МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 531.8

© 1997 г. М.П. ЮШКОВ

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА С ВАРИАТОРОМ КАК НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается машинный агрегат, который вариатором разделяется на две части: на ведущую часть с моментом инерции J_1 и угловой скоростью ω_1 и на ведомую часть, имеющую момент инерции J_2 и угловую скорость ω_2. Ведущая часть приводится во вращение моментом M_1, а ведомая испытывает момент сопротивления величины M_2. К рассматриваемой модели могут быть сведены различные пусковые системы, силовые агрегаты судов, тепловозов, приводы некоторых металлорежущих станков и т.д.

Обычно машинные агрегаты с вариаторами изучают как системы с неголономными связями, накладывающими ограничения на кинематические характеристики ведущего и ведомого звеньев. В большинстве работ рассматриваются неголономные связи первого порядка (см., например, [1, 2]), однако в последнее время обсуждается вопрос и о составлении уравнений движения подобных систем при наличии связей второго и третьего порядков как связей наиболее полно описывающих истинную динамику системы [3–6]. Остановимся на составлении уравнений движения систем с вариаторами с помощью обобщенного принципа Гаусса [7].

Пусть на движение системы, положение которой характеризуется обобщенными координатами $q^\sigma, \sigma=\overline{1,s}$, наложены линейные дифференциальные связи третьего порядка

$$\alpha_*^{l+\varkappa} = c_\sigma^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q)\dddot q^\sigma + c_0^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) = 0$$

$$\varkappa=\overline{1,k} \quad (l=s-k) \tag{1}$$

Здесь и далее по дважды встречающимся индексам производится суммирование.

Система уравнений Лагранжа второго рода может быть сведена к одному векторному равенству, эквивалентному второму закону Ньютона [8]:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}$$

где векторы, принадлежащие касательному пространству к многообразию возможных положений системы, могут быть представлены в виде (M – масса всей системы):

$$M\mathbf{W} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\right)\mathbf{e}^\sigma = MW_\sigma \mathbf{e}^\sigma$$

$$\mathbf{Y} = Q_\sigma \mathbf{e}^\sigma, \quad \mathbf{R} = R_\sigma \mathbf{e}^\sigma$$

При наличии связей (1) для использования обобщенного принципа Гаусса эту запись второго закона Ньютона следует продифференцировать по времени [7]. Тогда получим

$$M\mathbf{U} = \mathbf{P} + \mathbf{G}, \quad \mathbf{U} = \dot{\mathbf{W}}, \quad \mathbf{P} = \dot{\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{G} = \dot{\mathbf{R}} \tag{2}$$

Теперь обобщенный принцип Гаусса может быть записан следующим образом:

$$\delta'''(M\mathbf{U}-\mathbf{P})^2 = 0 \tag{3}$$

В этой формуле три штриха после символа дифференциала δ означают, что вычисляется частный дифференциал при фиксированных t, q^σ, $\dot{q}^\sigma$, $\ddot{q}^\sigma$, $\sigma=\overline{1,s}$. Принцип (3) согласно закону (2) можно переписать в виде

$$\delta'''\mathbf{G}^2 = 0$$

Эту запись можно рассматривать как утверждение о том, что при наличии связей (1) вектор $\mathbf{G}$ согласно обобщенному принципу Гаусса выбирается минимальным по модулю.

Перепишем принцип (3) следующим образом:

$$(MU_\sigma - P_\sigma)\delta'''\dddot{q}^\sigma = 0 \tag{4}$$

Напомним, что ковариантные компоненты W_σ вектора ускорения $\mathbf{W}=\dot{\mathbf{V}}$ выражаются через ковариантные компоненты V_σ вектора скорости $\mathbf{V}$ по формулам [8]:

$$W_\sigma = \dot{V}_\sigma - \Gamma^\rho_{\sigma\tau}V_\rho\dot{q}^\tau \quad (\rho,\sigma,\tau=\overline{1,s}) \tag{5}$$

где $\Gamma^\rho_{\sigma\tau}$ являются символами Кристоффеля второго рода. Формулы (5) будем рассматривать как правило вычисления ковариантных компонент векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{P}$. Тогда получим

$$MU_\sigma - P_\sigma = M\dot{W}_\sigma - \dot{Q}_\sigma - \Gamma^\rho_{\sigma\tau}(MW_\rho - Q_\rho)\dot{q}^\tau \tag{6}$$

Дополним систему (1) уравнениями

$$\alpha^\lambda_* = c^\lambda_\sigma(t,q,\dot{q},\ddot{q})\dddot{q}^\sigma + c^\lambda_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \quad (\lambda=\overline{1,l},\ l=s-k) \tag{7}$$

Совокупность уравнений (1) и (7) можно рассматривать как формулы перехода от $\dddot{q}^\sigma$ к α^ρ_*, $\sigma,\rho=\overline{1,s}$. Если $\det[c^\rho_\sigma]$ не равен нулю, то можно написать обратное преобразование

$$\dddot{q}^\sigma = h^\sigma_\rho(t,q,\dot{q},\ddot{q})\alpha^\rho_* + h^\rho_0(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \quad (\rho,\sigma=\overline{1,s})$$

Согласно этим формулам имеем

$$\delta'''\dddot{q}^\sigma = h^\sigma_\rho\delta'''\alpha^\rho_* \quad (\rho,\sigma=\overline{1,s}) \tag{8}$$

Но в силу выполнения связей (1) получаем, что $\delta'''\alpha^{l+\varkappa}_* = 0$, $\varkappa=\overline{1,k}$, поэтому соотношения (8) перепишутся в виде

$$\delta'''\dddot{q}^\sigma = h^\sigma_\lambda\delta'''\alpha^\lambda_* \quad (\lambda=\overline{1,l},\ \rho,\sigma=\overline{1,s}) \tag{9}$$

Подставляя формулы (9) в принцип (4), имеем

$$(MU_\sigma - P_\sigma)h^\sigma_\lambda\delta'''\alpha^\lambda_* = 0 \quad (\lambda=\overline{1,l})$$

Так как вариации $\delta'''\alpha^\lambda_*$, $\lambda=\overline{1,l}$, являются независимыми, то отсюда получаем уравнения движения системы

$$(MU_\sigma - P_\sigma)h^\sigma_\lambda = 0 \quad (\lambda=\overline{1,l})$$

которые согласно формулам (6) можно переписать в окончательном виде:

$$[M\dot{W}_\sigma - \dot{Q}_\sigma - \Gamma^\rho_{\sigma\tau}(MW_\rho - Q_\rho)\dot{q}^\tau]h^\sigma_\lambda = 0 \quad (\lambda=\overline{1,l}) \tag{10}$$

Закон движения получается после решения системы уравнений (10) и (1), причем для интегрирования должны быть заданы начальные значения обобщенных координат, скоростей и ускорений, а тем самым из закона Ньютона считается известным и начальное значение реакции связей.

Применим изложенную теорию для получения с помощью обобщенного принципа

Гаусса уравнений движения машинного агрегата с вариатором, когда имеется нелинейная неголономная связь второго порядка общего вида:

$$\psi(t,\omega_1,\omega_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0 \qquad (11)$$

Представим эту связь в виде линейной дифференциальной связи третьего порядка, для чего продифференцируем выражение (11) по времени. Тогда получим:

$$\alpha_* \equiv \dot{\psi} = c_1^1\dot{\varepsilon}_1 + c_2^1\dot{\varepsilon}_2 + c_0^1(t,\omega_1,\omega_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0 \qquad (12)$$

где $c_\sigma^1(t,\omega_1,\omega_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\partial\psi/\partial\varepsilon_\sigma$, $\sigma=1,2$. В нашем случае обобщенный принцип Гаусса записывается в виде

$$(MU_1-P_1)\delta'''\dot{\varepsilon}_1+(MU_2-P_2)\delta'''\dot{\varepsilon}_2=0 \qquad (13)$$

Здесь вариации $\delta'''\dot{\varepsilon}_1$ и $\delta'''\dot{\varepsilon}_2$ согласно связи (12) связаны соотношением:

$$c_1^1\delta'''\dot{\varepsilon}_1+c_2^1\delta'''\dot{\varepsilon}_2=0$$

поэтому принцип (13) можно переписать в виде

$$(MU_1-P_1-(MU_2-P_2)c_1^1/c_2^1)\delta'''\dot{\varepsilon}_1=0$$

В силу произвольности вариации $\delta'''\dot{\varepsilon}_1$ отсюда получаем уравнение движения

$$MU_1-P_1-(MU_2-P_2)c_1^1/c_2^1=0$$

которое при учете формул (6) можно записать в виде:

$$M\dot{W}_1-\dot{Q}_1-\Gamma_{1\tau}^{\rho}(MW_\rho-Q_\rho)\dot{q}^\tau-[M\dot{W}_2-\dot{Q}_2-\Gamma_{2\tau}^{\rho}(MW_\rho-Q_\rho)\dot{q}^\tau]c_1^1/c_2^1=0 \qquad (14)$$

Для получения конкретного выражения уравнения движения нашей механической системы выполним следующие выкладки. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T=\left(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2\right)/2$$

поэтому основной метрический тензор имеет компоненты

$$g_{11}=J_1,\quad g_{22}=J_2,\quad g_{12}=g_{21}=0$$

Отсюда можно получить элементы обратной матрицы:

$$g^{11}=1/J_1,\quad g^{22}=1/J_2,\quad g^{12}=g^{21}=0$$

Символы Кристоффеля второго рода вычисляются по формулам [8]:

$$\Gamma_{\sigma\tau}^{\rho}=g^{\rho\pi}\Gamma_{\pi,\sigma\tau}=\frac{g^{\rho\pi}}{2}\left(\frac{\partial g_{\tau\pi}}{\partial q^\sigma}+\frac{\partial g_{\sigma\pi}}{\partial q^\tau}-\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q^\pi}\right)$$

Так как все метрические коэффициенты постоянны, то

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{22}^1=0$$

$$\Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\Gamma_{22}^2=0$$

Далее имеем

$$MW_1=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^1}-\frac{\partial T}{\partial q^1}=J_1\varepsilon_1$$

$$MW_2=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^2}-\frac{\partial T}{\partial q^2}=J_2\varepsilon_2$$

поэтому

$$M\dot{W}_1=J_1\dot{\varepsilon}_1,\quad M\dot{W}_2=J_2\dot{\varepsilon}_2$$

В нашем случае $Q_1=M_1$, $Q_2=-M_2$, откуда

$$\dot{Q}_1=\dot{M}_1,\quad \dot{Q}_2=-\dot{M}_2$$

Таким образом, согласно (14) уравнение движения машинного агрегата с вариатором имеет вид:

$$J_1\dot{\varepsilon}_1 - J_2\frac{c_1^1}{c_2^1}\dot{\varepsilon}_2 = \dot{M}_1 + \frac{c_1^1}{c_2^1}\dot{M}_2 \tag{15}$$

Уравнение (15) совместно с уравнением связи (12) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, позволяющих исследовать движение машинного агрегата с вариатором, описываемым нелинейной неголономной связью второго порядка. Напомним, что при интегрировании системы (12), (15) надо задать начальные значения угловых координат, скоростей, ускорений, а тем самым и начальное значение реакции связи. Дальнейшее же движение системы согласно обобщенному принципу Гаусса будет сопровождаться минимальной скоростью роста величины реакции.

Уравнения движения можно выводить так же, исходя из видоизмененной формы записи обобщенного принципа Гаусса, предложенной в [9]. Тогда будем иметь:

$$(\partial S_1 / \partial \dddot{q}^{\sigma} - P_{\sigma})h_{\lambda}^{\sigma} = 0 \quad (\lambda = \overline{1,l}, \quad \sigma = \overline{1,s}) \tag{16}$$

где $S_1 = M\dot{\mathrm{U}}^2/2$. Важно, что при этом уравнения (16) являются необходимым условием минимума функции, которую можно назвать обобщенным принуждением. Однако применение уравнений (16) к практическим задачам довольно утомительно из-за необходимости использования функции S_1.

Для описания движения систем с линейными неголономными связями второго порядка в [5] из принципа Журдена получены уравнения

$$\partial \dot{S} / \partial \ddot{\pi}_k = Q_k^* \quad (k = 1,\ldots, \quad p = N-1) \tag{17}$$

Здесь $\dot{S} = M\mathbf{W}\cdot\dot{\mathbf{W}}$, π_k – квазикоординаты, Q_k^* – соответствующие им обобщенные силы.

Для исследования систем с линейными связями третьего порядка в [6] с помощью принципа Гаусса выведены уравнения движения в виде

$$\partial(\ddot{S} + \ddot{\Phi} + \ddot{\Pi}) / \partial \ddddot{q}_{\alpha} = Q_{\alpha} \quad (\alpha = 1,\ldots, \quad p = N-1) \tag{18}$$

где Q_{α} – обобщенные силы, S – функция Аппеля, П – потенциальная энергия, Ф – функция Рэлея, обусловленная наличием сил линейного сопротивления. В уравнениях (17) и (18) сохранены обозначения, принятые в [5, 6].

Отметим, что уравнения (17) и (18) получены из уравнений Аппеля чисто формальным путем и поэтому не могут рассматриваться как условие минимума некоторой функции, имеющей вполне определенное физическое содержание, хотя сами уравнения Аппеля, как известно, являются необходимым условием минимума принуждения по Гауссу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артоболевский И.И., Зиновьев В.А., Умнов Н.В.* Уравнения движения машинного агрегата с вариатором // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173. № 5. С. 1017–1020.
2. *Пронин Б.А., Петров М.С., Баловнев Н.П.* Уравнения движения автоматического клиноременного вариатора мототранспортного средства // Автомобильная пром-сть. 1979. № 9. С. 15–18.
3. *Мальцев А.В.* Устойчивость движения бесступенчатого привода с учетом характеристики вариатора и упругости звеньев // Теория механизмов и машин. Харьков: Вища школа, 1980. Вып. 29. С. 121–125.
4. *Архангельский Г.В., Горин М.П.* Вопросы отыскания оптимальных движений кинематически управляемых систем // Бесступенчато-регулируемые передачи. Ярославль: Политехн. ин-т, 1984. С. 54–58.

5. *Рачек И.Ю., Аванесьянц А.Г.* Тез. докл. 6-ой конф. по вариаторам и гибким передачам. Одесса, 1980. С. 51.
6. *Рачек И.Ю.* Тез. докл. 6-ой конф. по вариаторам и гибким передачам. Одесса, 1980. С. 65–66.
7. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.
8. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 536 с.
9. *Солтаханов Ш.Х.* Об одном видоизменении принципа Поляхова – Зегжды – Юшкова // Вестн. Ленингр. ун-та. 1990. Сер. 1. Вып. 4. С. 58–61.

С-Петербург

Поступила в редакцию
15.V.1993