МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. Д.А. ПОЖАРСКИЙ

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КОНУСА

Получено интегральное уравнение пространственной контактной задачи для бесконечного конуса. При решении этого уравнения в случае жесткого кольцевого бандажа используются асимптотические методы. В [1] выведено интегральное уравнение осесимметричной контактной задачи для конуса и найдено его асимптотическое решение для частного случая, когда конус разворачивается в полупространство. Осесимметричные контактные задачи для бесконечного упругого конуса также изучались с применением метода кусочно-однородных решений [2]. Решение общей трехмерной задачи о равновесии кругового конуса дано в работе, например [3]. При этом использовались формулы интегрального разложения векторных функций по полной системе векторных гармоник на поверхности конуса при помощи интегрального преобразования Меллина и ряда Фурье. Аналогично получено решение задачи статической термоупругости для трансверсально-изотропного конуса [4].

1. Постановка задачи и вывод интегрального уравнения. Рассмотрим бесконечный конус угла раствора 2α ($0 < \alpha < \pi$) в сферической системе координат r, η, φ. Пусть к поверхности конуса $\eta = \alpha$ в точке $r = x$, $\varphi = \psi$ приложена нормальная сосредоточенная сила интенсивности Q. Граничные условия задачи теории упругости запишем в виде

$$\eta = \alpha: \quad \tau_{\eta r} = \tau_{\eta\varphi} = 0, \quad \sigma_\eta = -Q\delta(r-x)\delta(\varphi-\psi) \tag{1.1}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Решение задачи (1.1) основывается на представлении гармонической функции $\Phi(r, \eta, \varphi)$ в форме интеграла Меллина по координате r и ряда Фурье по координате φ ($0 < r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\Phi(r,\eta,\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega_k(\eta,s) r^{1-s} e^{ik\varphi} ds \quad (\sigma_1 < c < \sigma_2)$$
$$\omega_k(\eta,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \Phi(r,\eta,\varphi) r^{s-2} e^{-ik\varphi} dr \tag{1.2}$$

Функции $\omega_k(\eta, s)$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) являются голоморфными в полосе $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$ по комплексной переменной s; значения σ_1 и σ_2 определяются из условий сходимости некоторых интегралов [3].

Воспользуемся формулами [3] (глава 4, § 2). Решение задачи (1.1) сводится к определению вспомогательных функций $a_k(s)$, $b_k(s)$, $c_k(s)$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) из системы трех линейных алгебраических уравнений (см. (4.14) из [3]):

$$s\left\{\frac{s^2-2(1-\nu)}{1-2\nu} a_k(s) \frac{d\overline{P}_s^k}{d\eta} + s b_k(s) \frac{d\overline{P}_{s-2}^k}{d\eta} - \frac{s+1}{2} \frac{k^2}{\sin\eta} \overline{P}_{s-1}^k\right\}_{\eta=\alpha} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[s\frac{s+3-2\nu(2s+1)}{1-2\nu}\overline{P}_s^k-\frac{s-4(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{d^2\overline{P}_s^k}{d\eta^2}\right]a_k(s)+\right.\\
&\left.+\left[(s-1)\overline{P}_{s-2}^k-\frac{d^2\overline{P}_{s-2}^k}{d\eta^2}\right]b_k(s)+k^2c_k(s)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\overline{P}_{s-1}^k}{\sin\eta}\right)\right\}_{\eta=\alpha}=1\\
&-k^2\left\{\frac{s-4(1-\nu)}{1-2\nu}a_k(s)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\overline{P}_s^k}{\sin\eta}\right)+b_k(s)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\overline{P}_{s-2}^k}{\sin\eta}\right)-\right.\\
&\left.-c_k(s)\left[\frac{d^2\overline{P}_{s-1}^k}{d\eta^2}+\frac{s(s-1)}{\cdot 2}\overline{P}_{s-1}^k\right]\right\}_{\eta=\alpha}=0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где чертой сверху обозначены неособые на оси конуса $\eta = 0$ функции Лежандра с "нормирующим" множителем

$$
\left[\frac{2s+1}{2}\frac{\Gamma(s-k+1)}{\Gamma(s+k+1)}\right]^{1/2}
$$

а аргумент этих функций, равный $\cos\eta$, опущен, так что

$$
\overline{P}_s^{-k}=\overline{P}_s^{-k}(\cos\eta)=(-1)^k\,\overline{P}_s^k(\cos\eta)
\tag{1.4}
$$

Вектор перемещений выражается через функции $a_k(s)$, $b_k(s)$, $c_k(s)$ по формулам, отличающимся только множителем от формул (4.8), (4.9) из [3]. Например, для перемещения u_η на поверхности конуса имеем

$$
\begin{aligned}
&u_\eta(r,\alpha,\varphi)=-\frac{Q}{2G}\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}L_k(s,\alpha)e^{ik(\varphi-\psi)}\right\}\left(\frac{x}{r}\right)^s ds\\
&L_k(s,\alpha)=\left\{-\frac{s-4(1-\nu)}{1-2\nu}a_k(s)\frac{d\overline{P}_s^k}{d\eta}-b_k(s)\frac{d\overline{P}_{s-2}^k}{d\eta}+\frac{k^2c_k(s)}{\sin\eta}\overline{P}_{s-1}^k\right\}_{\eta=\alpha}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Выражение (1.5) нам понадобится в дальнейшем при решении контактной задачи. Заметим, что в формуле (1.5) для $L_k(s,\alpha)$ нормирующие множители у функций Лежандра должны сократиться, поэтому перейдем от функций $\overline{P}_s^k(\cos\eta)$ к функциям $P_s^k(\cos\eta)$ и используем известные соотношения для этих функций (аргумент опускаем) [5]:

$$
\begin{aligned}
&dP_s^k/d\eta=-k\,\mathrm{ctg}\,\eta P_s^k-(s-k+1)(s+k)P_s^{k-1}\\
&d^2P_s^k/d\eta^2=[k^2+k(k+1)\mathrm{ctg}^2\,\eta-s(s+1)]P_s^k+(s-k+1)(s+k)\,\mathrm{ctg}\,\eta P_s^{k-1}\\
&P_s^{k-1}=\frac{s+k-1}{s-k+1}\cos\eta P_{s-1}^{k-1}+\frac{\sin\eta}{s-k+1}P_{s-1}^k\\
&P_{s-2}^{k-1}=\frac{s-k}{s+k-2}\cos\eta P_{s-1}^{k-1}-\frac{\sin\eta}{s+k-2}P_{s-1}^k\\
&P_s^k=-(s+k-1)\sin\eta P_{s-1}^{k-1}+\cos\eta P_{s-1}^k\\
&P_{s-2}^k=(s-k)\sin\eta P_{s-1}^{k-1}+\cos\eta P_{s-1}^k
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

При помощи равенств (1.6) перейдем в формулах (1.3), (1.5) к функциям

$P = P_{s-1}^{k-1}(\cos\alpha)$, $P^1 = P_{s-1}^{k}(\cos\alpha)$. Решая систему (1.3), окончательно получим, что

$$L_k(s,\alpha) = \frac{f_1(s)(P)^3 + f_2(s)(P)^2 P^1 + f_3(s)P(P^1)^2 + f_4(s)(P^1)^3}{g_1(s)(P)^3 + g_2(s)(P)^2 P^1 + g_3(s)P(P^1)^2 + g_4(s)(P^1)^3}$$

$$f_1(s) = -2(1-\nu)\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha(s-k)^2(s+k-1)^2$$

$$f_2(s) = (s-k)(s+k-1)\{s(s-1)(1-\nu)\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}k^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 2(1-\nu)\cos^2\alpha(1+3k\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha)\}$$

$$f_3(s) = s(s-1)[\tfrac{3}{2} + k\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha](1-\nu)\sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}k^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha(1+2k\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha) -$$

$$-(1-\nu)[(3k^2-2k)\sin 2\alpha + (4k-5k^2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 4k^2\,\mathrm{ctg}^3\,\alpha]$$

$$f_4(s) = \tfrac{1}{2}k^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - (1-\nu)[s(s-1)\sin^2\alpha - k^2(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha) - k(1+2\cos^2\alpha)]$$

$$g_1(s) = -\mathrm{ctg}^2\,\alpha(s-k)^2(s+k-1)^2[s(s-1)\sin^2\alpha + 2(1-\nu)(k^2-1)] \qquad (1.7)$$

$$g_2(s) = (s-k)(s+k-1)\{\tfrac{1}{4}s^2(s-1)^2\sin 2\alpha + s(s-1)[(\tfrac{3}{2}k - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha -$$

$$-\mathrm{ctg}\,\alpha(1-\nu+k(k+3))] - \tfrac{1}{2}k^2(1-k^2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha) + 6(1-\nu)k(1-k^2)\,\mathrm{ctg}^3\,\alpha\}$$

$$g_3(s) = \tfrac{1}{2}s^2(s-1)^2[1+(2k-3)\cos^2\alpha] + s(s-1)k[(3k-2)\cos^2\alpha -$$

$$-k-(k+1)\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha(2k+2(1-\nu))] + k^2(k^2-1)[\tfrac{1}{2} + \mathrm{ctg}^2\,\alpha(k+\tfrac{1}{2}+2(1-\nu)) +$$

$$+\mathrm{ctg}^4\,\alpha(k-4(1-\nu))]$$

$$g_4(s) = \tfrac{1}{4}s^2(s-1)^2\sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}s(s-1)(k^2+k(1+k)\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha)\sin 2\alpha -$$

$$-k^2(1+k)\,\mathrm{ctg}\,\alpha[\tfrac{1}{2}(1-k)(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha) + 2(1-\nu)\,\mathrm{ctg}^2\alpha]$$

Можно показать, что на прямой $s = {}^1/_2 + iu$ в плоскости комплексного переменного s знаменатель выражения для функции $L_k(s, \alpha)$ вида (1.7) не имеет нулей. В связи с этим примем в интеграле (1.5) $c = {}^1/_2$ и перейдем к интегрированию по u. В результате формулы (1.5), (1.7) примут вещественный вид ($\theta = G/(1-\nu)$):

$$u_\eta(r,\alpha,\varphi) = -\frac{Q}{2\pi^2\theta}\sqrt{\frac{x}{r}}\int_0^\infty \left\{L_0(u,\alpha) + 2\sum_{n=1}^{\infty} L_n(u,\alpha)\cos(n(\varphi-\psi))\right\}\cos\left(u\ln\frac{x}{r}\right)du$$

$$L_n(u,\alpha) = \frac{f_1(u)(P)^3 + f_2(u)(P)^2 P^1 + f_3(u)P(P^1)^2 + f_4(u)(P^1)^3}{g_1(u)(P)^3 + g_2(u)(P)^2 P^1 + g_3(u)P(P^1)^2 + g_4(u)(P^1)^3}$$

$$P = P_{iu-\frac{1}{2}}^{n-1}(\cos\alpha), \qquad P^1 = P_{iu-\frac{1}{2}}^{n}(\cos\alpha)$$

$$f_1(u) = \cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha(u^2+(n-\tfrac{1}{2})^2)^2$$

$$f_2(u) = -(u^2+(n-\tfrac{1}{2})^2)[\tfrac{1}{2}\cos^2\alpha(u^2+\tfrac{1}{4}) + \cos^2\alpha(1+3n\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha) - \tfrac{1}{4}(1-\nu)^{-1}n^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha]$$

$$f_3(u) = (u^2+\tfrac{1}{4})(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}n\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha)\sin 2\alpha - \tfrac{1}{4}(1-\nu)^{-1}n^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha(1+2n\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha) +$$

$$+(\tfrac{3}{2}n^2 - n)\sin 2\alpha + (2n - \tfrac{5}{2}n^2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 2n^2\,\mathrm{ctg}^3\,\alpha$$

$$f_4(u) = -\tfrac{1}{2}(u^2+\tfrac{1}{4})\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}n^2(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha) - n(\tfrac{1}{2}+\cos^2\alpha) - \tfrac{1}{4}(1-\nu)^{-1}n^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$$

$$g_1(u) = \mathrm{ctg}^2\,\alpha(u^2+(n-\tfrac{1}{2})^2)^2[2(1-\nu)(n^2-1) - (u^2+\tfrac{1}{4})\sin^2\alpha] \qquad (1.8)$$

$$g_2(u) = (u^2+(n-\tfrac{1}{2})^2)\{\tfrac{1}{4}(u^2+\tfrac{1}{4})^2\sin 2\alpha - (u^2+\tfrac{1}{4})[(\tfrac{3}{2}n - \tfrac{1}{2})\sin 2\alpha -$$

$$-\mathrm{ctg}\,\alpha(1-\nu+n(n+3))] - \tfrac{1}{2}n^2(1-n^2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha) + 6(1-\nu)n(1-n^2)\,\mathrm{ctg}^3\,\alpha\}$$

$$g_3(u) = -\tfrac{1}{2}(u^2+\tfrac{1}{4})^2[1+(2n-3)\cos^2\alpha] + (u^2+\tfrac{1}{4})n[(3n-2)\cos^2\alpha -$$
$$-n-(n+1)\operatorname{ctg}^2\alpha(2n+2(1-\nu))] - n^2(n^2-1)[\tfrac{1}{2}+\operatorname{ctg}^2\alpha(n+\tfrac{1}{2}+2(1-\nu))+$$
$$+\operatorname{ctg}^4\alpha(n-4(1-\nu))]$$
$$g_4(u) = -\tfrac{1}{4}(u^2+\tfrac{1}{4})^2\sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}(u^2+\tfrac{1}{4})[n^2+n(1+n)\operatorname{ctg}^2\alpha]\sin 2\alpha -$$
$$-n^2(1+n)\operatorname{ctg}\alpha[\tfrac{1}{2}(1-n)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)+2(1-\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha]$$

При выводе формул (1.8) учтено, что $L_{-k}(u, \alpha) = L_k(u, \alpha)$ ($k = \pm1, \pm2, \ldots$) и функции конуса $P^{k-1}_{iu-\frac{1}{2}}(\cos\alpha)$, $P^{k}_{iu-\frac{1}{2}}(\cos\alpha)$ являются вещественными и четными по u [5]. Если в формулах (1.8) положить $\alpha = \pi/2$, то получим

$$L_n\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma(iu/2+n/2+\tfrac{1}{4})\Gamma(-iu/2+n/2+\tfrac{1}{4})}{2\Gamma(iu/2+n/2+\tfrac{3}{4})\Gamma(-iu/2+n/2+\tfrac{3}{4})} \tag{1.9}$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция, что с учетом равенства

$$\int\limits_0^\infty J_n(ux)J_n(ur)du = \frac{1}{\pi\sqrt{rx}}\int\limits_0^\infty L_n\left(u, \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(u\ln\frac{x}{r}\right)du \tag{1.10}$$

совпадает с известными результатами для полупространства [6]. Формула (1.10) получается на основе соотношения

$$\int\limits_0^\infty J_n(t)J_n\left(t\frac{r}{x}\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s)\left(\frac{r}{x}\right)^{-s}ds$$
$$g(s) = \frac{\Gamma(s/2+n/2)\Gamma(\tfrac{1}{2}-s/2+n/2)}{2\Gamma(1-s/2+n/2)\Gamma(\tfrac{1}{2}+s/2+n/2)} \tag{1.11}$$

выведенного с использованием прямого и обратного преобразования Меллина функции Бесселя [7].

Отметим также, что в формулах (1.8) при $n = 0$ функция

$$L_0(u,\alpha) = \{(u^2+\tfrac{1}{4})\sin^2\alpha(P)^2 - \sin\alpha\cos\alpha PP^1 + \cos^2\alpha(P^1)^2\}/$$
$$/\{(u^2+\tfrac{1}{4})^2\sin\alpha\cos\alpha(P)^2 + (u^2+\tfrac{1}{4})\sin^2\alpha PP^1 - \sin\alpha\cos\alpha(u^2+\varkappa_*)(P^1)^2\} \tag{1.12}$$
$$P = P_{iu-\frac{1}{2}}(\cos\alpha), \quad P^1 = P^1_{iu-\frac{1}{2}}(\cos\alpha), \quad \varkappa_* = 2(1-\nu)\sin^{-2}\alpha + \tfrac{1}{4}$$

соответствующая осесимметричной задаче, совпадает с функцией $L(s, \alpha)/(s\sin^2\alpha)$ вида (6.118) из [1], в которой следует исправить очевидную опечатку – добавить в левой части множитель $1/s$, а также убрать в числителе ошибочный множитель $(\varkappa+1)^{-1}$.

Рассмотрим теперь контактную задачу о взаимодействии жесткого бандажа с бесконечным упругим конусом угла раствора 2α. Предполагаем, что силы трения между бандажом и конусом отсутствуют и вне бандажа поверхность конуса не нагружена. Бандаж вдавливается в конус силой Q, параллельной оси конуса. Область контакта Ω описывается условиями $\eta = \alpha$, $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (r, η, φ – сферические координаты), а форма основания бандажа в области контакта – функцией $f(r, \varphi)$. Под действием силы Q бандаж испытывает поступательное перемещение δ (перпендикулярно поверхности конуса), а также поворачивается на углы α_* и β_* относительно осей y и x, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси конуса и проходящей через точку приложения силы Q. В итоге требуется найти распределение нормальных контактных напряжений под бандажом $\sigma_\eta(r,\alpha,\varphi) = -q(r,\varphi), (r,\varphi) \in \Omega$. Затем при помощи трех интегральных условий равновесия бандажа можно установить связь между величинами Q и δ, e_x и α_*, e_y и β_*, где e_x и e_y – проекции точки приложения вдавливающей силы Q на оси x и y.

Разложим функции $q(r, \varphi)$ и $\delta(r, \varphi) = \delta + \alpha_* r \sin\alpha \cos\varphi + \beta_* r \sin\alpha \sin\varphi - f(r, \varphi)$ в ряды Фурье

$$q(r,\varphi) = q_0(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [q_n^+(r)\cos n\varphi + q_n^-(r)\sin n\varphi]$$

$$\delta(r,\varphi) = \delta_0(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [\delta_n^+(r)\cos n\varphi + \delta_n^-(r)\sin n\varphi] \tag{1.13}$$

Используя граничное условие контактной задачи $u_\eta(r,\alpha,\varphi) = -\delta(r,\varphi), (r,\varphi) \in \Omega$, формулы (1.8), для определения неизвестных функций, входящих в первое разложение (1.13), получим интегральные уравнения вида ($q_0^\pm(r) \equiv q_0(r), \delta_0^\pm(r) \equiv \delta_0(r); n = 0, 1, \ldots$):

$$\int_a^b q_n^\pm k_n(r,x)x\,dx = \pi\theta\delta_n^\pm(r) \quad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{1.14}$$

$$k_n(r,x) = \frac{1}{\sqrt{rx}}\int_0^\infty L_n(u,\alpha)\cos\left(u\ln\frac{x}{r}\right)du \tag{1.15}$$

Введем новые величины и обозначения по формулам (штрихи далее опускаем):

$$\xi = \lambda\ln\frac{r}{a} - 1, \quad x' = \lambda\ln\frac{x}{a} - 1, \quad \lambda = 2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}, \quad K_n(u) = uL_n(u,\alpha)$$

$$k_n'\left(\ln\frac{x}{r}\right) = \sqrt{rx}\,k_n(r,x), \quad \varphi_n^\pm(\xi) = \frac{q_n^\pm(r)}{\theta}\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}, \quad \delta_n^{\pm\prime}(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{r}\,\delta_n^\pm(r)}{a^{3/2}} \tag{1.16}$$

Безразмерный параметр λ, очевидно, характеризует относительную удаленность бандажа от вершины конуса. В обозначениях (1.16) формулы (1.14) и (1.15) запишем в виде

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n^\pm(\xi)k_n\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi\delta_n^\pm(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.17}$$

$$k_n(t) = \int_0^\infty \frac{K_n(u)}{u}\cos ut\,du \tag{1.18}$$

2. Асимптотические решения. Применим для решения интегрального уравнения (1.17), (1.18) асимптотические методы "больших и малых λ", ограничиваясь в расчетах случаями $n = 0$ (осевая симметрия, если усилие Q распределено по окружности) и $n = 1$. При этом $K_0(u) = uL_0(u, \alpha)$, где функция $L_0(u, \alpha)$ имеет вид (1.12), а функция ($P = P_{iu-1/2}(\cos\alpha)$, $P^1 = P^1_{iu-1/2}(\cos\alpha)$):

$$K_1(u) = u\frac{f_1(u)(P)^3 + f_2(u)(P)^2P^1 + f_3(u)P(P^1)^2 + f_4(u)(P^1)^3}{g_1(u)(P)^3 + g_2(u)(P)^2P^1 + g_3(u)P(P^1)^2 + g_4(u)(P^1)^3} \tag{2.1}$$

$$f_1(u) = (u^2 + 1/4)^2\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$f_2(u)=-(u^2+\tfrac14)[\tfrac12(u^2+\tfrac14)\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha(\tfrac14(1-\nu)^{-1}-1-2\cos^2\alpha)]$$

$$f_3(u)=(u^2+\tfrac14)(\tfrac14\sin2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+\tfrac12\sin2\alpha+$$

$$+\operatorname{ctg}\alpha[2\operatorname{ctg}^2\alpha-\tfrac12-\tfrac14(1-\nu)^{-1}(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)]$$

$$f_4(u)=-\tfrac12(u^2+\tfrac14)\sin^2\alpha-1-\cos^2\alpha-\tfrac12\operatorname{ctg}^2\alpha(1+\tfrac12(1-\nu)^{-1})$$

$$g_1(u)=-(u^2+\tfrac14)^3\cos^2\alpha$$

$$g_2(u)=\tfrac14(u^2+\tfrac14)^3\sin2\alpha-(u^2+\tfrac14)^2[\sin2\alpha-(5-\nu)\operatorname{ctg}\alpha]$$

$$g_3(u)=-\tfrac12(u^2+\tfrac14)^2\sin^2\alpha-(u^2+\tfrac14)[\sin^2\alpha+4(2-\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha]$$

$$g_4(u)=-\tfrac14(u^2+\tfrac14)^2\sin2\alpha-\tfrac12(u^2+\tfrac14)\sin2\alpha(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)+4(1-\nu)\operatorname{ctg}^3\alpha$$

Для функций $K_n(u)$ ($n = 1, 2, \ldots$) имеют место асимптотические разложения

$$K_n(u)=Au+O(u^3),\quad u\to0,\quad A=\text{const}$$
$$K_n(u)=1+c_1u^{-1}+c_2u^{-2}+O(u^{-3}),\quad u\to+\infty,\quad c_{1,2}=\text{const}\tag{2.2}$$

С учетом формул (2.2) ядро интегрального уравнения (1.17) вида (1.18) можно представить в форме

$$k_n(t)=\ln|t|F_1(t)+|t|F_2(t)+F_3(t)\tag{2.3}$$

$$F_l(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{lm}t^{2m},\quad a_{10}=-1$$

Используя метод "больших λ" [8], ограничимся в разложении (2.9) следующими членами ($t\to0$)

$$k_n(t)=-\ln|t|+a_{20}|t|+a_{30}+a_{11}t^2\ln|t|+a_{31}t^2+O(t^3)\tag{2.4}$$

$$a_{20}=-\frac{\pi}{2}c_1,\quad a_{30}=\int_0^\infty\frac{K_n(u)-1+e^{-u}}{u}du,\quad a_{11}=\frac{c_2}{2}$$

$$a_{31}=-\frac34c_2+\frac12\int_0^\infty\left[\left(1+\frac{c_1}{u}-K_n(u)\right)u^2+c_2(1-e^{-u})\right]\frac{du}{u}$$

При вычислении постоянных c_1 и c_2, входящих в формулы (2.8) при $n = 0, 1$ следует воспользоваться асимптотическими разложениями для функций Лежандра при $u\to+\infty$ [9]:

$$P_{iu-\frac12}(\cos\alpha)=\frac{e^{\alpha u}}{\sqrt{2\pi u\sin\alpha}}\left[1+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{8u}+\left(\frac{9}{128}\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{16}\right)\frac{1}{u^2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{75}{1024}\operatorname{ctg}^3\alpha+\frac{5}{64}\operatorname{ctg}\alpha\right)\frac{1}{u^3}+O\left(\frac{1}{u^4}\right)\right]$$
$$\tag{2.5}$$
$$P^1_{iu-\frac12}(\cos\alpha)=\frac{e^{\alpha u}}{\sqrt{2\pi u\sin\alpha}}\left[u-\frac38\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{16u\sin^2\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{105}{1024}\operatorname{ctg}^3\alpha+\frac{3}{32}\operatorname{ctg}\alpha\right)\frac{1}{u^2}+O\left(\frac{1}{u^3}\right)\right]$$

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{20}	–1,871	–0,714	–0,271	0	0,271	0,714	1,871
a_{30}	–0,574	–0,981	1,981	2,079	1,127	–1,097	–1,254
a_{11}	–2,106	–0,364	–0,0199	0,0625	–0,0199	–0,364	–2,106
a_{31}	11,567	2,291	0,259	–0,109	–0,204	–1,037	–5,936

Таблица 2

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{20}	–1,871	–0,714	–0,271	0	0,271	0,714	1,871
a_{30}	32,428	2,280	0,248	0,0794	–0,0247	–0,367	–1,091
a_{11}	–2,861	–0,747	–0,301	–0,188	–0,301	–0,747	–2,861
a_{31}	–2,392	1,670	0,647	0,286	–0,0383	–1,099	–5,777

С учетом формул (2.5) получим, что при $n = 0$:

$$c_1 = \operatorname{ctg}\alpha(1 - 2\nu + \tfrac{7}{64}\cos^2\alpha),$$

$$c_2 = \tfrac{1}{8}\sin^2\alpha + 2(1-\nu)\operatorname{ctg}\alpha(c_1 - \tfrac{3}{4}\operatorname{ctg}\alpha) - \tfrac{37}{128}\operatorname{ctg}^2\alpha - \tfrac{1}{8}c_1\operatorname{ctg}\alpha(2 - \tfrac{7}{8}\cos^2\alpha)$$

а при $n = 1$ будем иметь

$$c_1 = \operatorname{ctg}\alpha(1 - 2\nu + \tfrac{7}{64}\cos^2\alpha), \quad c_2 = -\tfrac{3}{8} - \tfrac{227}{256}\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha(4 + \tfrac{207}{256} + \tfrac{3}{4}\cos^2\alpha -$$
$$-(8 + \tfrac{1}{4})\nu) + \tfrac{7}{128}c_1\sin 2\alpha + c_1\operatorname{ctg}\alpha(5 + \tfrac{1}{64} - 2\nu)$$

В табл. 1 и 2 приведены значения постоянных a_{lm}, входящих в представление (2.10), при $\nu = 0,3$, разных углах $\alpha = \pi k/8$ и при $n = 0$ и $n = 1$ соответственно. При $n = 0$ и $k = 4$ (конус разворачивается в полупространство) значения постоянных a_{lm} совпадают со значениями из [1, с. 122].

По асимптотическому методу "больших λ" получим решение интегрального уравнения (2.5), (2.10) в форме

$$\varphi_n^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\omega_{00}^{\pm}(x) + \frac{1}{\lambda}\omega_{10}^{\pm}(x) + \frac{1}{\lambda^2}\omega_{20}^{\pm}(x) + \frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\omega_{21}^{\pm}(x) + O(\lambda^{-3}\ln\lambda)\right\}$$

$$\omega_{00}^{\pm}(x) = \frac{1}{\pi}\left[S^{\pm} - \int_{-1}^{1}\frac{d}{d\xi}(\delta_n^{\pm}(\xi))\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\right], \quad S^{\pm} = \int_{-1}^{1}\varphi_n^{\pm}(\xi)d\xi$$

$$\omega_{10}^{\pm}(x) = -\frac{a_{20}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\int_{-1}^{1}\frac{\omega_{00}^{\pm}(t)\operatorname{sgn}(t-\xi)}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{2.6}$$

$$\omega_{20}^{\pm}(x) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\int_{-1}^{1}[(t-\xi)(2a_{11}\ln|t-\xi| + 2a_{31} + a_{11})\omega_{00}^{\pm}(t) +$$
$$+ a_{20}\operatorname{sgn}(t-\xi)\omega_{10}^{\pm}(t)]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\omega_{21}^{\pm}(x) = \frac{2a_{11}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\int_{-1}^{1}\frac{(t-\xi)\omega_{00}^{\pm}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

В простейшем частном случае $\delta_n^{\pm}(x) = \delta = \text{const}$ из формул (2.12) получим

$$\omega_{00}^{\pm}(x) = S/\pi, \quad \omega_{10}^{\pm}(x) = 4a_{20}SS_1(x)/\pi^3, \quad \omega_{21}^{\pm}(x) = -Sa_{11}(1-2x^2)/\pi$$

$$\omega_{20}^{\pm}(x) = S/\pi[(a_{11}(3/2 - \ln 2) + a_{31})(1-2x^2) + 32/\pi^4 a_{20}^2(S_2(x) - S_0)]$$

$$S_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4m}{(4m^2-1)^3} \approx 0,1508$$

$$S_1(x) = (1-2x^2) + 2\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\arccos x]}{(2m+1)^2} \tag{2.7}$$

$$S_2(x) = (1-x^2)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_{2m}(x)}{(4m^2-1)^2}, \qquad \nu_0(x) = 0, \quad \nu_2(x) = 4 + 2x\ln\frac{1-x}{1+x}$$

$$\nu_{2m+2}(x) = -2(1-2x^2)\nu_{2m}(x) + 16m/(4m^2-1) - \nu_{2m-2}(x)$$

$$S = \pi\delta[a_{30} + 0,8106a_{20}\lambda^{-1} + (a_{11} + a_{31} - 0,03287a_{20}^2)\lambda^{-2} +$$

$$+ \ln 2\lambda(1 - a_{11}\lambda^{-2}) + O(\lambda^{-3}\ln\lambda)]^{-1}$$

Здесь функция $S_2(x)$ с погрешностью 0,7% при $|x| \leqslant 1$ может быть аппроксимирована выражением

$$S_2(x) \approx \left[0,4356 + 0,1321x^3 + 0,2494x\ln\frac{1-x}{1+x}\right](1-x^2)$$

Нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (1.17), (1.18) при малых λ в случае $\delta_n^{\pm}(x) = \delta\exp(i\varepsilon x)$ можно представить в виде [6]:

$$\varphi_n^{\pm}(x) = \varphi_+\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) + \varphi_-\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) - \frac{\delta\exp(i\varepsilon x)}{\lambda L_n(\lambda\varepsilon, \alpha)} \tag{2.8}$$

где функции $\varphi_{\pm}(t)$ определяются из решения интегральных уравнений на полубесконечном интервале $0 \leqslant t < \infty$:

$$\int_0^{\infty} \varphi_{\pm}(\tau)k_n(t-\tau)d\tau = \frac{\delta}{\lambda}\exp(\pm i\varepsilon(1-\lambda t)) \tag{2.9}$$

Чтобы получить решения уравнений (2.9) методом Винера – Хопфа, необходимо аппроксимировать символ его ядра $L_n(u, \alpha) = K_n(u)/u$ факторизуемым выражением. Учитывая поведение функции $K_n(u)$ при $u \to +\infty$ (см. (2.2)), применим следующую аппроксимацию [10]:

$$L_n(u,\alpha) \approx \frac{\sqrt{u^2+B^2}(u^2+D^2)}{(u^2+C^2)(u^2+E^2)} + \frac{c_1u^2}{(u^2+C^2)(u^2+E^2)} \tag{2.10}$$

где $BD^2/(C^2E^2) = A = L_n(0, \alpha)$ и второе слагаемое по модулю при любом значении u много меньше первого, что позволяет использовать для решения эквивалентных (2.9) функциональных уравнений метод разложения по некоторому параметру [10]. При этом, как показано в [10], для получения приближенных решений уравнений (2.9), (2.10), пригодных для практических расчетов, достаточно в этих разложениях удержать первые два члена. В табл. 3 и 4 приведены значения постоянных, входящих в аппроксимацию (2.16), а также относительная погрешность этой аппроксимации θ_* (в %), при $\nu = 0, 3$, разных углах $\alpha = \pi k/8$ соответственно при $n = 0$ и $n = 1$.

Для получения высокоточной аппроксимации функции $L_1(u, \pi k/8)$ при $k = 1$ следует несколько усложнить функцию в правой части формулы (2.10) [10].

Таблица 3

k	B	C	D	E	c_1	θ_*
1	2,400	4,801	1,699	0,467	1,191	5
2	1,600	2,400	1,502	0,472	0,455	3
3	1,800	0,500	1,401	1,855	0,172	2
4	1,000	1,120	1,112	0,475	0	2
5	0,800	0,398	0,302	0,393	–0,172	2
6	1,000	0,500	0,500	0,875	–0,455	2
7	2,500	0,601	0,501	2,115	–1,191	2

Таблица 4

k	B	C	D	E	c_1	θ_*
2	1,551	0,510	2,770	3,165	0,455	3
3	0,900	0,091	0,100	1,010	0,172	2
4	1,000	1,500	1,662	1,159	0	1
5	0,990	0,210	0,201	0,928	–0,172	2
6	0,310	0,450	0,852	1,063	–0,455	2
7	2,830	0,551	0,630	2,387	–1,191	3

Таблица 5

k	1	2	3	4	5	6	7
λ	5	1,55	1,2	1	2	6	10
(2.6), (2.7)	0,304	0,382	0,359	0,382	0,327	0,285	0,405
(2.8), (2.11)	0,308	0,374	0,322	0,394	0,387	0,395	0,507

В частном случае $\varepsilon = 0$ приближенные решения уравнений Винера – Хопфа (2.9), (2.10) можно представить в виде

$$\varphi_\pm(t) = \psi^0_\pm(t) + \psi^1_\pm(t)$$

$$\psi^0_\pm(t) = \delta\lambda^{-1}A^{-1/2}[e^{-Bt}(\pi t)^{-1/2} + A^{-1/2}\operatorname{erf}\sqrt{Bt} - r_0 e^{-Dt}\operatorname{erf}\sqrt{(B-D)t}]$$

$$\psi^1_\pm(t) = c_1\delta\lambda^{-1}A^{-1/2}\Big\{-Q_0(t) - r_1 J_0^+(D,t) + r_3 e^{-Dt}\operatorname{erf}\sqrt{(B-D)t} +$$

$$+ r_2\int_0^t e^{-Dr}\operatorname{erf}\sqrt{(B-D)\tau}\,K_0[B(t-\tau)]d\tau - \frac{Dr_0}{2}J_1^-(-D,t) -$$

$$-\tfrac{1}{2}r_0 D(B-D)^{-1/2}[Q_1(t) + g_+(iD)\pi^{-1/2}t^{1/2}e^{-Bt}]\Big\}$$

$$r_0 = \frac{(C-D)(E-D)}{D\sqrt{B-D}}, \qquad r_2 = \frac{r_0}{\pi}\left[\frac{B}{4(B-D)} - \frac{C+E-2D}{2} + \frac{1}{D}\right] \tag{2.11}$$

$$r_1 = \frac{(C+D)(E+D)}{4D\sqrt{B+D}}, \qquad r_3 = r_0 g_+(iD)\left[\frac{2D-B}{4(B-D)} - \frac{C+E-2D}{2}\right]$$

$$Q_k(t) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^t \tau^{k-1/2}e^{-Br}K_0[B(t-\tau)]d\tau$$

$$g_+(ix) = g_-(-ix) = \ln[(x+\sqrt{x^2-B^2})/B]/(\pi\sqrt{x^2-B^2})$$

$$J_k^\pm(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{x\tau}\operatorname{erf}\sqrt{(B+x)\tau}\,K_0[B(t-\tau)]\tau^k d\tau \mp g_\pm(ix)t^k e^{xt}\operatorname{erf}\sqrt{(B+x)t}$$

Здесь $\mathrm{erf}(x)$ – интеграл вероятности, K_0 – цилиндрическая функция [5].

При вычислении интегральных характеристик задачи (сила, момент) вместо аддитивной формы решения (2.8) обычно используют ее мультипликативный аналог [6].

Как показывают расчеты, в определенном диапазоне изменения λ, зависящем от α, происходит смыкание решений, полученных при помощи асимтотических методов "больших и малых λ". В табл. 5 приводятся значения величины $k_* = \lim\sqrt{1-x^2}\varphi_0^{\pm}(x)\delta^{-1}$ $(x \to 1-0)$ при $\delta_0^{\pm}(x) = \delta$, $\nu = 0{,}3$, $\alpha = \pi k/8$, рассчитанные по формулам (2.6), (2.7) и (2.8), (2.11) при разных λ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (96-01-00133а). Автор благодарит В.М. Александрова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
4. *Подильчук Ю.Н.* Общая задача статической термоупругости для трансверсально-изотропного конуса // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 12. С. 39–46.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
8. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
9. *Журина М.И., Кармазина Л.Н.* Таблицы и формулы для сферических функций $P^m_{-1/2+ir}(z)$. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 57 с.
10. *Александров В.М., Белоконь А.В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений, встречающихся при изучении смешанных задач математической физики для областей с цилиндрическими границами // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 401–413.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
6.XII.1995