Delta E = (E_0 - E)$$

где  $\kappa_0$  и  $E_0$  – кривизна и модуль материала подсчитанные, например, для несвязанной задачи деформирования балки из материала с памятью формы.

Уравнения (4.10), (4.11) соответствуют линейно-упругой балке при наличии начального поля изгибающих моментов  $\Delta M_0$ . Соответствующий энергетический функционал при однородных граничных условиях имеет вид

$$J = \int_0^1 (-\Delta M \Delta \omega_{,xx} - \frac{\Delta M^2}{2I} + \frac{\kappa_0}{I} \Delta M \Delta I) dx \quad (4.12)$$

В смешанной формулировке метода конечного элемента следует принять

$$\Delta\omega(x) = \{\Delta\omega\}^T \{f_\omega\}, \quad \Delta M(x) = \{\Delta M\}^T \{f_M\}, \quad \Delta I(x) = \{\Delta I\}^T \{f_I\} \quad (4.13)$$

Здесь  $\{\Delta\omega\}$ ,  $\{\Delta M\}$ ,  $\{\Delta I\}$  – векторы узловых значений;  $\{f_\omega\}$ ,  $\{f_M\}$ ,  $\{f_I\}$  – соответствующие функции формы. После подстановки равенств (4.13) в функционал (4.12) и записи условий стационарности по  $\Delta\omega$ ,  $\Delta M$  получим следующее уравнение равновесия в конечной форме для приращений

$$[\Omega_{11}]\{\Delta M\} + [\Omega_{12}]\{\Delta\omega\} + [\Omega_I]\{\Delta I\} = 0, \quad [\Omega_{12}]\{\Delta M\} = 0$$

$$[\Omega_{11}] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{f_M\}\{f_M\}^T I^{-1} dx, \quad [\Omega_{12}] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{f_M\}\{f_{\omega,xx}\}^T dx$$

$$[\Omega_I] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa_0 \{f_M\}\{f_I\}^T I^{-1} dx$$

В результате расчет напряжения состояния с учетом фазовых переходов основывается на прямой итерационной схеме, когда параметры нелинейной модели подсчитываются по компонентам напряженного состояния и характеристикам фазовых превращений на предыдущем итерационном слое. В качестве начального приближения может служить несвязная задача термоупругих превращений. Упругие температурные и фазовые деформации подсчитываются в соответствии с формулами (4.1) и (3.5).

**5. Примеры.** 1. Рассмотрим пример фазового превращения в одномерной задаче. Нагруженный силой  $P$  стержень длиной  $l$ , с линейным изменением толщины  $h(x) = h_0 - (h_1 - h_0)x/l$  и единичной толщины находится первоначально в аустенитном состоянии. При уменьшении температуры в терморегуляторе развиваются значительные деформации при прямом превращении. Параметры регулятора могут изменяться за счет изменения геометрии сечения  $h(x)$ . Пусть фазовая диаграмма описывается линейными зависимостями, в которых характерные температуры  $M_s(\sigma)$ ,  $M_f(\sigma)$  одинаковым образом зависят от напряжений  $M_{s,f}(\sigma) = M_{s,f}^0 + k|\sigma|$ ,  $\sigma = P/h(x)$ ,  $M_{s,f}^0$  – характерные температуры начала и конца превращения в отсутствие напряжений,  $k$  – коэффициент влияния. Определяющее соотношение для фазовой части деформации находится в результате интегрирования уравнения (4.4) с учетом, например, степенной зависимости множителя при напряжении в правой части от  $\xi$  (далее показатель степени принимается равным 1). Полагая, для простоты, в (4.4)  $C_1 = 0$ , будем использовать следующий закон изменения фазовых деформаций:  $de^{ph}/d\xi = C_0 \cdot \sigma'$ . При интегрировании этого уравнения следует учитывать начальное условие  $e^{ph}(0) = 0$ . Максимальное значение фазовой деформации достигается при  $\xi = 1$   $e^{ph}(1) = \varepsilon_{\max}^{ph} = C_0 \sigma$ ,  $C_0$  – параметр материала.

Полная деформация определяется, как сумма упругой и фазовой составляющих

$$\varepsilon = \varepsilon^{ph} + \frac{P}{h(x)} \frac{1}{E(\xi)}$$

где модуль упругости  $E$  вычисляется по формуле смеси  $E(\xi) = E_A - \xi(E_A - E_M)$ ,  $E_A$ ,  $E_M$  – модули упругости аустенитной и мартенситной фаз.

Нетрудно описать движение фронта превращений. Для этого достаточно записать условие начала превращения

$$T - M_s^0 - k \frac{P}{h(x)} = 0$$

а условие завершения превращения

$$T - M_f^0 - k \frac{P}{h(x)} = 0$$

Следовательно, с уменьшением температуры фронт, начинаясь на левом конце ( $x = 0$ ) при  $T_s = M_s^0 + kP / h_0$ , распространяется вправо и заканчивается на правом торце при  $x = l$  при температуре  $T = kP / h_1 + M_s^0$ . Координаты фронта начала превращения соответственно могут быть вычислены по формуле

$$\frac{x}{l} = \frac{kP}{(T - M_s^0)(h_1 - h_0)} - \frac{h_0}{(h_1 - h_0)}$$

Аналогичным путем можно проследить за движением фронта завершения аустенитно-мартенситных преобразований. Нетрудно убедиться, что даже для простой одномерной термомеханической задачи по определению смещения стержня достаточно точное решение не может быть построено в несвязной постановке. Действительно, погрешность решения в несвязной постановке определяется двумя причинами. Во-первых, как видно из приведенных соотношений, длина зоны превращения при решении в связанной постановке зависит от действующих напряжений, изменяющихся с длиной балки, тогда как в несвязной задаче превращение одновременно охватывает весь стержень. Во-вторых, даже в зоне превращения погрешность вычисления фазовой части деформаций, если использовать несвязную постановку, может быть весьма значительной. В последнем нетрудно убедиться с помощью формулы

$$\Delta \varepsilon^{ph} = \varepsilon^{ph} - \varepsilon^{ph}(k=0) = k \frac{P^2}{h^2(x)} \frac{1}{(M_s - M_f)} \left[ \frac{(E_A - E_M)}{B \cdot B(k=0)} + C_0 \right]$$

$$B = E_A + (E_M - E_A) \frac{T - M_s - kP / h(x)}{M_f - M_s}$$

Следует иметь в виду, что  $E_A \sim (2-4) E_M$  и  $k \approx (0,2-0,7)$ .

Приведенные выше формулы позволяют проанализировать и явление активного превращения, когда аустенитно-мартенситные преобразования происходят при постоянной температуре только лишь в результате увеличения напряжений из-за зависимости температур начала и конца преобразований  $M_s$  и  $M_f$  от напряжений.

Не представляет труда описать и обратное преобразование (явление памяти формы) при повышении температуры через интервал мартенситно-аустенитного превращения.

2. Рассмотрим еще один пример, который иллюстрирует необычный для традиционных сплавов характер термомеханического деформирования материалов с памятью формы. Этот пример моделирует работу терморегулятора. Положим, что стержень, находясь в аустенитном состоянии, нагружается таким образом, что ему сообщается начальная деформация  $\varepsilon_0$ . Пусть далее такой стержень охлаждается через интервал аустенитно-мартенситного превращения. На этом этапе прямого превращения фазовая часть деформации начинает расти в направлении действующих растягивающих напряжений. В рамках связанной постановки найдем фазовые деформации стержня и напряжения в нем в зависимости от изменения температуры. Напряжения определяются в соответствии с формулой  $\sigma = E(\xi)(\varepsilon_0 - \varepsilon_{ph})$ , где  $E(\xi)$  — модуль упругости материала стержня как функция объемной доли мартенситной фазы  $\xi$ . Фазовая часть деформации изменяется в соответствии с равенством (4.4), которое после подстановки в него выражения для напряжений, запишется в виде

$$d\varepsilon^{ph} / d\xi = a\varepsilon_0 + b\varepsilon_{ph}$$

$$a = C_1(\xi)E(\xi), \quad b = C_0(\xi) - E(\xi)a(\xi)$$

Решение последнего уравнения, найденное при нулевых начальных условиях, имеет вид

$$\varepsilon^{ph} = \varepsilon_0 \exp(b(\xi)) \int_0^\xi a(\xi_1) \exp(-b_1(\xi_1)) d\xi_1, \quad b_1 = \int_0^\xi b(\xi) d\xi$$

$\xi$	$T^{\circ}C$	$\sigma$ (Мпа)	$\epsilon_{ph}$ (%)	$T^{\circ}C$	$\sigma$ (Мпа)	$\epsilon_{ph}$ (%)	$T^{\circ}C$	$\sigma$ (Мпа)	$\epsilon_{ph}$ (%)
0,00	60,0	84,00	0,0000	88,0	140,00	0,0000	158,0	280,00	0,0000
0,10	23,5	13,65	0,0993	28,1	22,75	0,1655	39,7	45,50	0,3310
0,20	15,0	0,03	0,1199	15,1	0,05	0,1999	15,1	0,09	0,3998
0,30	13,5	0,00	0,1293	13,5	0,00	0,2155	13,5	0,00	0,4310
0,40	12,0	0,00	0,1380	12,0	0,00	0,2300	12,0	0,00	0,4599
0,60	9,0	0,00	0,1525	9,0	0,00	0,2542	9,0	0,00	0,5083
0,80	6,0	0,00	0,1619	6,0	0,00	0,2699	6,0	0,00	0,5397
1,00	3,0	0,00	0,1652	3,0	0,00	0,2753	3,0	0,00	0,5506

Получим уравнение, определяющее параметр процесса  $\xi_0$ , при котором фазовая деформация достигнет начальной деформации, а напряжения в стержне обращаются в ноль. Для этого примем в выражении для фазовой деформации  $\epsilon_{ph} = \epsilon_0$ . Легко заметить, что полученное таким образом уравнение относительно параметра  $\xi_0$  не зависит от начальной деформации. Следовательно, доказан удивительный факт независимости параметра  $\xi_0$ , при котором напряжения в стержне становятся равными нулю, от начальной деформации, для любой зависимости модуля упругости от объемной доли мартенсита  $\xi$  и любой формы описания фазовой диаграммы. Более того, нетрудно убедиться, что и соответствующее значение температуры  $T_0$  (температура срабатывания термодатчика) также не зависит от начальной деформации и, следовательно, начального уровня напряжений в стержне. Эта характерная температура определяется лишь свойствами материала стержня (т.е. параметрами  $a(\xi)$ ,  $b(\xi)$ ). При дальнейшем уменьшении температуры фазовые деформации растут при нулевых напряжениях (ориентированное превращение). Чтобы найти напряжения и деформации в стержне для всего процесса прямого превращения в связанной постановке следует решить совместно систему уравнений, определяющих напряжения, фазовые деформации и уравнение, описывающее фазовую диаграмму  $\xi = \xi(T, I(\sigma, \epsilon))$ . Для рассматриваемой одномерной проблемы эта задача практически решается аналитически, ибо при каждом шаге изменения температуры сводится к решению трансцендентного уравнения относительно параметра процесса  $\xi$ . Здесь решение задачи проводится также с помощью инкрементального метода решения связанных задач, изложенного выше, когда на каждом шаге изменения температуры для нахождения решения используется итерационная процедура. Сравнение с аналитическим решением показывает высокую эффективность приближенного метода. Некоторые результаты решения для различных значений начальных деформаций ( $\epsilon^* = 0,0012; 0,002; 0,004$ ) приведены в таблице.

При этом было принято, что фазовая диаграмма описывается с помощью линейной зависимости,  $I(\sigma, \epsilon) = |\sigma|$  и принимаются следующие параметры материала стержня:  $a = a_0(1 - \xi)$ ,  $b = b_0(1 - \xi)$ ,  $a_0 = 25 \cdot 10^{-5} (\text{Мпа})^{-1}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $E_A = 70000 \text{ Мпа}$ ,  $E_M = 30000 \text{ Мпа}$ ,  $k = 0,5 \text{ град/Мпа}$ .

**Заключение.** Показано, что система исходных предположений, лежащих в основе предложенной термодинамической модели материалов с памятью формы позволяет не только предложить общее представление для изменения фазовой деформации, пригодное для учета явления ориентированного превращения, но и получить достаточно общее соотношение для описания фазовой диаграммы. Предложен алгоритм построения решения связанных термомеханических задач для конструктивных элементов из материалов с памятью формы. Приведенные примеры иллюстрируют особенности термомеханического деформирования таких материалов. В частности доказано, что особенности материалов с памятью формы принципиально позволяют создавать терморегуляторы, параметры которых являются стабильными, не зависят от начального напряженно-деформированного состояния, а определяются исключительно параметрами материала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И., Эглит М.Э.* Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов // ДАН СССР. Т. 142. № 1. 1961. С. 54–57.
2. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. СПб: Наука, 1993. 471 с.
3. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория пластичности материалов со свойствами памяти формы // Математические модели пластической деформации. Томск. политехн. ин-т, 1989. С. 3–11.
4. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Новая концепция прочности // Структура и свойства металлических материалов и композиций, Новгород. политехн. ин-т, 1989. С. 4–31.
5. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Теория механического поведения материалов с эффектом памяти формы // Моделирование на ЭВМ дефектов в металлах. Л.: Наука, 1990. С. 93–104.
6. *Tanaka K.* A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1990. V. 112. No. 2. P. 158–163.
7. *Bo Z., Lagoudas D.C.* A Thermodynamic constitutive model for cyclic loading of shape memory alloy materials with application to two way training // Smart Structures and Materials 1995. Proc. 1995 SPIE North American Conf. on Smart Structures and Materials, San Diego, CA, SPIE V. 2441. P. 118–128.
8. *Boyd J.G., Lagoudas D.C.* Thermomechanical response of shape memory composites // J. Intellig. Materials and Structures. 1994. V. 5. No. P. 3. 333–346.
9. *Liang C., Rogers C.A.* One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Appl. Math. Model. 1990. V. 1. No. 2. P. 207–234.
10. *Maugin G.A.* The Thermodynamics of plasticity and fracture. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 400 p.
11. *Salzbrenner R.L., Cohen M.* On the thermodynamics of thermoelastic martensitic transformations // Acta Met. 1979. V. 27. No. 5. P. 739–748.
12. *Мовчан А.А.* Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. АН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
13. *Мовчан А.А., Кузнецов А.В.* Численно-аналитический метод решения связанных задач определения напряженно-деформированного состояния для сплавов с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. 1995. Т. 1. № 2.
14. *Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П.* Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 2. С. 84–104.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XII.1996