МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 531.53

 О.В. ХОЛОСТОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА С ГОРИЗОНТАЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Рассматривается движение маятника, точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические колебания малой амплитуды и высокой частоты. Доказано существование высокочастотных периодических движений маятника малой амплитуды в окрестности трех средних значений углов отклонения маятника от вертикали. Решена задача об устойчивости этих движений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические колебания по закону $a \sin \Omega t$. Пусть амплитуда a мала по сравнению с длиной l маятника (величина $\varepsilon = a/l \ll 1$), а частота колебаний Ω много больше собственной частоты $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ его малых колебаний.

Введем безразмерную частоту ω по формуле $\omega_0^2/\Omega^2 = \varepsilon^2\omega^2$; будем считать, что $\Omega > \omega_0/\varepsilon$, тогда $\omega < 1$. Уравнение движения маятника имеет вид

$$\varphi'' + \varepsilon^2\omega^2 \sin\varphi = \varepsilon \sin\tau \cos\varphi \qquad (1.1)$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, штрих означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \Omega t$.

В [1] доказано существование 2π-периодических решений уравнения (1.1), отвечающих высокочастотным периодическим колебаниям маятника малой амплитуды, и рассмотрена их устойчивость в линейном приближении. Нелинейный, хотя и не вполне математически строгий анализ некоторых аспектов движения маятника с вибрирующим подвесом содержится в [2–4].

В данной работе иным путем, чем в [1], доказано существование 2π-периодических решений уравнения (1.1) и проведен строгий нелинейный анализ их устойчивости.

2. Преобразование гамильтониана методом Депри – Хори. Уравнение (1.1) можно заменить эквивалентной ему системой двух канонических уравнеий

$$d\varphi/d\tau = \partial h/\partial p_\varphi, \quad dp_\varphi/d\tau = -\partial h/\partial\varphi \qquad (2.1)$$

с гамильтонианом

$$h = \frac{1}{2}p_\varphi^2 - \varepsilon^2\omega^2\cos\varphi - \varepsilon\sin\tau\sin\varphi \qquad (2.2)$$

Введем новый малый параметр $e = \sqrt{\varepsilon}$ и положим

$$\varphi = x, \ p_\varphi = eX \qquad (2.3)$$

Тогда новый гамильтониан примет вид

$$H = H_0 + eH_1 + \frac{e^2}{2!}H_2 + \frac{e^3}{3!}H_3$$
$$H_0 = 0, \quad H_1 = \frac{1}{2}X^2 - \sin\tau\sin x, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = -6\omega^2\cos x \tag{2.4}$$

Осуществим каноническую замену переменных $x, X \to y, Y$, исключающую в гамильтониане (2.4) время τ из слагаемых до порядка e^3 включительно. С этой целью воспользуемся методом Деприи – Хори [5]. Преобразованный гамильтониан $K(y, Y, \tau)$ будет иметь следующую структуру:

$$K = K_0 + eK_1 + \frac{e^2}{2!}K_2 + \frac{e^3}{3!}K_3 + \ldots \tag{2.5}$$

Здесь $K_0 = 0$, а функции K_1, K_2, K_3 определяются из соотношений [5]:

$$K_1 = H_1 - DW_1/(D\tau)$$
$$K_2 = H_2 + L_1H_1 + K_{1,1} - DW_2/(D\tau)$$
$$K_3 = H_3 + L_1H_2 + 2L_2H_1 + 2K_{1,2} + K_{2,1} - DW_3/(D\tau)$$

где $DW_i / D\tau = \partial W_i / \partial\tau - L_iH_0$, $L_j f = (f, W_j)$ – скобка Пуассона функций f и W_j, $K_{1,1} = L_1K_1$, $K_{1,2} = L_1K_2$, $K_{2,1} = L_2K_1 - L_1K_{1,1}$, а функции $W_i(y, Y, \tau)$ ($i = 1, 2, 3$) подбираются так, чтобы величины K_i ($i = 1, 2, 3$) не содержали τ.

Так как $H_0 = 0$, то $DW_i/D\tau \equiv \partial W_i/\partial\tau$, и нахождение функций W_i значительно упрощается. Вычисления показывают, что

$$K_1 = 1/2Y^2, \quad W_1 = \cos\tau\sin y$$
$$K_2 = 0, \quad W_2 = -2Y\sin\tau\cos y \tag{2.6}$$
$$K_3 = -6\omega^2\cos y + 3/2\cos^2 y, \quad W_3 = -5/4\sin 2\tau\cos^2 y + 6Y^2\cos\tau\sin y$$

Одновременно с преобразованием гамильтониана ищется соответствующая каноническая замена переменных, имеющая вид

$$x = y + ey^{(1)} + \frac{e^2}{2!}y^{(2)} + \frac{e^3}{3!}y^{(3)} + \frac{e^4}{4!}y^{(4)} + \ldots \tag{2.7}$$
$$X = Y + eY^{(1)} + \frac{e^2}{2!}Y^{(2)} + \frac{e^3}{3!}Y^{(3)} + \frac{e^4}{4!}Y^{(4)} + \ldots$$

где функции $y^{(i)}(y, Y, \tau)$ и $Y^{(i)}(y, Y, \tau)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) могут быть получены с использованием соотношений (2.6) и формул метода Деприи – Хори, которые здесь не приводятся.

Функции $y^{(i)}$ и $Y^{(i)}$ имеют вид

$$y^{(1)} = 0, \quad Y^{(1)} = -\cos\tau\cos y$$
$$y^{(2)} = -2\sin\tau\cos y, \quad Y^{(2)} = -2Y\sin\tau\sin y \tag{2.8}$$
$$y^{(3)} = 12Y\cos\tau\sin y, \quad Y^{(3)} = -3/4\sin 2\tau\sin 2y - 6Y^{(2)}\cos\tau\cos y$$
$$y^{(4)} = 3/2\sin 2y(\cos 2\tau - 8) - 72Y^2\sin\tau\cos y$$
$$Y^{(4)} = 3Y(8\cos^2 y + 4\cos^2\tau - 5\cos 2\tau\cos 2y) - 24Y^3\sin\tau\sin y$$

Подставляя функции K_i из (2.6) в (2.5) и делая замену $y, Y \to \psi, p_\psi$ по формулам

$$y = \psi,\ \ Y = p_\psi / e \tag{2.9}$$

получим искомый гамильтониан Γ вида

$$\Gamma = 1/2p_\psi^2 + 1/4\varepsilon^2(\cos^2\psi - 4\omega^2\cos\psi) + O(\varepsilon^3) \tag{2.10}$$

3. Положения равновесия системы с укороченным гамильтонианом и их устойчивость. Отбросим сначала в (2.10) члены $O(\varepsilon^3)$ и получим укороченный гамильтониан γ вида

$$\gamma = 1/2p_\psi^2 + 1/4\varepsilon^2(\cos^2\psi - 4\omega^2\cos\psi) \tag{3.1}$$

отвечающий консервативной системе с одной степенью свободы с потенциальной энергией

$$\Pi = 1/4\varepsilon^2\Pi_0,\ \ \Pi_0 = \cos^2\psi - 4\omega^2\cos\psi$$

Эта система имеет три типа положений равновесия: $\psi_1 = 0, p_\psi = 0$; $\psi_2 = \pi, p_\psi = 0$; $\psi_3 = \pm\arccos 2\omega^2, p_\psi = 0$. Положение равновесия третьего типа существует только при условии $2\omega^2 < 1$, или, в исходных обозначениях, при условии

$$\Omega^2a^2 > 2gl \tag{3.2}$$

На основании теоремы Лагранжа об устойчивости положений равновесия консервативной системы получим, что положение равновесия второго типа всегда неустойчиво; положение равновесия первого типа устойчиво при условии $2\omega^2 > 1$, или, в исходных обозначениях, при условии

$$\Omega^2a^2 < 2gl \tag{3.3}$$

и неустойчиво в противном случае. Положение равновесия третьего типа устойчиво всюду в области своего существования (3.2).

Фазовые портреты системы с гамильтонианом (3.1) в областях (3.2) и (3.3) приведены на фиг. *a* и *b* соответственно.

4. Существование и устойчивость 2π-периодических движений маятника. Переходя к полной системе с гамильтонианом (2.10), заметим, что в окрестности каждого из положений равновесия укороченной системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную. Корни характеристического уравнения ее линейной части имеют порядок ε, тогда как период возмущающей силы равен 2π. Имеет место нерезонансный случай метода малого параметра Пуанкаре [1] и, следовательно, из каждого положения равновесия $\psi = \psi_i, p_\psi = 0$ укороченной системы рождается единственное 2π-периодическое решение полной системы с периодическими членами порядка ε^3 и выше.

Осуществим теперь переход к исходным переменным φ, p_φ задачи. Так как порядок периодических членов полной системы (с гамильтонианом (2.10)) равен ε^3 и выше, то, не нарушая точности вычислений, достаточно в соотношения (2.3), (2.7)–(2.9) подставить равновесные значения $\psi = \psi_i, p_\psi = 0$ укороченной системы. При этом каждому 2π-периодическому решению системы с гамильтонианом (2.10) отвечает единственное 2π-периодическое решение исходной системы (2.1), (2.2), описывающей движение маятника. Выпишем явный вид этих решений

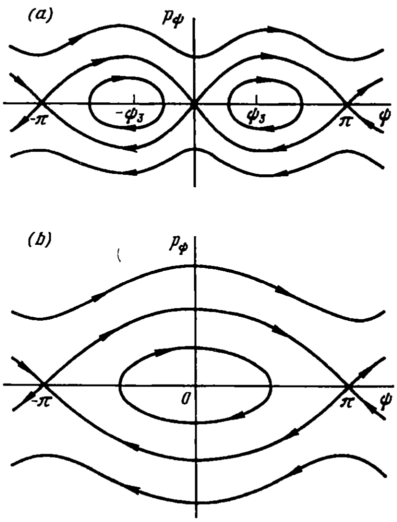
$$\varphi = -\varepsilon\sin\tau + O(\varepsilon^3),\ \ p_\varphi = -\varepsilon\cos\tau + O(\varepsilon^3) \tag{4.1}$$

$$\varphi = \pi + \varepsilon\sin\tau + O(\varepsilon^3),\ \ p_\varphi = \varepsilon\cos\tau + O(\varepsilon^3) \tag{4.2}$$

$$\varphi = \pm\arccos 2\omega^2 - 2\varepsilon\omega^2\sin\tau \pm 1/4\varepsilon^2\omega^2\sqrt{1-4\omega^4}(\cos 2\tau - 8) + O(\varepsilon^3) \tag{4.3}$$

$$p_\varphi = -2\varepsilon\omega^2\cos\tau \mp 1/2\varepsilon^2\omega^2\sqrt{1-4\omega^4}\sin 2\tau + O(\varepsilon^3)$$

Решения (4.1)–(4.3) описывают колебания маятника с малой амплитудой ($\sim\varepsilon$) и



высокой частотой Ω в окрестности средних значений угла φ, представляющих собой равновесные значения угла ψ системы с гамильтонианом (3.1).

Рассмотрим вопрос об устойчивости этих решений. Периодические решения (4.2) и (4.1) (при условии (3.2)), отвечающие неустойчивым положениям равновесия укороченной системы, также неустойчивы в силу непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения (4.1) при условии (3.3). Пусть $\psi = \psi_*(\tau)$, $p_\psi = p_{\psi*}(\tau)$ – соответствующее ему 2π-периодическое решение системы с гамильтонианом (2.10). Полагая $\psi = \psi_*(\tau) + q$, $p_\psi = p_{\psi*}(\tau) + p$, запишем гамильтониан возмущенного движения в виде

$$\Gamma = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2(2\omega^2 - 1)q^2 + \frac{2-\omega^2}{24}\varepsilon^2 q^4 + \varepsilon^3 f(q, p, \tau, \varepsilon) + O_5 \qquad (4.4)$$

где $f(q, p, \tau, \varepsilon)$ – аналитическая по ε, 2π-периодическая по τ функция, содержащая члены второй, третьей и четвертой степени по q и p; O_5 здесь и далее – совокупность членов пятой и более высоких степеней по q и p с 2π-периодическими по τ коэффициентами.

Положим $q = \sqrt{\varepsilon}q_*$, $p = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}p_*$ и с помощью нелинейного 2π-периодического по τ преобразования типа преобразования Биркгофа [5, 6] приведем гамильтониан (4.4) к нормальной форме. Так как в системе отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, то при нормализации члены третьей степени по q_* и p_* уничтожатся, а структура членов второй и четвертой степеней по q_* и p_* упростится, при этом гамильтониан примет вид

$$\Gamma_* = 1/2\varepsilon(\Omega + O(\varepsilon))(q_*^2 + p_*^2) + 1/4\varepsilon^2(c + O(\varepsilon))(q_*^2 + p_*^2)^2 + O((q_*^2 + p_*^2)^{5/2}) \qquad (4.5)$$

$$\Omega = ((2\omega^2 - 1)/2)^{1/2}, \quad c = 1/8(2 - \omega^2)/(2\omega^2 - 1)$$

В (4.5) поправки $O(\varepsilon)$ к величинам Ω и c не зависят от τ, а член $O((q_*^2 + p_*^2)^{5/2})$ является 2π-периодическим по τ.

Так как при достаточно малых значениях ε коэффициент при $(q_*^2 + p_*^2)^2$ отличен от нуля, то, на основании теоремы Арнольда – Мозера [5, 7], рассматриваемое периодическое решение системы с гамильтонианом (2.10) (а значит, и соответствующее ему решение (4.1) исходной системы) устойчиво при условии (3.3).

Аналогично решается вопрос об устойчивости решения (4.3). Полагая $\psi = \psi_*(\tau) + q$, $p_\psi = p_{\psi*}(\tau) + p$ ($\psi = \psi_*(\tau)$, $p_\psi = p_{\psi*}(\tau)$ – соответствующее ему решение системы с гамильтонианом (2.10)), запишем гамильтониан возмущенного движения в виде

$$\Gamma = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2(1 - 4\omega^4)q^2 \pm \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2\sqrt{1 - 4\omega^4}\,q^3 + \frac{7\omega^4 - 1}{12}\varepsilon^2 q^4 + \varepsilon^3 g(q, p, \tau, \varepsilon) + O_5 \qquad (4.6)$$

где функция $g(q, p, \tau, \varepsilon)$ имеет структуру, аналогичную структуре $f(q, p, \tau, \varepsilon)$ в (4.5).

Полагая $q=\sqrt{\varepsilon}q_*$, $p=\varepsilon\sqrt{\varepsilon}p_*$, осуществим нормализацию гамильтониана (4.6). Так как в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, то нормальная форма гамильтониана будет иметь вид (4.5), где теперь $\Omega = ((1-4\omega^4)/2)^{1/2}$, $c = -1/4(8\omega^4+1)/(1-4\omega^4)$. Коэффициент при $(q_*^2+p_*^2)^2$ отличен от нуля при достаточно малых значениях ε, и, на основании теоремы Арнольда – Мозера, рассматриваемое периодическое решение (системы с гамильтонианом (2.10)) устойчиво, а, следовательно, устойчиво и решение (4.3) исходной системы в области своего существования (3.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
2. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–598.
3. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
6. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
7. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.XII.1995