МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. **А.Г. БАГДОЕВ, А.В. ШЕКОЯН**

ОТРАЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТОУПРУГОГО СЛОЯ

Выведены уравнения коротких волн для двух нелинейных пучков, распространяющихся внутри слоя магнитоупругой среды. Получено уравнение модуляции для медленно меняющихся амплитуд. Решение этих уравнений ищется в форме гауссовых пучков. Найдено аналитическое решение для падающей и отраженной от свободной границы слоя волн. Изучено явление бистабильности.

1. Вывод уравнений для двух пучков. Пусть для некоторой глубины $x = l$ магнитоупругой среды, занимающей полупространство $x \geqslant 0$ имеется квазимонохроматическая волна в виде гауссова пучка. Координата x отсчитывается по нормали к поверхности полупространства, координата y отсчитывается нормально к Ox вдоль фронта невозмущенной волны. В дальнейшем рассмотрена осесимметричная задача и y есть радиальная координата. Кроме падающей на свободную поверхность волны, имеется также отраженная волна. Покажем, что для типичной дифракционной [1] задачи, в которой имеются лишь первые и вторые гармоники и свободные члены не влияют на их уравнения, можно проводить суперпозицию волн. Для этого используем результаты [2–5], причем в отличие от [2] выбираем произвольное число уравнений и искомых функций, а также рассматриваем возможность наличия любого числа волн. Кроме того рассматривается случай трех независимых пространственных переменных и времени. Уравнения движения среды можно описывать в виде системы уравнений с гиперболическим членом в левой части

$$a_i^{jh}(u)\frac{\partial u^i}{\partial x^h} + b^j(u) = a_{il}^{jh}\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^h \partial x^l} + a_{ikl}^{jh}\frac{\partial^3 u^i}{\partial x^h \partial x^k \partial x^l} \tag{1.1}$$

$$(h = 0, 1, 2, 3, \ x^0 = t)$$

где $u = u^i$ – неизвестный вектор.

В правой части (1.1) стоят малые диссипация и дисперсия, не влияющие на уравнения в основном порядке, т.е. на характеристические уравнения. Решение (1.1) ищется в виде лучевого ряда

$$u^i = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} u_q^i(t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N, y) \tag{1.2}$$

$$\zeta_2 = t - xc_n^{-1} \quad \zeta_i = \omega\varphi_i, \quad \zeta_1 = t + xc_n^{-1}$$

где $\omega^{-1} \leqslant 1$ есть параметр возмущений, c_n – скорость волны линейной задачи, φ_i – фазовые функции, u_0 – невозмущенное решение, не зависящее от ζ_i. В [2] принято $N = 2$ и не учтена зависимость $u_q(y)$ хотя все выкладки остаются прежними. Кроме того правая часть (1.1) равна нулю. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x^h} = \left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_{\zeta} + \omega \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^h} \frac{\partial}{\partial \zeta_k}$$

и подставляя (1.2) в (1.1) получим в нулевом приближении характеристическое уравнение

$$\{A(x,p)\}_{p=\partial\varphi/\partial x} = \det\{a_i^{jh}(u_0)p_h\}_{p_h=\partial\varphi/\partial x^h} \tag{1.3}$$

Если обозначить собственные векторы уравнения (1.3) через $h_1, h_2, \ldots, h_N$, то решение (1.1) можно записать в первом и втором порядке в виде

$$u_1^i = \Gamma^m(t, \zeta_m, y) h_m^i \tag{1.4}$$

$$u_2^i = \Sigma^m(t, \zeta_1, \zeta_2, y) h_m^i \tag{1.5}$$

где Γ^m и Σ^m – произвольные функции, причем необходимо отметить, что Γ^m зависит от одного φ_m и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Подставляя (1.4) и (1.2) в (1.1), умножая на H_j^m, где H_j^m собственные векторы транспонированной матрицы к $A(x, p)$, и учитывая, что $a_i^{jh} H_j^m H_m^i \partial\varphi_m / \partial x^h = 0$ в первом порядке можно получить уравнение

$$-A_m^h \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^h} \frac{\partial \Sigma^m}{\partial \zeta_k} = E(\Gamma^m) + N_{mk}^m \Gamma^k \frac{\partial \Gamma^m}{\partial \zeta_m} + N_{km}^m \Gamma^m \frac{\partial \Gamma^k}{\partial \zeta_k} + M_k^m \Gamma^k + P_k^{mh} \frac{\partial \Gamma^k}{\partial x^h} -$$

$$-a_{il}^{jh} \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial \zeta_m^2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^h} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^l} H_j^m - a_{ikl}^{jh} \frac{\partial^3 u_1^i}{\partial \zeta_m^3} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^h} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^l} H_j^m \qquad (k \neq m)$$

$$E(\Gamma^m) = A_m^h \frac{\partial \Gamma^m}{\partial x^h} + N_{mm}^m \Gamma^m \frac{\partial \Gamma^m}{\partial \zeta_m} + M_m^m \Gamma^m$$

$$M_k^m = H_j^m \left(a_i^{jh} \frac{\partial h_k^i}{\partial x^h} + b_i^j h_k^i + \frac{\partial a_i^{jh}}{\partial u^h} h_k^h \frac{\partial u^i}{\partial x^h} \right)_0$$

$$H_{km}^m = H_j^m \frac{\partial a_i^{jk}}{\partial u^h} h_m^h h_k^i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^h}, \qquad A_m^h = h_m^i H_j^m a_i^{jh}$$

$$P_k^{mh} = H_j^m a_i^{jh} h_k^i$$

Здесь не выписаны производные по y, т.е. рассмотрено одномерное по лучу решение, хотя указанные слагаемые входят линейно в уравнения [1] и не нарушают принцип суперпозиции. Предположено, как и в [3], что средние значения Γ^m по ζ_m равны нулю, что подтверждается приводимым ниже решением для квазимонохроматической волны, в котором в основном порядке свободные члены не влияют на уравнение для первой гармоники, а средние значения первой и второй гармоник равны нулю. В силу произвола выбора компонент собственного вектора h_j^m, можно для нормальной к волне скорости частиц возмущенного движения u полагать [3] $u = u_1 - u_2$, где $\Gamma^1 = u_1$, $\Gamma^2 = u_2$, причем нелинейные члены содержат выражения

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c_n}(u_1 - u_2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2} \right)$$

С учетом того, что значения $\langle u_1 \rangle_{\zeta_1} = 0$, $\langle u_2 \rangle_{\zeta_2} = 0$ средние значения по переменным

ζ_1 и ζ_2 дают

$$\left\langle u\frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle_{\zeta_2} = c_n^{-1}u_1\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1}, \quad \left\langle u\frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle_{\zeta_1} = c_n^{-1}u_2\frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2}$$

т.е. уравнения для u_1 и u_2 разделяются и для средних значений имеют место суперпозиции решений, что не подчеркнуто в [2].

Проводя осреднение по эйконалу ζ_n можно получить

$$E(\Gamma^m) = a_{il}^{jh}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x^h}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x^l}H_j^m h_m^i\frac{\partial^2\Gamma^m}{\partial\zeta_m^2} + a_{ikl}^{jh}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x^h}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x^l}H_j^m h_m^i\frac{\partial^3\Gamma^m}{\partial\zeta_m^3}$$

Таким образом для средних по эйконалам решениям уравнения для Γ^m отделяются [2]. Проводя вычисления, подобные случаю одного эйконала [1], можно обозначить $\Gamma^1 = u_1$, $\Gamma^2 = u_2$ и выбирая $h_m^1 = 1$, $h_m^2 = -1$, получить для $u = u_1 - u_2$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t\partial\tau_{1,2}} - \frac{1}{2}L(u_{1,2}) = -c_n^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_{1,2}}\left(E\frac{\partial^{32}u_{1,2}}{\partial\tau_{1,2}^3} - D\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial\tau_{1,2}^2} + \Gamma u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial\tau_{1,2}}\right), \quad \zeta_{1,2} = -\tau_{1,2} + lc_n^{-1}$$

(1.6)

$$L = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Для рассматриваемой магнитоупругой среды и нормальной к волне напряженности магнитного поля имеют место зависимости $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_3^2 = \partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2$, $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2\partial\alpha_3 = 0$, где $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2, \alpha_3)$ – дисперсионное уравнение для падающей волны, (α_1, α_2) – компоненты волнового вектора, поскольку ось x нормальна к начальной волне (точнее к касательной плоскости к начальной волне) можно считать $\alpha_2 \approx 0$, $\alpha_1 \approx c_n^{-1}$, где c_n – нормальная скорость волны линейной задачи. Уравнения (1.6) для u_2 получены из уравнений для u_1 заменой u_1 на $-u_2$ и изменением знака c_n, поэтому окончательные уравнения для $u_{1,2}$ совпадают.

2. Уточнение коэффициентов уравнений коротких волн для магнитоупругой среды. Для одной волны коэффициенты уравнений коротких волн определены в [1] и равны для случая нормального к волне начального магнитного поля $H_y = 0$, $H_x = H_0$:

$$\begin{aligned} &c_n^2(2c_n^2 - a^2 - b^2 - a_1^2)\Gamma = \tfrac{3}{2}(c_n^2 - a^2)a_1^2 - \\ &-\rho_0^{-1}(c_n^2 - b^2 - a_1^2)(A + 3B + C + \tfrac{3}{2}\lambda_0 + 3\mu) - \\ &-\rho_0^{-1}(3\mu + \tfrac{3}{4}A + \lambda_0 + B)(c_n^2 - a^2)(c_n^2 - b^2)^{-1}a_1^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где λ_0, μ – линейные, A, B, C – нелинейные упругие модули.

$$\begin{aligned} &D_1 = c_n^2(2c_n^2 - a^2 - b^2 - a_1^2), \quad a_1^2 = H_0^2(4\pi\rho_0)^{-1} \\ &D_1 D = \tfrac{1}{2}c_n(c_n^2 - b^2 - a_1^2)(h^{(1)} + 2h^{(0)})\rho_0^{-1} + a_1^2 c_n h^{(0)}(c_n^2 - a^2)[2\rho_0(c_n^2 - b^2)]^{-1} \\ &D_1 E = \tfrac{1}{2}c_n(c_n^2 - b^2 - a_1^2)(\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(0)})\rho_0^{-1} + a_1^2 c_n\zeta^{(0)}[2\rho_0(c_n^2 - b^2)]^{-1}(c_n^2 - a^2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тензор напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^y + \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^g$, σ_{ij}^y есть нелинейный упругий тензор напряжений [1]:

$$\sigma_{ij}^b = h^{(1)}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} + h^{(0)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.3}$$

$$\sigma_{ij}^g = \zeta^{(1)}\delta_{ij}\frac{\partial^2 v_l}{\partial t\partial x_l} + \zeta^{(0)}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial t} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial t}\right) \tag{2.4}$$

Коэффициент $\partial^2\alpha_1 / \partial\alpha_2^2$ получится из уравнения

$$c_n^4 - c_n^2(a^2+b^2+a_1^2)+a^2\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}+b^2\left(a^2+a_1^2-\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}\right)=0$$

$$c_n^2=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-1}, \quad H_n=\alpha_1 H_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-1/2}$$

Для быстрой волны можно полагать при $\alpha_2 \approx 0$, $c_n \approx \alpha$:

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=-\frac{a^4-a^2b^2-a_1^2b^2}{a(a^2-b^2-a_1^2)} \tag{2.5}$$

Медленная волна [1] есть малая волна более высокого порядка и остается только быстрая волна.

В соотношениях (2.1)–(2.5), a, b – скорости продольных и поперечных волн, H_0 – невозмущенное магнитное поле.

3. Уравнения для амплитуд и фаз квазимонохроматической стационарной волны. Решение уравнений (1.6) можно искать в виде волн

$$u_{1,2}=U_{1,2}^{(0)}+U_{1,2}^{(1)}\exp(i\alpha\tau_{1,2}-i\omega t-\nu_1\alpha^2 t)+U_{1,2}^{(2)}\exp(2i\alpha\tau_{1,2}-2i\omega t-2\nu_1\alpha^2 t)+к.с. \tag{3.1}$$

$$\tau_{1,2}=\tau'_{1,2}-t+lc_n^{-1}, \quad \tau'_{1,2}=\mp xc_n^{-1}$$

где $u_{1,2}$ – компоненты нормальной к волне скорости частицы для падающей и отраженной волны, α – невозмущенная частота, ω – линейная модуляционная частота, $U_{1,2}^{(0,1,2)}$ амплитуды гармоник. В силу произвола выбора собственных компонент векторов $u_{1,2}^i$ можно полагать $h_1^1=1$, $h_2^1=-1$, $u=u_1-u_2$, что использовано при получении (1.6), которое распадается на два независимых уравнения, отличающиеся одно от другого знаком u_2, который компенсируется знаком при c_n. Таким образом уравнения (1.6) для падающей и отраженных волн совпадают.

Подставляя (2.1) в (1.6) и приравнивая слагаемые при гармониках можно получить дисперсионное соотношение из уравнения при первой гармонике в $\omega=-E\alpha^3c_n^{-1}$, $\nu_1=Dc_n^{-1}$ и уравнение первой и второй гармоник

$$(i\alpha+2\nu_1\alpha^2+3i\omega)\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial\tau'_{1,2}}-\frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left\{\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y}\right\}=$$

$$=-\Gamma(i\alpha-\nu_1\alpha^2)^2U_{1,2}^{(0)}U_{1,2}^{(1)}+\frac{\Gamma}{c_n}\alpha^2U_{1,2}^{(2)}\overline{U}_{1,2}^{(1)}\exp(-2\nu_1\alpha^2 t) \tag{3.2}$$

$$4(i\nu_1\alpha^3-3\omega\alpha)U_{1,2}^{(2)}+(2i\alpha+30i\omega+10\nu_1\alpha^2)\frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial\tau'_{1,2}}-$$

$$-\frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left\{\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(2)}}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\delta y}\right\}=\frac{2\Gamma\alpha^2}{c_n}(U_{1,2}^{(1)})^2 \tag{3.3}$$

Уравнение нулевой гармоники дает порядки $U_{1,2}^{(0)}\sim\alpha^{-1}\Gamma(U_{1,2}^{(1)})^2$. В дифракционной задаче $\partial/\partial y\sim\alpha^{1/2}$ можно рассмотреть случаи: $(a)\,\omega\sim\partial/\partial\tau'_{1,2}$, $\nu_1\alpha \ll \alpha\omega^{-1}$ и в уравнении (3.2) слагаемое $U_{1,2}^{(0)}$ можно отбросить, что оправдывает предположение о том, что в основных порядках средние значения $u_{1,2}$ по эйканалам $\tau_{1,2}$ равны нулю [2].

Тогда получатся уравнения для $U_{1,2}^{(1)}$, $U_{1,2}^{(2)}$; (*b*) $\omega \gg \partial / \partial\tau'_{1,2}$. При этом в уравнении (3.3) можно отбросить производные $U_{1,2}^{(2)}$ и получить

$$U_{1,2}^{(2)} = -\frac{\Gamma\alpha(U_{1,2}^{(1)})^2}{2c_n(3\omega - i\nu_1\alpha^2)} \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.2), можно записать

$$(i\alpha + 2\nu_1\alpha^2 + 3i\omega)\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial\tau'_{1,2}} - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left\{\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y}\right\} =$$

$$= -\frac{\Gamma^2}{2c_n^2}\alpha^3(3\omega - i\nu_1\alpha^2)^{-1}(U_{1,2}^{(1)})^2\overline{U}_{1,2}\exp(-2\nu_1\alpha^2 t) \tag{3.5}$$

где $\overline{U}_{1,2}^{(1)}$ комплексносопряжено $U_{1,2}^{(1)}$. Следует отметить, что при получении (3.5) использовано условие $\omega\tau'_{1,2} \gg 1$, и если считать $\alpha^2\nu_1 \sim \omega$ следует учитывать экспоненту в (3.2), что осложняет решение. Однако поскольку ν_1 и ω входят в виде действительной и мнимой части, можно считать, что и при $\alpha^2\nu_1 \ll \omega$ диссипация влияет на решение, что видно из дальнейшего.

Пусть невозмущенная волна, заданная при $x = l$ представляет гауссовый пучок квазимонохроматической волны с заданным значением c_n (быстрая волна):

$$u_1 = U_1^{(1)}(0)\exp(-i\alpha t - i\omega t - \nu\alpha^2 t) + к.с.$$

$$U_1^{(1)}(0) = a_0\exp\left(-y^2 y_0^{-2} + \frac{i}{2}y^2 R_0^{-1}\right)$$

Тогда можно искать решение [3, 5] в виде гауссового пучка падающей и отраженной волны $U_{1,2}^{(1)} = a\exp(i\varphi)$:

$$u_{1,2} = a_0 f_{1,2}^{-1}(\tau_{1,2}^1)\exp(i\alpha\tau_{1,2} - i\omega - \nu\alpha^2 t)\exp[i\varphi_{1,2}(\tau_{1,2}^1, y) - y^2 y_0^{-2} f_{1,2}^{-2}(\tau'_{1,2})] + к.с. \tag{3.6}$$

Подставляя [3, 6] в [3, 5] можно в осесимметричной задаче получить для $f_{1,2}(\tau'_{1,2})$ и $\varphi_{1,2}(\tau'_{1,2},\ y)$ систему уравнений, которая имеет решение

$$\varphi_{1,2}(\tau'_{1,2}, y) = \sigma_{1,2}(\tau'_{1,2}) + \frac{1}{2}y^2 R_{1,2}^{-1}$$
$$-\frac{d\sigma_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \varkappa_1\frac{K^2}{f_{1,2}^2\alpha} - \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{2}{f_{1,2}^2 y_0^2} \tag{3.7}$$

$$-\frac{1}{f_{1,2}}\frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \varkappa_2\frac{K^2}{f_{1,2}^2} + \frac{1}{\alpha\alpha_1 R_{1,2}}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} \tag{3.8}$$

$$\frac{d^2 f_{1,2}}{d\tau'^2_{1,2}} = \frac{\overline{\zeta}}{f_{1,2}^3} + \frac{2\nu_1\alpha^2 a_2\varkappa_2}{f_{1,2}}$$

$$\overline{\zeta} = -\varkappa_1\frac{4}{\alpha\alpha_1}\cdot\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\cdot\frac{a_0^2}{y_0^2} + \frac{4}{y_0^4}\left(\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^2 - \varkappa_2^2 a_0^3\alpha^{-2}$$

$$C' = \left(\frac{1}{\alpha\alpha_1 R_0}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} + \varkappa_2 a_0^2\right)^2 + \overline{\zeta}, \quad a_0 = K$$

Здесь R_0 есть значение R_1 при $x = l$:

$$\varkappa_1 = 3E\alpha^2\zeta, \quad \varkappa_2 = -D\alpha c_n\zeta, \quad \zeta = \frac{1}{2\alpha c_n}\frac{\Gamma^2 \exp(-2\nu_1\alpha^2 t)}{9E^2\alpha^2 + D^2 c_n^2}$$

где можно полагать $t \approx \tau'_{1,2} + lc_n^{-1}$.

Для малой диссипации можно считать $\nu_1\alpha^2 t \ll 1$ и уравнения (3.8) интегрируются. Для сильной диссипации $\nu_1\alpha^2 t \gg 1$ и задача становится линеаризированной. В силу симметрии можно полагать $f_2(x) = f_2(-x)$ и (3.8) дает

$-df_2(0)/dx = df_1(0)/dx$:

$$\pm f_{1,2}^{-1}\frac{df_{1,2}}{dx} = \frac{\varkappa_2}{c_n}\frac{K^2}{f_1^2} + \alpha^{-1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_1^2}R_{1,2}^{-1}$$

Тогда для $x > 0$ получится

$$c_n\frac{df_{1,2}}{dx} = (C' - \bar{\zeta}f^{-2})^{1/2}$$

$$f_{1,2}^2 = \bar{\zeta}(C')^{-1} + [(C' - \bar{\zeta})^{1/2}(C')^{-1/2} - (C')^{1/2}(l \mp x)c_n^{-1}]^2$$

Из (3.6) получится

$$A' = -\frac{2}{y_0^2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} + \varkappa_1 K^2\alpha^{-1}, \quad c_n = \frac{d\sigma_{1,2}}{dx} = \pm A' f_{1,2}^{-2}$$

Отсюда можно найти

$$\sigma_1 = \frac{A'}{\bar{\zeta}^{1/2}}\operatorname{arctg}\{[(C' - \bar{\zeta})^{1/2} - C'lc_n^{-1} + C'xc_n^{-1}]\bar{\zeta}^{1/2}\} + \sigma_{01}$$

при граничном условии $x = l$, $\sigma_1 = 0$, откуда

$$\sigma_{01} = -\frac{A'}{\bar{\zeta}^{1/2}}\operatorname{arctg}[(C' - \bar{\zeta})\bar{\zeta}^{-1}]^{1/2}$$

Для отраженного пучка можно получить

$$\sigma_2 = -\frac{A'}{\bar{\zeta}^{1/2}}\operatorname{arctg}\{[C'lc_n^{-1} + C'xc_n^{-1} - (C' - \bar{\zeta})^{1/2}]\bar{\zeta}^{-1/2}\} + \sigma_{02}$$

где σ_{02} получится из условия на поверхности $x = 0$, $\sigma_2 = \sigma_1 + \pi$ откуда получится

$$\sigma_{02} = -\frac{A'}{\bar{\zeta}^{1/2}}\operatorname{arctg}[(C' - \bar{\zeta})\bar{\zeta}^{-1}]^{1/2} + \pi$$

Окончательно при $x = l$ получится

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -\frac{A'}{\bar{\zeta}^{1/2}}\operatorname{arctg}[(C' - \bar{\zeta})\bar{\zeta}^{-1}]^{1/2} + \frac{A'}{\bar{\zeta}^{1/2}}\operatorname{arctg}\{[(C' - \bar{\zeta})^{1/2} - 2C'lc_n^{-1}]\bar{\zeta}^{-1/2}\} + \pi$$

Решение $u = u_1 - u_2$ имеет вид

$$u = 2kf^{-1}\exp(-\nu_1\alpha^2 t - y^2 y_0^{-2} f^{-2})\{\cos[\sigma_1 + \tfrac{1}{2}R_1^{-1}y^2 + \alpha c_n^{-1}(l - x) -$$

$$-(\alpha + \omega)t] - \cos[\sigma_2 + \tfrac{1}{2}R_2^{-1}y^2 + \alpha c_n^{-1}(l + x) - (\alpha + \omega)t]\}$$

$$R_2^{-1} - R_1^{-1} = -2\alpha\alpha_1 f^{-1}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^{-1}\frac{df}{dx}$$

$$(3.9)$$

$$R_1^{-1} + R_2^{-1} = -2\varkappa_2 k^2\alpha\alpha_1 f^{-2}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^{-1}$$

При выборе $(c'-\zeta_1)^{1/2}=c'lc_n^{-1}$ получим $df/dx=0$ при $x=0$ и условие $\sigma_x=0$ удовлетворяется на всей поверхности.

Указанная задача представляет стоячую волну в интерферометре со свободной нижней поверхностью и заданным в начальном сечении гауссовым пучком.

Из условий на свободной поверхности $x=0$ напряжения $\sigma'_{xy}=0$, $\sigma'_x=H_0^2(8\pi\rho_0)^{-1}$, где σ'_{ik} – компоненты максвелловского тензора

$$\sigma'_{ik}=\sigma_{ik}+H_iH_k(4\pi\rho_0)^{-1}-H^2\delta_{ik}(8\pi\rho_0)^{-1}$$

$$\sigma'_{xy}=\sigma_{xy}+H_0h_y(4\pi\rho_0)^{-1},\quad \sigma'_x=\sigma_x+H_0^2(8\pi\rho_0)^{-1}$$

и уравнения индукции

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\delta t}=(\mathbf{H}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\ \nabla)\mathbf{H}-\mathbf{H}_0 div\ \boldsymbol{v},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{h}$$

можно получить, отбрасывая малые более высокого порядка [1]: $h_x\approx 0$, $h_y\approx 0$, $\sigma_x\approx 0$, $\partial U_x/\partial x\approx 0$, $\partial U/\partial x\approx 0$ при $x=0$.

Считая функцию $f(x)$ гладкой для $x=0$, можно получить

$$l=(c')^{-1}c_n(c'-\xi_1)^{1/2}$$

Тогда получим

$$f^2=\xi_1(c')^{-1}+c'x^2c_n^{-2},\quad f_0^2=\xi_1(c')^{-1}$$

и при $x=l$, $\sigma_1=0$,

$$\sigma_1=0,\quad \sigma_2=-2A'\zeta_1^{-1/2}\operatorname{arctg}[\zeta_1^{-1/2}(c'-\zeta_1)^{1/2}]+\pi$$

Следуя [7], где рассмотрена круговая поляризация, для звуковой волны, имеющей приблизительно линейную поляризацию по оси x, можно записать аналогичные соотношения на источнике $x=l$:

$$|u_B|^2=R|u_F|^2,\quad (1-R)K_0^2=u_F^2+Ru_B^2-2R^{1/2}u_Fu_B$$

где $u_F=u_1$, $u_B=-u_2$; первое соотношение означает равенство мощности отраженной волны $|u_B|^2$ значению мощности падающей волны $|u_B|^2$, умноженной на квадрат коэффициента отражения; второе равенство есть равенство скорости частиц прямой волны u_F скорости частиц прошедшей части начальной волны $K_0(1-R)^{1/2}$ плюс скорости частиц отраженной части обратной волны [7]: $u_F=K_0(1-R)^{1/2}+u_BR^{1/2}$, $K_0=|K_0|\cos\alpha\tau$.

Для коэффициента пропускной способности интерферометра принято полагать [7]: $P=[|u_F|^2(1-R)]|K_0|^{-2}$

Поскольку $u_{F,\,B}=|u_{1,\,2}|\cos\Phi_{1,\,2}$, $\Phi_1=-\omega t+\alpha\tau_1+\sigma_1$, $\Phi_2=-\omega t+\alpha\tau_2+\sigma_2-\pi$ можно интегрируя по αt от 0 до 2π вышенаписанные уравнения, найти

$$(1-R)|K_0|^2=K^2(1-R)^2+4K^4R\sin{}^1\!/_2(\Phi_1-\Phi_2+\pi)$$

Пропускная способность примет вид

$$P=\left[1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin\frac{\Phi_1-\Phi_2+\pi}{2}\right]^{-1}$$

Сюда нужно подставить значение $\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$ при $x = l$:

$$\tfrac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2) = -\alpha l c_n^{-1} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) - \pi / 2$$

Используя формулу $l = c_n (c')^{-1} (c' - \zeta_1)^{\frac{1}{2}}$ и соотношение для интерферометра [7] $f_0^4 = \frac{1}{4} 2^2 (R^*)^{-2} (R^* - l)^2$, где R^* – радиус кривизны источника при ($x = l$), найдем $(c')^{-1} \zeta_1 = 1 - l |R_0^*|^{-1}$. Тогда для разности фаз при $x = l$ получим

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \pi / 2 = A' \zeta_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(c' l c_n^{-1} \zeta_1^{-\frac{1}{2}})$$

или

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \pi / 2 = A' \zeta_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}[l(|R_0^*| - l)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$$

Для конфокальных источников [7] $|R_0^*| = 2l$. Окончательно при $\varkappa_2 = 0$, $\partial^2 \alpha_1 / \partial \alpha_2^2 < 0$ будем иметь

$$P = K^2 (1 - R) |K_0|^{-2}, \quad P = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 (\delta - F) \right]^{-1}$$

$$\delta = -\alpha l c_n^{-1}, \quad F = \tfrac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2 + \pi) = -\alpha l c_n^{-1} - \tfrac{1}{8} \pi (2 + x')(1 + x')^{-\frac{1}{2}},$$

$$x' = -\varkappa_1 k^2 \alpha \alpha_1 y_0^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \right)^{-1}$$

Полученные соотношения дают неявное уравнение для x' и для достаточно больших K_0 получится явление бистабильности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981. 303 с.
2. *Carbonaro P.* High frequency waves in quasilinear invisid gasodinamics // ZAMP. 1986. V. 37. No 1. P. 43–52.
3. *Канер В.В., Руденко О.В.* О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах // Вестн. МГУ. Сер. Физическая астрономия. 1978. Т. 19. № 4. С. 78–85.
4. *Hunter Y.K., Keller J.B.* Weakly nonlinear high frequency waves // Communica. on pure appl. mathem. 1983. No 5. P. 547–558.
5. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды // Изв. АН АрмССР. Механика. 1991. Т. 44. № 1. С. 28–36.
6. *Шекоян А.В.* Отражение гауссовского пучка от свободной поверхности в нелинейной вязкоупругой среде с внутренними осцилляциями // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмСССР, 1990. С. 283–287.
7. *Marburger J.H., Felber F.S.* Theory of las less nonlinear Fabry Perot interferometer // Phys. Rev. A. 1978. V. 17. No 1. P. 335–342.

Ереван

Поступила в редакцию
21.VI.1995