МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 531.38

© 1997 г. А.И. ТКАЧЕНКО

АСТРОКОРРЕКЦИЯ И КАЛИБРОВКА БЕСПЛАТФОРМЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Рассматривается задача калибровки пространственного измерителя угловой скорости в составе бесплатформенной инерциальной системы определения ориентации в процессе коррекции этой системы по информации от астровизиров. Основное внимание уделено анализу наблюдаемости и возможностей оценки параметров модели погрешностей при различных видах сферических движений объекта.

1. Постановка задачи. Вопросы калибровки пространственного измерителя угловой скорости по информации от астровизиров рассмотрены в [1, 2]. Основываясь на результатах этих публикаций, представим дополнительные факторы и возможности, имеющие место при решении задачи калибровки пространственного измерителя угловой скорости в составе бесплатформенной инерциальной системы определения ориентации в процессе коррекции последней с использованием астровизиров.

Рассматриваемый пространственный измеритель угловой скорости представляет собой приборный блок, состоящий из трех одноосных измерителей угловой скорости и жестко связанный с корпусом подвижного объекта. Каждый одноосный измеритель имеет масштабную погрешность и постоянный дрейф. Введем тройку единичных векторов $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$, направленных по осям чувствительности одноосных измерителей угловой скорости и образующих базис $\mathbf{L}$, близкий к ортогональному $|\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_j| \ll 1$ $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$.

Назначением пространственного измерителя угловой скорости считаем измерение координат вектора ω угловой скорости объекта в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{E}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, связанном с приборным блоком так, что его орты близки к $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$. Результаты измерений, которые будем представлять в виде вектора-столбца $\boldsymbol{\omega}^*$, используются при определении ориентации базиса $\mathbf{E}$ относительно ортонормированного инерциального базиса $\mathbf{I}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ путем интегрирования кинематических уравнений сферического движения, например, в форме $P^{\cdot} = P\Phi(\boldsymbol{\omega}_E)$. Здесь $\boldsymbol{\omega}_E = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец, составленный из координат вектора $\boldsymbol{\omega}$ в базисе $\mathbf{E}$, подлежащих измерению (нижним индексом в виде символа базиса отмечается представление вектора в этом базисе, верхний индекс (Т) указывает на транспонирование); P – ортогональная матрица размера 3×3, задающая преобразование координат трехмерного вектора $\mathbf{r}$ из базиса $\mathbf{E}$ в базис $\mathbf{I}$ по формуле $\mathbf{r}_I = P\mathbf{r}_E$; $\Phi(\mathbf{r})$ – кососимметрическая матрица размера 3×3, задающая в конкретном базисе операцию $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \Phi(\mathbf{r})\mathbf{p}$.

Представим погрешность измерения вектора $\boldsymbol{\omega}_E$ в виде вектора $\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}_E$. С целью упрощения структуры погрешности $\Delta\boldsymbol{\omega}$ подчиним выбор базиса $\mathbf{E}$ условиям [3] $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{l}_j \cdot \mathbf{e}_i$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$. Эти условия определяют положение ортов $\mathbf{e}_j$ в базисе $\mathbf{L}$

однозначно (с точностью до величин высшего порядка малости). Тогда

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = S(\boldsymbol{\omega}_E)\mathbf{d} + D(\boldsymbol{\omega}_E)\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{b} \tag{1.1}$$

где $S(\mathbf{r}) = [S_{ij}]$ – симметрическая матрица размера 3×3, которая ставится в соответствие вектору $\mathbf{r} = [r_1\ r_2\ r_3]^{\mathrm{T}}$ по правилу $S_{ij} = |\in_{ijk}|r_k$ ($\in_{ijk}$ – символ Леви – Чивита; $i, j, k = 1, 2, 3$; $k \neq i$, $k \neq j$); $D(\mathbf{r}) = \operatorname{diag}(r_1, r_2, r_3)$; $\mathbf{d} = [d_1\ d_2\ d_3]^{\mathrm{T}} = \mathrm{const}$ – вектор, характеризующий неортогональность триады $\mathbf{L}$ ($d_i = |\in_{ijk}|(\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{l}_k)/2$); $\boldsymbol{\varkappa} = [\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор постоянных погрешностей масштабных коэффициентов; $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ b_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор постоянного дрейфа. Указанный выбор базиса $\mathbf{E}$, упрощающий модель погрешностей, не является единственно возможным [4].

Пусть с корпусом объекта связаны два астровизира с малым полем зрения и с неколлинеарными оптическими осями. Целью астрокоррекции и калибровки пространственного измерителя угловой скорости считаем уточнение найденного значения матрицы P и оценку векторов $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\mathbf{b}$ по информации, поступающей от астровизиров на промежутке наблюдений $[t_0, t_f]$. Решение этой задачи предполагает вывод соотношений, используемых при оценивании, анализ наблюдаемости искомых неизвестных и выбор движений объекта, обеспечивающих полную наблюдаемость или наблюдаемость части оцениваемых параметров.

2. Основные соотношения. Вычисленную аппроксимацию P_* матрицы P представим в виде $P_* = P[E_3 - \Phi(\boldsymbol{\gamma}_E)]$, где E_3 – единичная матрица 3-го порядка, $\boldsymbol{\gamma}_E = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор малой ошибки определения ориентации базиса $\mathbf{E}$ относительно $\mathbf{I}$. В первом приближении

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_E = -\Phi(\boldsymbol{\omega}_E)\boldsymbol{\gamma}_E - \Delta\boldsymbol{\omega}_E \tag{2.1}$$

Свяжем с первым и вторым астровизирами (нумерация произвольна) ортонормированные базисы $\mathbf{J}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ и $\mathbf{K}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$, направив орты $\mathbf{j}_3$ и $\mathbf{k}_3$ по оптическим осям соответствующих астровизиров. Пусть в некоторый момент $t \in [t_0, t_f]$ в поле зрения первого астровизира находится астроориентир, положение которого в базисе $\mathbf{I}$ определяется известным единичным вектором линии визирования $\mathbf{m}_1$. Представление орта линии визирования в базисе $\mathbf{J}$ имеет вид $\mathbf{m}_J = [m_{J1}\ m_{J2}\ m_{J3}]^{\mathrm{T}} = BP^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_I$, где $B = \mathrm{const}$ – ортогональная матрица размера 3×3, задающая положение базиса $\mathbf{J}$ относительно $\mathbf{E}$ и преобразование координат $\mathbf{r}_J = B\mathbf{r}_E$. С помощью астровизира измеряются координаты m_{J1}, m_{J2}.

Пусть вместо истинного значения матрицы B известна ее аппроксимация – ортогональная матрица $B_* \approx [E_3 + \Phi(\boldsymbol{\alpha}_J)]B$, где $\boldsymbol{\alpha}_J = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^{\mathrm{T}} = \mathrm{const}$ – малый вектор, характеризующий рассогласование базиса $\mathbf{J}$ и его числового образа. Найдем вектор $\mathbf{m}^* = B_* P_*^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_I$ – представление орта $\mathbf{m}$ в числовом образе базиса $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{m}^* = [m_1^*\ \ m_2^*\ \ m_3^*]^{\mathrm{T}} \approx \mathbf{m}_J - \Phi(\mathbf{m}_J)(\boldsymbol{\gamma}_J + \boldsymbol{\alpha}_J), \quad \boldsymbol{\gamma}_Z = B\boldsymbol{\gamma}_E \tag{2.2}$$

Так как $|m_{J1}| \ll 1$, $|m_{J2}| \ll 1$, $|m_{J3}| \approx 1$ вследствие предполагаемой близости линии визирования к оптической оси астровизира, то из (2.2) в первом приближении следует по аналогии с [1]:

$$m_1^* - m_{J1} = \mathbf{j}_{2E} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \alpha_2, \quad m_{J2} - m_2^* = \mathbf{j}_{1E} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \alpha_1 \tag{2.3}$$

Векторы-отображения $\mathbf{j}_{1E}$ и $\mathbf{j}_{2E}$ состоят из элементов соответственно первой и второй строк матрицы B.

Наблюдая в тот же момент t с помощью второго астровизира астроориентир с ортом линии визирования $\mathbf{n}$, заданным в базисе $\mathbf{I}$, находим по аналогии с (2.3):

$$n_1^* - n_{K1} = \mathbf{k}_{2E} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \beta_2, \quad n_{K2} - n_2^* = \mathbf{k}_{1E} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E + \beta_1 \tag{2.4}$$

где n_{K1}, n_{K2} – измеренные с помощью второго астровизира проекции орта **n** на направления $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$; $\overset{*}{n}_1$, $\overset{*}{n}_2$ – вычисленные аппроксимации этих проекций; малый вектор $\boldsymbol{\beta}_K = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]^{\mathrm{T}} = \mathrm{const}$ характеризует ошибку задания ориентации базиса **K** относительно **E**.

При оговоренных предположениях орты $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ некомпланарны. Поэтому из (2.3), (2.4) однозначно находится предварительная оценка $\boldsymbol{\gamma}_E$ в момент астроизмерений в виде вектора $\mathbf{y} = [\,y_1\ y_2\ y_3]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\gamma}_E + \mathbf{c},\quad \mathbf{c} = [c_1 c_2 c_3]^{\mathrm{T}} = C_1\boldsymbol{\alpha}^\circ + C_2\boldsymbol{\beta}^\circ \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^\circ = [\alpha_1\ \alpha_2]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}^\circ = [\beta_1\ \beta_2]^{\mathrm{T}}$$

где C_1, C_2 – постоянные матрицы размера 3×2 с ограниченными элементами, инвариантные, в частности, относительно смены астроориентиров в последовательные моменты измерений. Оценку вектора $\mathbf{c} = \mathrm{const}$ включаем в задачу калибровки.

Представим задачу астрокоррекции и калибровки пространственного измерителя угловой скорости как задачу оценки состояния системы

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = A\mathbf{x},\ \mathbf{y} = H\mathbf{x},\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\gamma}_E^{\mathrm{T}}\ \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\varkappa}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}] \tag{2.6}$$

где A, H – матрицы размеров соответственно 15×15 и 13×15, структура которых очевидна из (1.1), (2.1), (2.5).

3. Наблюдаемость при последовательности равномерных вращений объекта. В соответствии с известными определениями и критериями [5] считаем некоторое состояние $\mathbf{x} \neq 0$ системы (2.6) ненаблюдаемым на промежутке $[t', t'']$ ($t_0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_f$) тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} \equiv 0$ при $t \in [t', t'']$. Система (2.6) вполне наблюдаема на промежутке $[t', t'']$ в том и только в том случае, если она не имеет на этом промежутке ненаблюдаемых состояний. Если система (2.6) не вполне наблюдаема на промежутке $[t', t'']$ и некоторая координата любого ненаблюдаемого состояния равна нулю, то соответствующая координата решения системы (2.6) наблюдаема на указанном промежутке.

Как видно из (2.5), любое состояние системы (2.6), ненаблюдаемое на некотором участке промежутка $[t_0, t_f]$, удовлетворяет на этом участке соотношению $\boldsymbol{\gamma}_E = -\mathbf{c}$. Отсюда и из (1.1), (2.1) получаем следующие утверждения.

3.1. Любое состояние **x** системы (2.6), ненаблюдаемое на некотором участке промежутка $[t_0, t_f]$, удовлетворяет на этом участке условию $\mathbf{x} = \mathrm{const}$.

3.2. Любое состояние системы (2.6), ненаблюдаемое на промежутке $[t_0, t_f]$ либо на некотором его участке, удовлетворяет на этом промежутке (участке) условию

$$\Phi(\boldsymbol{\omega}_E)\boldsymbol{\gamma}_E + S(\boldsymbol{\omega}_E)\mathbf{d} + D(\boldsymbol{\omega}_E)\boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{b} \equiv 0 \tag{3.1}$$

3.3. Система (2.6) вполне наблюдаема на промежутке $[t_0, t_f]$ либо на некотором его участке тогда и только тогда, когда тождество (3.1) не имеет на указанном промежутке (участке) решения $\boldsymbol{\gamma}_E = \mathrm{const}$, $\mathbf{d} = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{\varkappa} = \mathrm{const}$, $\mathbf{b} = \mathrm{const}$.

Пусть на каждом из последовательных участков, составляющих промежуток $[t_0, t_f]$, объект вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_E = \boldsymbol{\omega}_{(j)} = \mathrm{const}$ (j – номер участка). При этом система (2.6) является кусочно-постоянной (кусочно-стационарной) на промежутке $[t_0, t_f]$, причем на каждом участке стационарности любое ненаблюдаемое состояние постоянно. Согласно утверждениям доказанных в [6] теорем, условиям которых в данном случае удовлетворяет система (2.6), ненаблюдаемы на всем промежутке $[t_0, t_f]$ те и только те состояния, которые удовлетворяют условию $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t_f$) и ненаблюдаемы на всех участках стационарности (здесь – участках равномерного вращения). Это означает, что система (6.2) в рассматриваемом случае вполне наблюдаема на промежутке $[t_0, t_f]$ тогда и только тогда, когда система уравнений (3.1), составленных для всех участков равномерного вращения, не имеет нетривиального решения относительно $\boldsymbol{\gamma}_E = \text{const}$, $\mathbf{d} = \text{const}$, $\varkappa = \text{const}$, $\mathbf{b} = \text{const}$.

Составим систему уравнений (3.1) для четырех различных участков равномерного вращения, присвоив им номера 1, 2, 3, 4. В результате замены неизвестных

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi_1\, \xi_2\, \xi_3]^{\mathrm{T}} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\gamma}_E, \quad \boldsymbol{\eta} = [\eta_1\, \eta_2\, \eta_3]^{\mathrm{T}} = \mathbf{d} - \boldsymbol{\gamma}_E \tag{3.2}$$

указанная система уравнений распадается на три подсистемы:

$$G\mathbf{z}_1 = 0,\ G\mathbf{z}_2 = 0,\ G\mathbf{z}_3 = 0$$

$$\mathbf{z}_1 = [\varkappa_1\ \ \xi_3\ \ \eta_2\ \ b_1]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{z}_2 = [\eta_3\ \ \varkappa_2\ \ \xi_1\ \ b_2]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{z}_3 = [\xi_2\ \ \eta_1\ \ \varkappa_3\ \ b_3]^{\mathrm{T}} \tag{3.3}$$

$$G^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\langle 1 \rangle} & \boldsymbol{\omega}_{\langle 2 \rangle} & \boldsymbol{\omega}_{\langle 3 \rangle} & \boldsymbol{\omega}_{\langle 4 \rangle} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

Система (2.6) при рассматриваемом характере вращений объекта вполне наблюдаема на промежутке $[t_0, t_f]$ тогда и только тогда, когда угловые скорости на каких-либо четырех участках равномерного вращения удовлетворяют условию $\det G \neq 0$. Это условие выполняется, если при каком-либо конкретном k три вектора $\boldsymbol{\omega}_{\langle j \rangle} - \boldsymbol{\omega}_{\langle k \rangle}$ $(j \neq k)$ некомпланарны. В частности, если $\boldsymbol{\omega}_{\langle 1 \rangle} = 0$, то условие полной наблюдаемости сводится к требованию некомпланарности векторов $\boldsymbol{\omega}_{\langle 2 \rangle}$, $\boldsymbol{\omega}_{\langle 3 \rangle}$, $\boldsymbol{\omega}_{\langle 4 \rangle}$. Этот результат подобен полученному в [1], но относится к иной модели погрешностей.

Если последовательность равномерных вращений объекта не удовлетворяет сформулированному условию полной наблюдаемости, то ненаблюдаемой на промежутке $[t_0, t_f]$ может быть, вообще говоря, любая координата вектора $\mathbf{x}$.

4. Последовательность поворотов, включающая неравномерные вращения. Пусть хотя бы одно из последовательных вращений объекта вокруг неизменных направлений на участках, составляющих промежуток $[t_0, t_f]$, совершается с переменной по величине угловой скоростью. Нетрудно убедиться, что любое решение тождества (3.1) на участке неравномерного вращения имеет составляющую $\mathbf{b} = 0$. Это означает, что координаты b_1, b_2, b_3 в составе решения системы (2.6) наблюдаемы на участке неравномерного вращения и, следовательно, на промежутке $[t_0, t_f]$. Система (2.6) вполне наблюдаема, если некомпланарны направление угловой скорости на участке неравномерного вращения и неизменные направления вращений на каких-либо двух других участках промежутка $[t_0, t_f]$, на которых угловая скорость также может быть переменной по величине. Действительно, в этом случае можно удовлетворить условию $\det G \neq 0$, выбрав в качестве $\boldsymbol{\omega}_{\langle 1 \rangle}$, $\boldsymbol{\omega}_{\langle 2 \rangle}$, неодинаковые значения $\boldsymbol{\omega}_E$ в двух точках участка неравномерного вращения, а в качестве $\boldsymbol{\omega}_{\langle 3 \rangle}$, $\boldsymbol{\omega}_{\langle 4 \rangle}$ – по одному значению $\boldsymbol{\omega}_E$ на вышеупомянутых двух других участках. В то же время при наличии в составе промежутка $[t_0, t_f]$ только двух участков вращения вокруг неизменных направлений полная наблюдаемость системы (2.6) не может быть обеспечена никаким варьированием величины угловой скорости на каждом из участков (в предположении, что направление вращения меняется мгновенно на границе участков).

Подчеркнем, что под направлениями вращений здесь понимаются соответствующие направления, заданные в базисе $\mathbf{E}$, т.е. "в теле" объекта.

5. Наблюдаемость при перманентном сферическом движении. Если объект совершает на промежутке $[t_0, t_f]$ перманентное (свободное или управляемое) сферическое движение, характеризуемое непрерывным изменением $\boldsymbol{\omega}_E$ по некоторму закону $\boldsymbol{\omega}_E =$ $= \boldsymbol{\omega}_E(t)$, то система (2.6) вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда на указанном промежутке найдутся моменты t_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, такие, что матрица G, составленная из векторов $\boldsymbol{\omega}_E(t_j)$ по аналогии с (3.4), невырожденна. Если таких моментов t_j нет, то некоторая координата вектора состояния системы (2.6), преобразованного по формулам (3.2), ненаблюдаема на промежутке $[t_0, t_f]$ тогда и только тогда, когда среди векторов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$, принадлежащих ядру любой матрицы G на упомянутом промежутке, найдется хотя бы один вектор с отличным от нуля значением соответствующей координаты.

В качестве примеров рассмотрим наблюдаемость системы (2.6) при двух видах сферического движения динамически симметричного объекта. Пусть орты базиса $\mathbf{E}$ направлены по главным осям инерции объекта, причем орт $\mathbf{e}_3$ – по оси динамической симметрии. Если объект совершает на промежутке $[t_0, t_f]$ свободное движение (регулярную процессию), то [7]:

$$\omega_1 = \omega^\circ \sin(a\overset{\circ}{\omega}_3 t + \delta), \quad \omega_2 = \omega^\circ \cos(a\overset{\circ}{\omega}_3 t + \delta), \quad \omega_3 = \overset{\circ}{\omega}_3 \tag{5.1}$$

где $a = (I - J)/J$ (I, J – экваториальный и полярный моменты инерции объекта); постоянные ω°, δ, $\overset{\circ}{\omega}_3$ определяются начальными условиями. В этом случае $\det G = 0$, $\operatorname{rank} G \leqslant 3$ при любом выборе четырех точек t_j на промежутке $[t_0, t_f]$ и ядро любой матрицы G ранга 3 определяется с точностью до скалярного множителя вектором $[0\ \ 0\ -1\ \ \overset{\circ}{\omega}_3]^{\mathrm{T}}$. Как видно из (3.3), наблюдаемыми в данном случае оказываются величины $\xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_3, \varkappa_1, \varkappa_2$, а также, на основании (2.5), (3.2), величина c_3. Ненаблюдаемы координаты $\xi_1, \eta_2, \varkappa_3, b_1, b_2, b_3$, а также c_1, c_2.

Вектор $\boldsymbol{\omega}_E$, изменяясь по закону (5.1), сохраняет постоянную длину и описывает в теле объекта круговой конус с осью, направленной по $\mathbf{e}_3$. Геометрический смысл тождества $\det G \equiv 0$ состоит в том, что вектор разности некоторого фиксированного значения $\boldsymbol{\omega}_E$ и любой другой образующей конуса лежит в плоскости основания конуса.

Пусть, в отличие от принятого выше, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$ к объекту приложен направленный по $\mathbf{e}_3$ момент $M = \text{const}$. При этом закон изменения $\boldsymbol{\omega}_E$ можно представить в виде

$$\omega_1 = \omega^\circ \sin[a(\overset{\circ}{\omega}_3 t + \mu t^2/2) + \delta^\circ]$$

$$\omega_2 = \omega^\circ \cos[a(\overset{\circ}{\omega}_3 t + \mu t^2/2) + \delta^\circ], \quad \omega_3 = \overset{\circ}{\omega}_3 + \mu t, \quad \mu = M/J$$

Постоянные $\omega^\circ, \delta^\circ, \overset{\circ}{\omega}_3$ выражаются через начальные условия. В этом случае найдутся четыре точки $t_j \in [t_0, t_f]$, в которых $\boldsymbol{\omega}_E$ удовлетворяет условию $\det G \neq 0$, так что система (2.6) вполне наблюдаема на промежутке $[t_0, t_f]$.

6. Использование единственного астровизира. Пусть для оценивания вектора $\boldsymbol{\gamma}_E$ и параметров модели погрешностей (1.1) используются показания только одного астровизира, с которым связан базис $\mathbf{J}$. Удобно представить выражения (1.1), (1.2) в базисе $\mathbf{J}$, преобразовав фигурирующие в них матрицы и векторы с помощью матрицы B. Поскольку при этом структура упомянутых выражений и матриц не изменяется [1], можно без ущерба для общности принять, что базис $\mathbf{J}$ с точностью до ошибки $\boldsymbol{\alpha}_J$ совпадает с $\mathbf{E}$. Оцениванию подлежат 14 координат вектора $\mathbf{x}_*^{\mathrm{T}} = [[\boldsymbol{\gamma}_E^{\mathrm{T}}\ \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\varkappa}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\ \alpha_1\ \alpha_2]$. В качестве измерений используются выражения (2.3), представленные в виде $y_1 = \gamma_1 + \alpha_1$, $y_2 = \gamma_2 + \alpha_2$. Стандартное представление системы, состояние которой подлежит оценке:

$$\dot{\mathbf{x}}_* = A_*\mathbf{x}_*, \quad \mathbf{y}_* = [y_1\ \ y_2]^{\mathrm{T}} = H_*\mathbf{x}_* \tag{6.1}$$

где A_* – левый верхний блок размера 14×14 матрицы A, H_* – матрица размера 2×14.

Ограничимся случаем равномерных вращений объекта вокруг направлений, фиксированных в базисе **E**, на последовательных участках промежутка $[t_0, t_f]$. Очевидно, любое состояние системы (6.1), ненаблюдаемое на промежутке $[t_0, t_f]$, удовлетворяет требованиям $\gamma_1 = \text{const}$, $\gamma_2 = \text{const}$. На каждом участке стационарности, где выполняется условие

$$|\omega_1| + |\omega_2| \neq 0 \qquad (6.2)$$

т.е. направление оси вращения объекта не совпадает с оптической осью астровизира, упомянутые требования к ненаблюдаемым состояниям выполняются, как видно из (2.1), только при $\gamma_3 = \text{const}$. Таким образом, и в этом варианте задачи астрокоррекции и калибровки правомерно применение результатов работы [6], из которых следует, что любое состояние системы (6.2), ненаблюдаемое на всем промежутке $[t_0, t_f]$, постоянно на это промежутке и ненаблюдаемо на всех участках равномерного вращения. Отсутствие таких состояний является необходимым и достаточным условием полной набюдаемости системы (6.1) в рассматриваемом случае. Поэтому система (6.1) формально вполне наблюдаема на промежутке $[t_0, t_f]$, если в его составе имеются 4 участка равномерного вращения с угловыми скоростями, удовлетворяющими условию (6.2) и требованию $\det G \neq 0$, где G – матрица из (3.4).

На каждом участке равномерного вращения, где выполняется условие (6.2), линейно независимыми строками "локальной" матрицы наблюдаемости для этого участка $Q = [H_*^{\mathrm{T}} \ \ A_*^{\mathrm{T}} H_*^{\mathrm{T}} \ \ (A_*^{\mathrm{T}})^2 H_*^{\mathrm{T}} \ldots]^{\mathrm{T}}$ являются строки матрицы H_*, одинаковые для всех участков, а также строки матрицы $H_* A_*$ и одна из строк матрицы W на данном участке

$$W = H_* A_*^2 + \begin{Vmatrix} 0 & \omega_3 \\ -\omega_3 & 0 \end{Vmatrix} H_* A_*$$

При этом

$$H_* A_* x_* = [\gamma_1^{\cdot} \ \ \gamma_2^{\cdot}], \quad W x_* = [-\omega_2 \gamma_3^{\cdot} \ \ \omega_1 \gamma_3^{\cdot}]^{\mathrm{T}} \qquad (6.3)$$

Если угловые скорости объекта на четырех участках равномерного вращения удовлетворяют условию $\det G \neq 0$, то в составе общей матрицы наблюдаемости, сформированной по правилу работы [6] из расположенных последовательно друг под другом матриц наблюдаемости для отдельных участков, имеются 14 линейно независимых строк, образующих базис в пространстве состояний системы (6.1). Это согласуется с выводом о полной наблюдаемости системы (6.1) на промежутке $[t_0, t_f]$. Если, однако, при этом $|\omega_1| \ll 1$, $|\omega_2| \ll 1$, то, как видно из (6.3), норма каждой строки матрицы W мала по сравнению с нормами строк матрицы $H_* A_*$. Это означает, что при выполнении условия $\det G \neq 0$ хорошо наблюдаемы на промежутке $[t_0, t_f]$ координаты векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ из (3.3). Координаты вектора $\mathbf{z}_3$ слабо наблюдаемы по крайней мере при относительно коротких участках стационарности. Этим рассматриваемая здесь ситуация отличается от *п.* 3, где линейно независимыми строками локальных матриц наблюдаемости для отдельных участков стационарности являются строки матриц H и HA. В исходной системе неизвестных слабо наблюдаемы величины γ_1, γ_2, d_1, d_2, $\varkappa_3$, b_3, а также α_1 и α_2.

Координаты, охарактеризованные выше как слабо наблюдаемые при малых ω_1, ω_2, остаются таковыми при любом увеличении числа участков равномерного вращения и любых изменениях направлений вращения на границах участков, так как в любом наборе строк матрицы H_* и строк матриц $H_* A_*$ на различных участках число линейно независимых строк не превышает 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров С.Н., Корабельщиков В.В., Суринский Д.М.* Калибровка гироинерциальных измерителей систем ориентации по информации от неподвижных астровизиров // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 7–12.
2. *Потапенко Е.М.* Калибровка датчиков ориентации // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 11–17.
3. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. Киев: Наук. думка, 1991. 203 с.
4. *Бобрик Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока ньютонометров // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 8–14.
5. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1982. 200 с.
6. *Goshen-Meskin D., Bar-Itzhack I.Y.* Observability analysis of piece-wise constant systems – part I: theory // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Syst. 1992. V. 28. № 4. P. 1056–1067.
7. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Киев

Поступила в редакцию
28.VI.1995