

УДК 539.214;539.374

© 1997 г. Ю.И. КАДАШЕВИЧ, С.П. ПОМЫТКИН

**О ВЗАИМОСВЯЗИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ,
УЧИТЫВАЮЩЕЙ МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ,
С ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ**

Теория пластичности, учитывающая микронапряжения, и эндохронная теория пластичности в последнее десятилетие активно применяются для расчета сложных траекторий нагружения и решения краевых задач. Однако, в ряде публикаций [1–3] стали допускаться неточности при изложении основ теорий, которые требуют разъяснений. Кроме того, из этих работ неясно, какая же взаимосвязь существует между упомянутыми теориями. В статье излагается точка зрения авторов по указанным вопросам.

1. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения, была предложена в [4]. Затем, эта теория активно развивалась как ее авторами так и другими исследователями [5, 6]. Основной локальный закон течения выглядел следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \tau(\lambda) \frac{d\varepsilon_{ij}^n}{d\lambda} + \rho_{ij} \quad (1.1)$$

Здесь σ_{ij} – девиатор тензора напряжений, ε_{ij}^n – девиатор тензора неупругих деформаций, ρ_{ij} – девиатор тензора остаточных микронапряжений, λ – параметр нагружения (параметр Одквиста) $d\lambda = (d\varepsilon_{ij}^n d\varepsilon_{ij}^n)^{1/2}$

Тензор ρ_{ij} может иметь различную структуру. Самая простая и достаточно эффективная форма записывается следующим образом [7, 8]:

$$A \frac{d\rho_{ij}}{d\lambda} + B\rho_{ij} = C \frac{d\varepsilon_{ij}^n}{d\lambda} + D\varepsilon_{ij}^n \quad (1.2)$$

Особо выделим подход, предложенный А.А. Вакуленко в 1969 году. Согласно [9, 6], соотношения между напряжениями и деформациями можно представить следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \tau \frac{d\varepsilon_{ij}^n}{d\mu} + \int_0^\mu L(\mu - \mu') \frac{d\varepsilon_{ij}^n}{d\mu'} d\mu' \quad (1.3)$$

$$d\mu / d\lambda = 1 / f(\lambda, \lambda'), \quad \lambda' = d\lambda / dt$$

Подход А.А. Вакуленко не только обосновал теорию пластичности, учитывающую микронапряжения, но и дал новый импульс для ее развития. Так, в частности, Г. Баххауз [10] в 1972 году предложил обобщающий вариант теории пластичности, в котором тензор микронапряжений имел вид

$$\rho_{ij} = \int_0^\lambda L(\lambda, \lambda - \lambda') \frac{d\varepsilon_{ij}^n}{d\lambda'} d\lambda' \quad (1.4)$$

Это предложение несомненно находится в русле работ школы В.В. Новожилова и А.А. Вакуленко. Возможности вариантов (1.2) – (1.4) примерно эквивалентны. Если же внимательно проанализировать [1] и [2], то определяющие соотношения этих теорий тождественно совпадают с предложениями [9]. Интересные соображения о дальнейшем развитии теории течения высказаны в [11, 12], в которых фактически уточняется форма тензора микронапряжений. Каких-либо ссылок на работы В.В. Новожилова и А.А. Вакуленко в указанных работах нет. На наш взгляд, и автор работы [3], придав особо важное значение работе [10], не обратил внимания на статью [6], в которой четко доказан приоритет работ А.А. Вакуленко для указанного класса теорий. Развитие идей А.А. Вакуленко о возможности введения двух шкал термодинамического времени изложен в [6] и здесь обсуждаться не будет.

2. Попытки отказаться в теории пластичности от понятия поверхности текучести предпринимались неоднократно. Фактически еще в 1954 году А.А. Ильющин при создании общей теории упругопластических процессов [13] четко писал об этом. Одной из наиболее известных и разработанных теорий является эндохронная теория неупругости, удачно сочетающая в себе идеи общей теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина и концепцию внутреннего времени Шепери – Вакуленко.

Ниже излагаются некоторые приемы, которые позволили перейти от теории пластического течения к эндохронной теории и, наоборот, от эндохронной теории неупругости к теории пластичности, учитывающей микронапряжения.

1. В 1965 году В.Д. Ключников [14], исходя из анализа изотропной теории течения, пришел к выводу о возможности уточнения теории течения при круговых траекториях нагружения путем создания аналитической теории пластичности, не различающей активного и пассивного нагружения. Для этого оказалось достаточным исправить один коэффициент в теории течения. Вместо теории течения в форме

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} d\sigma_{ij} + \Phi(p)\sigma_{ij}u(\theta)dq$$

$$u(\theta) = \begin{cases} \cos \theta, & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

$$\cos \theta = dp / dq, \quad p = (\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}, \quad dq = (d\sigma_{ij}d\sigma_{ij})^{1/2}$$

предлагалось считать, что $u(\theta) = ((1 + \cos \theta) / 2)^\omega$, $\omega \sim 2$. К сожалению, автор свою идею в дальнейшем признал ошибочной и от своего предложения отказался. Тем не менее, аналитическая теория пластичности – так автор назвал свою теорию – несомненно ранее других явилась конкретным предложением по представлению единых определяющих соотношений в теории пластичности.

2. В 1967 году в [7] был предложен новый подход к построению теории пластичности. Было, в частности, показано, что тензорно-линейные соотношения, связывающие напряжения и пластические деформации, обладающие поверхностью текучести, обязательно содержат порядок старших производных, отличающихся на единицу

$$\sigma_{ij} = \tau d\varepsilon_{ij}^H / d\lambda + k\varepsilon_{ij}^H$$

$$\sigma_{ij} + a_1 \frac{\alpha \sigma_{ij}}{d\lambda} = b_1 \varepsilon_{ij}^H + b_2 \frac{d\varepsilon_{ij}^H}{d\lambda} + b_3 \frac{d^2 \varepsilon_{ij}^H}{d\lambda^2}$$

Поэтому было предложено добавить к теории течения малые слагаемые, которые лишают теорию течения понятия поверхности текучести. Разъяснение этой позиции приведено в [15, 16]. Таким образом, предлагается с каждой теорией течения связать теорию-спутник, не имеющую поверхности текучести и не различающую нагрузку и разгрузку:

теория течения

$$\sigma_{ij} = \tau d\varepsilon_{ij}^H / d\lambda + k\varepsilon_{ij}^H \quad (2.1)$$

эндохронная теория-спутник

$$\sigma_{ij} + \frac{\alpha\tau}{2G} \frac{d\sigma_{ij}}{dR} = \tau \frac{dR_{ij}}{dR} + rR_{ij} \quad (2.2)$$

$$R_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1 - \alpha)\sigma_{ij} / (2G), \quad dR = (dR_{ij}dR_{ij})^{1/2}$$

(Здесь α – малый параметр, R_{ij} – параметрический тензор.)

теория течения

$$\sigma_{ij} = \tau d\varepsilon_{ij}^H / d\lambda + \rho_{ij} \quad (2.3)$$

$$\rho_{ij} + a_1 \frac{d\rho_{ij}}{d\lambda} = b_1 \varepsilon_{ij}^H + b_2 \frac{d\varepsilon_{ij}^H}{d\lambda}$$

эндохронная теория-спутник

$$\sigma_{ij} + \frac{\alpha\tau}{2G} \frac{d\sigma_{ij}}{dR} = \tau \frac{dR_{ij}}{dR} + \rho_{ij} \quad (2.4)$$

$$\rho_{ij} + a_1 \frac{d\rho_{ij}}{dR} = b_1 R_{ij} + b_2 \frac{dR_{ij}}{dR}$$

Если сначала автор рассматривал только варианты с малым значением параметра α , то позднее пришел к выводу о возможности изучения и использования более сложных вариантов теории [17].

3. В 1971 году К.С. Валанис предложил достаточно простой вариант теории неупругости [18], который имел альтернативную направленность теории течения, ибо поверхности текучести теория не имела. Один из центральных вариантов теории имел вид

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dR} + a(R)\sigma_{ij} = 2G \frac{d\varepsilon_{ij}}{dR}, \quad dR = (d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij})^{1/2} \quad (2.5)$$

В более общей форме теория записывалась следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \int_0^z J(z - z') \frac{d\varepsilon_{ij}}{dz'} dz' \quad (2.6)$$

$$dz / dR = 1 / f(R), \quad dR = (d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij})^{1/2}$$

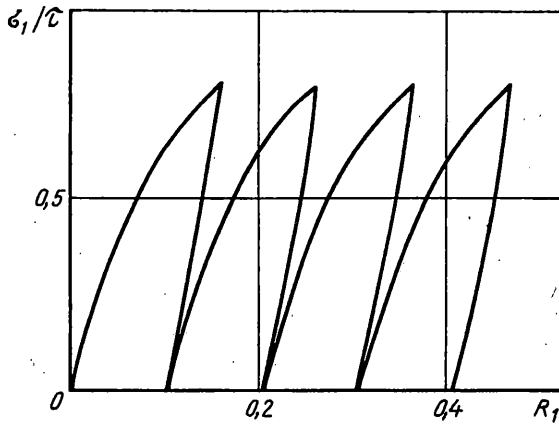
Под влиянием резкой критики теории К.С. Валанис решил уточнить теорию, введя понятие новой меры, которое оказалось очень удобным для анализа. Подходы [17, 18] стали явно сближаться, и рекомендуемая К.С. Валанисом для анализа теория стала записываться следующим образом:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dR} + a(R)\sigma_{ij} = 2G \frac{d\varepsilon_{ij}}{dR} \quad (2.7)$$

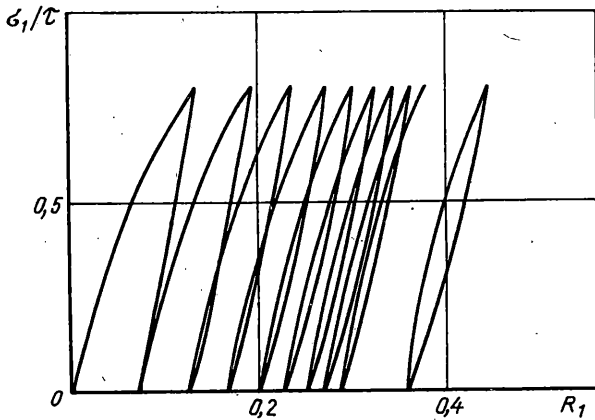
$$R_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\sigma_{ij}}{2G} \mu, \quad dR = (dR_{ij}dR_{ij})^{1/2}$$

$$\sigma_{ij} = \int_0^z J(z - z') \frac{d\varepsilon_{ij}}{dz'} dz', \quad \frac{dz}{dR} = \frac{1}{f(R)} \quad (2.8)$$

$$R_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\sigma_{ij}}{2G} \mu, \quad dR = (dR_{ij}dR_{ij})^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В дальнейшем, однако, К.С. Валанис [2] перешел к предельному случаю, когда параметр $\mu \equiv 1$. И, к сожалению, не заметил, что он тем самым фактически перешел к теории А.А. Вакуленко. Как видно из [16], целесообразно рассматривать не вариант теории с $\mu \equiv 1$, а вариант теории с параметром $\mu \rightarrow 1$. Т.е. рассматривать эндохронный вариант-спутник теории пластичности, учитывающей микронапряжения.

В 1991 году Б.С. Сарбаев [19] предложил трактовать эндохронную теорию как предельный случай теории течения, когда предел текучести стремится к нулю, а $\epsilon_{ij}^H \equiv \epsilon_{ij}$. В этом случае теория пластичности (2.1) принимает вид

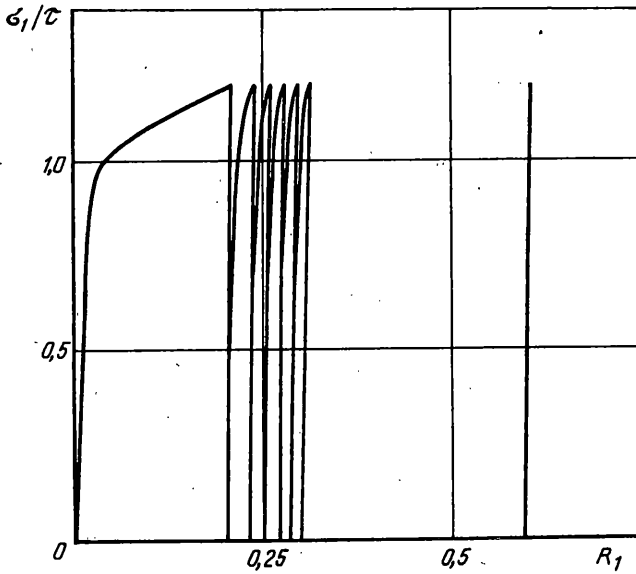
$$\sigma_{ij} / (2G) = \epsilon_{ij}$$

а теория пластичности (2.2) принимает вид

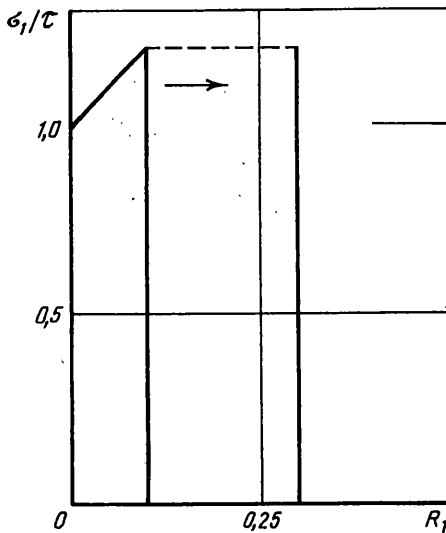
$$\sigma_{ij} + a_1 \frac{d\sigma_{ij}}{d\lambda} = b_1 + \epsilon_{ij} + b_2 \frac{d\epsilon_{ij}}{d\lambda}$$

$$d\lambda = (d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij})^{1/2}$$

Вариант А.А. Вакуленко переходит в ранний вариант теории К.С. Валаниса. Такая точка зрения вполне законна. Отметим лишь, что получающийся вариант эндохронной теории по своим возможностям значительно слабее порождающей его



Фиг. 3



Фиг. 4

теории течения, и сравнение их между собой просто нецелесообразно. Тем не менее, все упомянутые выше приемы позволяют сформулировать достаточно интересные по возможностям эндохронные варианты теории пластичности. Важно лишь то, какой рабочий вариант теории исследуется, и с каким вариантом теории пластичности, имеющей поверхность текучести, он сравнивается.

Все вышеизложенное свидетельствует о том, что эндохронная теория неупругости имеет как формальное сходство, так и принципиальное отличие от теории пластического течения. Наиболее серьезные претензии к эндохронной теории были отражены в дискуссии на страницах журнала "Механика твердого тела" в 1989 году [20, 21]. Вопрос о том, насколько эндохронная теория отвечает опытным данным по-прежнему стоит на повестке дня. Только специально поставленные опыты могут ответить на вопрос, какие же ограничения надо наложить на теорию для возможности

ее использования. Хорошо известно, что наиболее "опасными" для эндохронной теории являются циклические несимметричные нагружения. Как правило, однако, вся критика направлена против раннего варианта теории Валаниса в форме (2.5). Действительно, например, при траекториях от нулевой циклики можно "раскачать" процесс и набрать сколь угодно большие деформации (фиг. 1). Однако, более точные варианты эндохронной теории (2.2), (2.4) этим недостатком не обладают. Так, в цикле работ [22–24], А.Н. Михайлов изучил поведение ряда материалов при циклических нагружениях, в том числе, и по соотношениям типа (2.2), (2.4).

Оказалось, что специально поставленные опыты О.Г. Рыбакиной на алюминиевых образцах обнаружили наличие эффекта псевдоползучести и псевдорелаксации. Эти же эффекты были предсказаны и теоретически. Причем эти эффекты стабилизировались, и устанавливалась, в частности, предельная петля. На фиг. 1–4 приведены иллюстративные простейшие теоретические расчеты от нулевой циклики с амплитудой $0-\sigma_0$ по уравнениям (2.2). В "одномерном" случае уравнения принимают вид

$$\sigma_1 + \frac{\alpha\tau}{2G} \frac{d\sigma_1}{dR} = \pm\tau + kR_1$$

$$R_1 = \varepsilon_1 - (1-\alpha)\sigma_1 / 2G, \quad dR = |dR_1|$$

и легко интегрируются. Фиг. 1 отвечает случаю, когда значения параметров следующие: $k = 0$, $\alpha = 1$, $\tau/(2G) = 0,1$, $\sigma_0/\tau = 0,8$; фиг. 2: $k = \tau$, $\alpha = 0,1$, $\tau/(2G) = 1$, $\sigma_0/\tau = 0,8$; фиг. 3: $k = \tau$, $\alpha = 0,01$, $\tau/(2G) = 1$, $\sigma_0/\tau = 1,2$; фиг. 4: $k = 2\tau$, $\alpha = 0,001$, $\tau/(2G) = 0,01$, $\sigma_0/\tau = 1,2$. Следует особо подчеркнуть, что вариант эндохронной теории с параметром $\alpha \rightarrow 0$ в ряде случаев не совпадает с теорией пластичности, учитывающей микронапряжения, с параметром $\alpha \equiv 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-01506а). Авторы благодарят А.М. Пейсахова за помощь при проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кучер Н.К., Бородий М.В. Достоверность определяющих соотношений эндохронной теории пластичности при описании сложных траекторий деформирования // Пробл. прочности. 1989. № 7. С. 3–7.
2. Valanis K.C. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: Plasticity as a limit of the endochronic theory // Arch. of Mech. 1980. V. 32. No. 2. P. 171–191.
3. Сарбаев Б.С. Об одном варианте теории пластичности с трансляционным упрочнением // Изв. АН. МТТ. 1994. № 1. С. 65–72.
4. Кадашкевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78–89.
5. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 224 с.
6. Кадашевич Ю.И. Термодинамическое время и тензор микронапряжений в форме Вакуленко // Проблемы прочности. 1991. № 5. С. 56–58.
7. Кадашевич Ю.И. О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. № 6. С. 39–45.
8. Бондарь В.С., Фролов А.М. Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений материала при сложном нагружении // Изв. АН. СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 99–107.
9. Вакуленко А.А. К теории необратимых процессов // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1969. № 7. С. 84–90.
10. Backhaus G. Zur Analytischen Erfassung des allgemeinen Baushingereffertes // Acta Mech. 1972. V. 14. No. 1. P. 31–42.

11. *Sugiura K., Lee G.C., Chang K.C.* Endochronic theory for structural steel under nonproportional loading // *J. Eng. Mech.* 1987. V. 113. No. 12. P. 1901–1917.
12. *Watanabe O., Atluri S.N.* Constitutive modeling of cyclic plasticity and creep, using an internal time concept // *Intern. J. Plasticity.* 1986. V. 2. № 2. P. 107–134.
13. *Ильюшин А.А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // *ПММ.* 1954. Т. 18. Вып. 6. С. 641–666.
14. *Клюшников В.Д.* Аналитическая теория пластичности // *Изв. АН СССР. Механика.* 1965. № 2. С. 82–87.
15. *Калашевич Ю.И.* О новых тенденциях в развитии теории течения // *Исследования по упругости и пластичности.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. № 14. С. 15–20.
16. *Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* О соотношениях эндохронной теории пластичности с "новой" мерой внутреннего времени // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 689–694.
17. *Кадашевич Ю.И., Михайлов А.Н.* О теории пластичности, не имеющей поверхности текучести // *Докл АН СССР.* 1980. Т. 254. № 3. С. 574–576.
18. *Valanis K.C.* A theory of viscoplasticity without a yield of surface // *Arch. Mech.* 1971. V. 23. No. 4. P. 515–551.
19. *Сарбаев Б.С.* Эндохронная теория пластичности анизотропных сред // *Изв. АН. МТТ.* 1991. № 2. С. 106–116.
20. *Клюшников В.Д.* Дефекты эндохронной теории пластичности // *Изв. АН МТТ.* 1989. № 1. С. 176–179.
21. *Динариев О.Ю., Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* Письмо в редакцию // *Изв. АН. МТТ.* 1989. № 1. С. 179.
22. *Кадашевич Ю.И., Михайлов А.Н.* Моделирование процесса деформации бумаги при циклическом нагружении // *Тр. ЛТИ ЦБП.* Л., 1980. № 8. С. 127–130.
23. *Луценко А.М., Михайлов А.Н.* Расчет пластической деформации материалов при циклическом нагружении // *Станки и инструменты деревообрабатывающих производств.* Л. Ленингр. лесотех. акад, 1982. Вып. 9. С. 9–11.
24. *Луценко А.М., Михайлов А.Н.* Определяющие уравнения теории пластичности, не основанные на понятии поверхности текучести // *Новые методы расчета строительных конструкций.* Л. ЛИСИ, 1983. С. 113–117.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
21.VI.1994