

УДК 539.3

© 1997 г. Д.Д. АСАНЯН, Г.Е. БАГДАСАРЯН

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
 МАГНИТОУПРУГОГО СЛОЯ С ТРЕЩИНОЙ,
 ОБУСЛОВЛЕННОЕ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

Решается задача о нахождении напряженно-деформированного состояния однородного магнитомягкого слоя с трещиной, находящегося с постоянным поперечном магнитном поле. Определены основные характеристики напряженно-деформированного состояния и индуцированного магнитного поля, исследованы их особенности около трещины.

1. Постановка задачи. Пусть в магнитоупругом ферромагнитном слое толщиной $2h$ имеется прямолинейная туннельная трещина шириной $2a$, берега которой свободны от внешних механических нагрузок. Прямоугольная система декартовых координат выбрана так, что поперечное сечение трещины находится в плоскости xOy и занимает тонкую область $\Omega^* = \{|x| < a; y = 0; |z| < \infty\}$ около отрезка $(-a, a)$ координатной оси x . Слой, материал которого является изотропным, однородным и магнитным, занимает область $\Omega = \{|x| < \infty; |y| \leq 1; |z| < \infty\} / \Omega^*$ и помещен в постоянное магнитное поле $B_0(0, B_0, 0)$ (фиг. 1). Внешняя по отношению к слою среда, занимающая область $\Omega_e = \{|y| > h; |x| < \infty; |z| < \infty\}$, является вакуумом.

Вследствие того, что магнитная проницаемость материала слоя μ_r отлична от единицы ($\mu_r \gg 1$), на берегах трещины компоненты тензора магнитоупругих напряжений терпят разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления P_0 , действующего на берегах трещины.

Под действием нагрузки P_0 и объемных сил магнитного происхождения, появляющихся вследствие деформации тела, в слое устанавливается невозмущенное плоское напряженно-деформированное состояние. Используя результаты [1] и предполагая, что все искомые величины не зависят от пространственной координаты z и времени t , получим следующие линейные уравнения и граничные условия, определяющие магнитоупругие характеристики возмущенного состояния:

уравнения магнитоупругости во внутренней области слоя $((x, y, z) \in \Omega)$:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu}(u_{i,1} + u_{2,2}) + \frac{2\chi B_0}{\mu\mu_r} \Phi_{,i2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$$f_{,i} \equiv \partial f / \partial x_i \quad (x_1 = x, \quad x_2 = y)$$

$$\text{уравнения магнитостатики: } (x, y, z) \in \Omega_e \cup \Omega^* \text{ при } \Delta \Phi^{(e)} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{граничные условия на плоскостях } y = \pm h; |x| < \infty:$$

$$u_i(x, \pm h) = Q_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

$$\Phi_{,2}^{(e)}(x, \pm h \pm 0) = \mu_r \Phi_{,2}(x, \pm h \mp 0) \quad (1.4)$$

$$\Phi_{,1}^{(e)}(x, \pm h \pm 0) = \Phi_{,1}(x, \pm h \mp 0) - \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\chi}{\mu_r} u_{2,1}(x, \pm h \mp 0) \quad (1.5)$$

граничные условия на плоскости $y = 0$:

$$u_{2,1}(x, +0) = 0, \quad \Phi_{,1}(x, +0) = 0 \quad \text{при } |x| > a \quad (1.6)$$

$$t_{12}(x, +0) + t_{12}^{\mu}(x, +0) = -\frac{2\chi B_0}{\mu \mu_r} \Phi_{,1}(x, +0) \quad \text{при } |x| < \infty \quad (1.7)$$

$$\Phi_{,1}(x, +0) = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\chi}{\mu_r} u_{2,1}(x, +0) \quad \text{при } |x| < a \quad (1.8)$$

$$t_{22}(x, +0) + t_{22}^{\mu}(x, +0) = t_{22}^{\mu(e)}(x, +0) \quad \text{при } |x| < a \quad (1.9)$$

условия на бесконечности:

$$\Phi^{(e)}(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0 \chi (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) \quad (1.11)$$

$$t_{ij}^{\mu} = B_{0i} h_j + B_{0j} h_i - \delta_{ij} \mu_0 H_{0k} h_k \quad (1.12)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{h} = \text{grad } \Phi, \quad \mathbf{h}^{(e)} = \text{grad } \Phi^{(e)}, \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (1.14)$$

где $u_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) – компоненты вектора упругих перемещений, $\Phi^{(e)}$ и Φ – потенциалы индуцированного магнитного поля соответственно в вакууме и среде, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – двумерный оператор Лапласа, λ и μ – постоянные Ляме, ν – коэффициент Пуассона, $\chi = \mu_r + 1$ – магнитная восприимчивость среды, μ_0 – абсолютная магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ г/м); Q_i ($i = 1, 2$) – заданные значения упругих перемещений границ $y = \pm h$. Заметим, что плоскость $y = 0$ является плоскостью симметрии, т.е.

$$u_2(x, y) = u_2(x, -y), \quad u_1(x, y) = -u_1(x, -y) \quad (1.15)$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, -y), \quad \Phi^{(e)}(x, y) = \Phi^{(e)}(x, -y)$$

По этой причине задачу будем решать в областях $\Omega_1 = \{-h < y < 0, |x| < \infty\}$ и $\Omega_{e1} = \{-\infty < y < -h, |x| < \infty\}$.

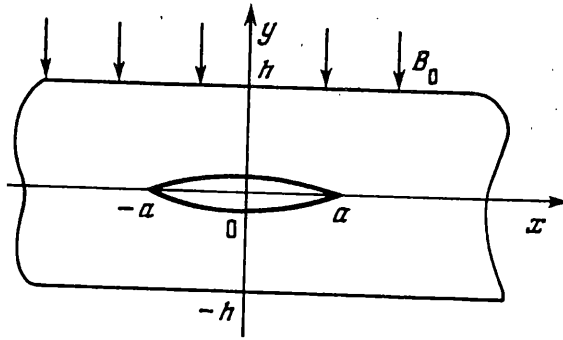
2. Интегральное уравнение задачи. Решение задачи (1.1), (1.2) с учетом условия на бесконечности (1.10) представим в виде

в области Ω_1 :

$$\Phi(x, y) = \frac{B_0}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(\alpha) e^{-\varepsilon|\alpha|y} + A_6(\alpha) e^{\varepsilon|\alpha|y}] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.1)$$

$$u_1(x, y) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha|}{\alpha} \left\{ -[A_1(\alpha) + (\varepsilon|\alpha|y - 3 + 4\nu) \times \right. \\ \left. \times \frac{A_2(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_1 A_3(\alpha)] e^{-\varepsilon|\alpha|y} + [A_4(\alpha) + (\varepsilon|\alpha|y + 3 - 4\nu) \frac{A_5(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_1 A_6(\alpha)] e^{\varepsilon|\alpha|y} \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [A_1(\alpha) + \varepsilon y A_2(\alpha)] e^{-\varepsilon|\alpha|y} + [A_4(\alpha) + \varepsilon y A_5(\alpha)] \times \right. \\ \left. \times e^{\varepsilon|\alpha|y} \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad \gamma_1 = 2(1 - 2\nu) B_0^2 \chi / (\mu, \mu \mu_r)$$



Фиг. 1

в области Ω_{e1} :

$$\Phi^{(e)}(x, y) = \frac{B_0}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} A_7(\alpha) e^{|\alpha|y} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.2)$$

Учитывая условия симметрии (1.15), можно написать решение задачи (1.1), (1.2) в областях Ω/Ω_1 и Ω_e/Ω_{e1} . Функции $A_i(\alpha)$ ($i = \overline{1, 7}$), входящие в (1.16) и (1.7), определяются из граничных условий (1.3)–(1.9). Из (1.11)–(1.14) с учетом (1.16), (1.17) магнитоупругие напряжения t_{ij} и максвелловские напряжения t_{ij}^{μ} можно представить в виде:

$$\frac{t_{12}^{\mu}}{\mu} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha) [A_3(\alpha) e^{-\varepsilon|\alpha|y} + A_6(\alpha) e^{\varepsilon|\alpha|y}] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.3)$$

$$\frac{t_{22}^{\mu}}{\mu} = \frac{(2\mu_r - 1)B_0^2}{2\mu_0 \mu \mu_r^2} \left\{ 1 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha [-A_3(\alpha) e^{-\varepsilon|\alpha|y} + A_6(\alpha) e^{\varepsilon|\alpha|y}] e^{-i\alpha x} d\alpha \right\}$$

$$\frac{t_{12}(x, y)}{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha) \left\{ \left[2A_1(\alpha) + (2\varepsilon|\alpha|y - 4 + 4\nu) \frac{A_2(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_2 A_3(\alpha) \right] e^{-\varepsilon|\alpha|y} + \left[2A_4(\alpha) + (2\varepsilon|\alpha|y + 4 - 4\nu) \frac{A_5(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_2 A_6(\alpha) \right] e^{\varepsilon|\alpha|y} \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$\frac{t_{22}(x, y)}{\mu} = \gamma_0 + \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| \left\{ \left[-2A_1(\alpha) + (-2\varepsilon|\alpha|y + 2 - 4\nu) \frac{A_2(\alpha)}{|\alpha|} - \gamma_1 A_3(\alpha) \right] e^{-\varepsilon|\alpha|y} + \left[2A_4(\alpha) + (2\varepsilon|\alpha|y + 2 - 4\nu) \frac{A_5(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_1 A_6(\alpha) \right] e^{\varepsilon|\alpha|y} \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$\gamma_0 = \chi B_0^2 / (\mu_0 \mu \mu_r^2), \quad \gamma_2 = (3 - 4\nu) \chi B_0^2 / (\mu_0 \mu \mu_r^2)$$

Аналогичным образом можно привести выражение для $t_{11}(x, y)$ и $t_{11}^{\mu}(x, y)$. Для удобства в дальнейшем будут использованы следующие безразмерные величины:

$$\alpha = \alpha' / a, \quad y = hy', \quad x = ax', \quad u = au', \quad h = B_0 h' / \mu_0 \quad (2.4)$$

$$A_i(\alpha) = A_i'(\alpha) / a \quad (i = 1, 3, 4); \quad A_i(\alpha) = A_i'(\alpha) \quad (i = 2, 5, 6, 7); \quad \varepsilon = h / a$$

Далее штрихи у соответствующих величин будут опущены.

Перейдем к определению неизвестных функций $A_i(\alpha)$ ($i = \overline{1,7}$) путем удовлетворения граничных условий. Для этой цели с учетом (2.4) введем следующие обозначения:

$$u_{2,1}(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } |x| < 1 \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\Phi_{,1}(x, 0) = q(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } |x| < 1 \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Используя граничные условия (1.6), можно показать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x) \quad (2.7)$$

Подставляя (2.1) и (2.3) в граничные условия (1.3)–(1.7) и учитывая (2.5), (2.6), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\hat{A}x = \Phi \quad (2.8)$$

Эти уравнения позволяют выразить неизвестные функции $A_i(\alpha)$ ($i = \overline{1,7}$) через новые неизвестные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Матрица \hat{A} , векторы x и Φ , входящие в (2.8), имеют

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha e^{|\alpha|} & (-\varepsilon|\alpha| - 3 + 4\nu)e^{|\alpha|} & \frac{|\alpha|}{2} \gamma_1 e^{|\alpha|} & -|\alpha| e^{-|\alpha|} & (\varepsilon|\alpha| - 3 + 4\nu)e^{-|\alpha|} & -\frac{|\alpha|}{2} \gamma_1 e^{-|\alpha|} & 0 \\ |\alpha| e^{|\alpha|} & -\varepsilon|\alpha| e^{|\alpha|} & 0 & |\alpha| e^{-|\alpha|} & -\varepsilon|\alpha| e^{-|\alpha|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r |\alpha| e^{|\alpha|} & 0 & 0 & \mu_r |\alpha| e^{|\alpha|} & |\alpha| e^{-|\alpha|} \\ 0 & 0 & |\alpha| e^{|\alpha|} & 0 & 0 & |\alpha| e^{-|\alpha|} & -|\alpha| e^{-|\alpha|} \\ 4|\alpha| & -8(1-\nu) & 2\beta|\alpha| & 4|\alpha| & 8(1-\nu) & 2\beta|\alpha| & 0 \\ 2|\alpha| & 0 & 0 & 2|\alpha| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|\alpha| & 2|\alpha| & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\alpha) \\ \Phi_2(\alpha) \\ \vdots \\ \Phi_7(\alpha) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} A_1(\alpha) \\ A_2(\alpha) \\ \vdots \\ A_7(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu} \frac{4\mu_r(1-\nu) - 3 + 4\nu}{\mu_r}$$

$$\Phi_1(\alpha) = \tilde{Q}_1(\alpha), \quad \Phi_2(\alpha) = -\frac{|\alpha|}{\alpha i} \tilde{Q}_2(\alpha), \quad \Phi_3(\alpha) = 0$$

$$\Phi_4(\alpha) = -\frac{\chi}{\mu_r} \frac{|\alpha|}{\alpha i}, \quad \Phi_5(\alpha) = 0, \quad \Phi_6(\alpha) = -\frac{|\alpha|}{\alpha i} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(s) e^{i\alpha s} ds$$

$$\Phi_7(\alpha) = -\frac{|\alpha|}{\alpha i} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \psi(s) e^{i\alpha s} ds, \quad \tilde{Q}_i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_i(x) e^{i\alpha x} dx \quad (i = 1, 2)$$

Предполагая, что $\det \hat{A} \neq 0$ из (2.8), найдем

$$A_i(\alpha) = \sum_{k=1}^7 b_{ik}(\alpha) \Phi_k(\alpha) \quad (i = \overline{1,7}) \quad (2.9)$$

где b_{ik} – элементы обратной матрицы к \hat{A} .

Таким образом, все неизвестные $A_i(\alpha)$ ($i = \overline{1,7}$) выражены через две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые должны определяться из граничных условий (1.8), (1.9). Подставляя (2.9) в граничные условия (1.8), (1.9), с учетом (2.4) получим следующую систему

уравнений относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \varphi(t) K_0 \left(\frac{t-x}{\varepsilon} \right) dt = Q_0 - g(x), \quad |x| < 1 \quad (2.10)$$

$$\psi(x) = \chi \varphi(x) / \mu_r$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_i(t) T_i(t-x) dt, \quad T_i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_i(\varepsilon \alpha) e^{i\alpha s} d\alpha \quad (i=1,2)$$

$$\tilde{T}_1(t) = \frac{4(1-2\nu) \operatorname{sh} t - 4t \operatorname{ch} t}{2t - (3-4\nu) \operatorname{sh} 2t}, \quad Q_0 = \frac{b_c^2 \mu_r^2 - 4\mu_r + 3}{2 \mu_r^2}, \quad b_c^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu}$$

$$\tilde{T}_2(t) = \frac{|t| b_c^2}{it \operatorname{ch} t} + \frac{1}{i} \frac{-4t \operatorname{sh} t + (7-15\nu) \operatorname{ch} t}{2t - (3-4\nu) \operatorname{sh} 2t}$$

$$K_0(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{1-\nu} + \mu_r b_c^2 \right) \operatorname{th} \alpha + K(\alpha) \right\} e^{i\alpha s} d\alpha \quad (2.11)$$

$$K(\alpha) = \frac{(b_c^2 - 1)[(3-4\nu) \operatorname{sh} 2\alpha + 2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha] - 2(2b_c^2 + 1)\alpha^2 \operatorname{sh} 2\alpha - 8(1-\nu)^2 \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha[-2\alpha + (3-4\nu) \operatorname{sh} 2\alpha]} \quad (2.12)$$

При получении (2.10)–(2.12) было предположено, что $\mu_r - 1 \approx \mu_r, b_c^2 \ll 1$, поскольку для основных ферромагнитных материалов [2] значение μ_r меняется в пределах 10^2 – 10^5 .

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения (2.10) при условии (2.7).

Зная функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (2.9), можно определить $A_i(\alpha)$, с помощью которых по формулам (2.1)–(2.3) восстанавливаются магнитоупругие перемещения $u_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) и магнитоупругие напряжения $t_{ij}(x, y)$ ($i, j = 1, 2$). В частности, для $t_{22}(x, y)$ на линии $y = 0$ будем иметь

$$\frac{t_{22}(x, 0)}{\mu} = \gamma_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \varphi(t) K_1 \left(\frac{t-x}{\varepsilon} \right) dt + \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.13)$$

$$G(\alpha) = -4\tilde{Q}_1(\alpha) b_{11}(\alpha) + 4(1-2\nu) \tilde{Q}_1(\alpha) b_{21}(\alpha) - 4i\tilde{Q}_2(\alpha) \alpha b_{12}(\alpha) - 2i\gamma_1 \alpha \tilde{Q}_2(\alpha) b_{32}(\alpha) - 4(1-2\nu) \frac{|\alpha|}{di} \tilde{Q}_2(\alpha) b_{22}(\alpha)$$

$$K_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} L_1(\alpha) \sin \alpha t d\alpha, \quad L_1(\alpha) = -\frac{1}{1-\nu} \operatorname{th} \alpha + K(\alpha) \quad (2.14)$$

Аналогичным образом можно привести выражения для остальных $t_{ij}(x, y)$ и $t_{ij}^M(x, y)$ ($i, j = 1, 2$).

3. Замкнутое приближенное решение задачи. Численные результаты. Заметим, что на основе (2.10)–(2.14) можно получить решение задачи для бесконечной плоскости с трещиной ($\varepsilon = h/a \rightarrow \infty, Q_i(x) \equiv 0$), рассмотренной в [3, 4]. Действительно, устремляя $\varepsilon \rightarrow \infty$ и полагая $Q_i(x) \equiv 0$, из (2.7) и (2.10) получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = -\frac{Q_0}{\mu_r b_c^2 - (1-\nu)^{-1}}, \quad |x| < 1 \quad (3.1)$$

и условие

$$\varphi(t) = -\varphi(-t) \quad (3.2)$$

Неограниченное при $x = \pm 1$ решение этого уравнения при условии (3.2) имеет вид [3, 4]:

$$\varphi(x) = -\frac{Q_0 x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\mu_r b_c^2 - (1-\nu)^{-1}} \quad (3.3)$$

Из (2.13), используя (3.3) для магнитоупругого напряжения $t_{22}(x, y)$, при $y = 0$ получим выражение

$$\frac{t_{22}(x, 0)}{\mu} = \begin{cases} \frac{\chi b_c^2}{\mu_r^2} - \frac{1}{1-\nu} \frac{b_c^2 \chi^2 (1-\nu)}{2\mu_r^2 [\mu_r b_c^2 (1-\nu) - 1]}, & |x| < 1 \\ \frac{\chi b_c^2}{\mu_r^2} + \frac{b_c^2}{2[1-(1-\nu)\mu_r b_c^2]} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right], & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений определяется по формуле

$$K_{n1}^0 = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{2(x-1)} a^{1/2} \frac{t_{22}(x, 0)}{\mu} = -\frac{b_c^2 a^{1/2}}{2[1-(1-\nu)\mu_r b_c^2]} \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что при $b_c^2 \rightarrow b_{c*}^2 = 1/(1-\nu)\mu_r$ имеем $K_{n1}^0 \rightarrow \infty$. Этот результат, полученный в [3, 4], по-видимому, означает, что при $b_c \geq b_{c*}$ состояние рассматриваемой магнитоупругой системы является неустойчивым. Таким образом, интегральное уравнение (2.10) в частном случае ($\varepsilon \rightarrow \infty$) имеет замкнутое аналитическое решение (3.3). В общем случае аналитическое решение уравнения (2.10) с условием (2.7) неизвестно и поэтому приходится либо применять численные методы интегрирования [5], либо получать приближенное аналитическое решение. Для получения приближенного аналитического решения ядро $K_0(s)$ интегрального уравнения (2.10) представим в следующем виде:

$$K_0(\alpha) = -\frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty L(s) \sin \alpha s ds \quad (3.6)$$

$$L(\alpha) = (\mu_r b_c^2 - \frac{1}{1-\nu}) \text{th } \alpha + K(\alpha) \quad (3.7)$$

Поскольку функция $L(\alpha)$ обладает свойствами

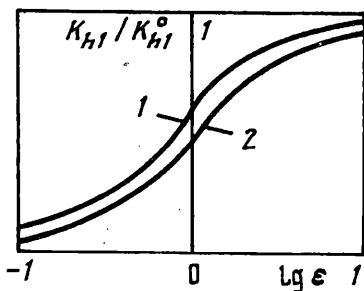
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha L(\alpha) = A = -2(1-\nu)/(1-2\nu) \quad (3.8)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} L(\alpha) = B = \mu_r b_c^2 - 1/(1-\nu)$$

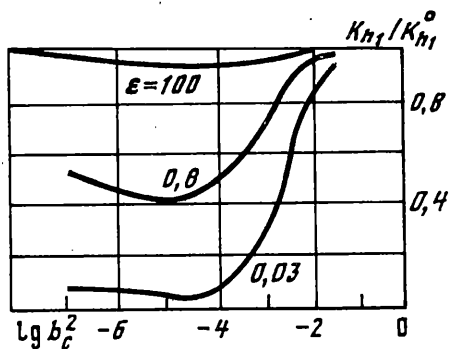
аппроксимируем ее выражением

$$L(\alpha) \approx L_*(\alpha) = B \text{cth}(B/A)\alpha \quad (3.9)$$

На основе теоремы, доказанной в [6], можно утверждать, что если $L(\alpha)$ и $L_*(\alpha)$ достаточно близки по модулю, то решение интегрального уравнения (2.10), соответствующих ядрам (2.11) и (3.6), мало отличаются друг от друга по норме в пространстве функции $L_p(-1, 1)$ ($1 < p < 2$). Как показывают численные расчеты, так аппроксимация верно отражает поведение функции $L(\alpha)$ в нуле и на бесконечности при $0 \leq b_c < b_{c*}$ и $0 \leq \alpha < \infty$. Значения $L(\alpha)$ и $L_*(\alpha)$ для любого $\alpha \in (0, \infty)$, кроме интервала $\alpha \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$ ($\varepsilon_0 \sim 10^{-2}$), практически совпадают.



Фиг. 2



Фиг. 3

Неограниченное при $x = \pm 1$ решение интегрального уравнения (2.10) с ядром (3.6) в силу (3.9) и условий (2.7) имеет вид [7, 8]:

$$\varphi(x) = \frac{2D^2}{\pi^2 \varepsilon A \operatorname{ch}^2(D_1 x) \sqrt{\operatorname{th}^2 D_1 - \operatorname{th}^2(D, x)}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\operatorname{th}^2 D_1 - \operatorname{th}^2(D, x)}}{\operatorname{th}(D, t) - \operatorname{th}(D, x)} g_1(t) dt \quad (3.10)$$

$$D = \pi A / (2B), \quad D_1 = D / \varepsilon, \quad g_1(t) = Q_0 - g(t)$$

Аналогичным образом аппроксимируя функцию $L_1(\alpha)$ выражением

$$L_1(\alpha) \approx L_{1*}(\alpha) = B_1 \operatorname{cth}(\alpha / c_1)$$

$$B_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} L_1(\alpha) = -1 / (1 - \nu), \quad A_1 = A = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha L_1(\alpha) \quad (3.11)$$

$$C_1 = A_1 / B_1$$

из (2.13) получим следующее выражение:

$$\frac{t_{22}(x, 0)}{\mu} = \gamma_0 - \frac{A_1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 \varphi(t) \operatorname{cth} \left[\frac{\pi C_1 (t-x)}{2\varepsilon} \right] dt + \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.12)$$

Коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений вычисляется по формуле

$$K_{h1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{2(x-1)} (a)^{1/2} \frac{t_{22}(x, 0)}{\mu} = a^{1/2} \frac{1}{(1-\nu)\mu_r b_c^2 - 1} \sqrt{\frac{2D_1}{\operatorname{sh} D_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\operatorname{th} D_1 + \operatorname{th}(D_1 t)}{\operatorname{th} D_1 - \operatorname{th}(D_1 t)} \right]^{1/2} g_1(t) dt} \quad (3.13)$$

При $Q_1(x) = Q_2(x) = 0$ (случай жестко заземленной полосы) коэффициент интенсивности (3.13) принимает более простой вид

$$K_{h1} = - \frac{b_c^2 a^{1/2}}{2[1 - (1-\nu)\mu_r b_c^2]} \sqrt{\frac{2D_1}{\operatorname{sh} D_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\operatorname{th} D_1 + \operatorname{th}(D_1 t)}{\operatorname{th} D_1 - \operatorname{th}(D_1 t)} \right]^{1/2} dt} \quad (3.14)$$

$$\text{либо } K_{h1} / K_{h1}^0 = \sqrt{\operatorname{th} D_1 / D_1}.$$

На основе формулы (3.14) приведены численные расчеты зависимости K_{h1}/K_{h1}^0 от $\lg(\varepsilon)$ (фиг. 2) и от $\lg(b_c^2)$ (фиг. 3) при различных физико-механических и геометрических характеристиках. На фиг. 2 кривая 1 соответствует $b_c^2 = 0,625 \cdot 10^{-4}$,

$\mu_r = 37500$, $\nu = 0,25$, а кривая $2 - b_c^2 = 0,625 \cdot 10^{-4}$, $\mu_r = 7500$, $\nu = 0,25$. Кривые на фиг. 3 построены при $\mu_r = 7500$ и $\nu = 0,25$.

Численный анализ показывает, что когда $Ig(\epsilon) > 1$, слой практически ведет себя как плоскость с разрезом, вне зависимости от физико-механических характеристик среды. При увеличении внешнего магнитного поля коэффициент интенсивности монотонно убывает до некоторого минимального значения, а потом резко возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pao Y.H., YEH C.-S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Intern. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. № 4. P. 415–436.
2. Бозорт Р. Ферромагнетизм. М.: Изд-во иностр. лит, 1956. 784 с.
3. Асанян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. О концентрациях упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 2. С. 15–25.
4. Фильштинский Л.А. Плоская задача магнитоупругости для ферромагнитной среды, ослабленной разрезами // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 143–152.
5. Shindo Y. The linear magnetoelastic problem of two coplanar Griffith crack in a soft ferromagnetic elastic strip // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1982. V. 49. № 1. P. 69–74.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
7. Гахов Ф. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжения около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

Ереван

Поступила в редакцию
7.VI.1995