МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 531.53

© 1997 г. Л.Д. АКУЛЕНКО

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Исследуются задачи оптимального управления пространственными движениями сферического маятника в различных постановках. Введен малый параметр, характеризующий величину амплитуды колебаний, длину пути перемещения точки подвеса и интервал времени. Асимптотическими методами на основе принципа максимума эффективно построены приближенные законы управления в форме программы и синтеза, оптимальные траектории и функционалы. Рассмотрены задачи типа терминального управления без ограничений на регулируемое ускорение, а также с ограничениями в задаче оптимального быстродействия.

Исследование задач управления колебательными системами представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. В приложениях имеется много механических моделей управляемых колебательных и вращательных систем: осцилляторы, маятники, орбитальные системы, в том числе тросовые, упругие конструкции, в частности манипуляторы, грузоподъемные машины и механизмы и др. [1–3]. В ряде практически важных случаев эффективное управляющее воздействие на колебательные системы осуществляется посредством регулируемого изменения положения равновесия, например, точки подвеса маятника. Такую весьма содержательную модель предложил для исследования А.Ю. Ишлинский [2, 3].

Некоторые задачи управления и оптимизации изучались ранее, в основном, в одномерной постановке плоских колебаний [1–3]. Конструктивное решение задачи о перемещении пространственного маятника с гашением колебаний в конце процесса и других, в более общей постановке, не построено. Предварительные результаты, имеющие постановочный и наводящий характер, изложены в [2].

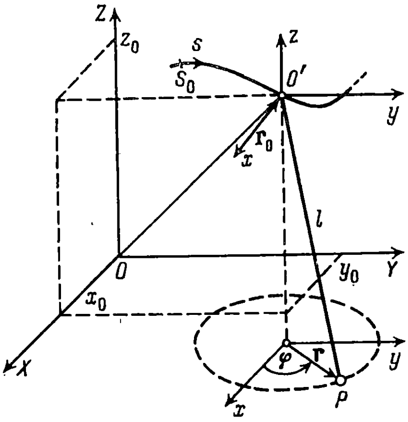
Рассмотрим задачу оптимального управления относительными колебаниями и поступательными перемещениями сферического маятника в различных постановках. Исследуем ситуацию, когда управляющим воздействием является ускорение точки подвеса в горизонтальной плоскости.

1. Уравнения движения и постановка задачи управления. Рассматриваются пространственные колебания математического маятника $O'P$ с подвижной точкой подвеса $\mathbf{r}_0(t)$ (см. фигуру). Предполагается, что реакция связи положительна [1–3]. Следуя [2], выпишем уравнения управляемого движения в проекции на горизонтальную плоскость xy. Вертикальная координата z исключается при помощи уравнения связи, характеризующего постоянство длины l маятника. Вводятся безразмерные переменные на основе масштабов длины l и времени ν^{-1}, где $\nu = (g/l)^{1/2}$ – частота малых колебаний. В результате получаются уравнения движения в полярной подвижной системе координат

$$\ddot{r}/\rho^2 + r\dot{r}^2/\rho^4 - r\dot{\varphi}^2 + r/\rho = -w_r, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -w_\varphi \tag{1.1}$$

$$w_r = \ddot{x}_0 \cos\varphi + \ddot{y}_0 \sin\varphi + \ddot{z}_0 r/\rho, \quad w_\varphi = -\ddot{x}_0 \sin\varphi + \ddot{y}_0 \cos\varphi, \quad \rho = (1 - r^2)^{1/2}$$

Здесь r, φ – полярные координаты, $0 < r < 1$; $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0$ – компоненты абсолютного



Фиг

безразмерного ускорения точки подвеса O' в инерциальной декартовой системе, w_r – радиальная, w_φ – трансверсальная составляющие ускорения. Предполагается, что колебания маятника невелики и происходят в окрестности нижнего положения равновесия ($z < 0$). При $w_r = w_\varphi \equiv 0$ уравнения (1.1) с точностью до членов $O(r^3)$ описывают колебания плоского линейного осциллятора.

Отметим, что система (1.1) неудобна для постановки и решения задач управления с гашением колебаний вследствие ее вырожденности при $r = 0$. Однако эти соотношения позволяют просто получить уравнения движения в декартовых координатах (в проекциях на горизонтальную плоскость). Будем далее предполагать, что ускорение точки подвеса $\mathbf{w}$ и амплитуда колебаний r_{max} малы. Это требование может быть формализовано введением малого параметра ε, например, следующим образом:

$$r = \varepsilon^{1/2} r', \quad \mathbf{r}_0 = \varepsilon^{1/2}\mathbf{r}_0', \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 = \varepsilon^{1/2}\mathbf{v}_0' \tag{1.2}$$

$$\ddot{x}_0 = \varepsilon^{3/2} u_x, \quad \ddot{y}_0 = \varepsilon^{3/2} u_y, \quad \ddot{z}_0 = \varepsilon^2 u_z$$

Штрих далее опускается. С погрешностью $O(\varepsilon^2)$ уравнения движения в декартовых координатах принимают вид

$$\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \varepsilon\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{r}[r^2(1/2 - \dot{\varphi}^2) - \dot{r}^2] \tag{1.3}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \quad \mathbf{R} = (X,\ Y), \quad \mathbf{r}_0 = (x_0,\ y_0), \quad \mathbf{r} = (x,\ y)$$

$$\mathbf{r}^2 = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \dot{\varphi} = r^{-2}(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Система (1.3) более удобна для целей решения задачи управления с условием отсутствия относительных колебаний ($\mathbf{r} = 0$). Отметим, что в исходной постановке задачи управления функция $\mathbf{r}_0(t)$ предполагается медленной, например, в смысле (1.2), т.е. $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \varepsilon^{3/2}\mathbf{u}$, где управляющее воздействие $\mathbf{u}$ ограничено, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Переходя к переменной $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{r}_0$, характеризующей относительное перемещение точки P (маятника), получим уравнение управляемых движений квазилинейного плоского осциллятора, обобщающего модель, изученную в [2]:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} = -\varepsilon\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}}) \tag{1.4}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{v}}_0 = \varepsilon\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in U \quad (\mathbf{f}(0,\ \dot{\mathbf{r}}) \equiv 0)$$

Для системы (1.4) могут быть поставлены и решены задачи оптимального управления относительными колебаниями маятника. Разработанный эффективный метод усреднения [1–3] позволяет строить приближенные оптимальные управления как в форме программы, так и синтеза, а также соответствующие оптимальные траектории и функционал [2]. Для приложений представляет интерес постановка следующих задач: увеличение или уменьшение полной энергии колебаний или величины кинетического момента; изменение формы эллиптической орбиты от отрезка прямой до окружности; поворот осей эллипса, в частности, указанного отрезка прямой; управление движением по фиксированной орбите и др. Наряду с задачами управления относительными колебаниями маятника модель (1.4) позволяет исследовать задачи управления совместными движениями точки подвеса $\mathbf{r}_0$ и маятника $\mathbf{r}$. Указанная система может быть реализована приближенно при помощи двухмассовой модели, состоящей из несущего массивного тела, к которому прилагается сила, и несомого маятника, влиянием которого на несущее тело можно пренебречь.

Уравнениям движения (1.3) можно придать качественно другую форму, если полагать переменную $\mathbf{r}_0$ медленной в другом смысле: $\dot{\mathbf{r}}_0 = \varepsilon \mathbf{v}_0$, $|\mathbf{v}| \sim 1$, $\mathbf{v} \in V$. Такая ситуация имеет место, когда точка подвеса приводится в движение с ограниченной малой скоростью посредством электромеханических приводов, постоянные времени которых малы по сравнению с периодом колебаний маятника [1–3]. На основе уравнения (1.3) получается управляемая система с медленно изменяющимся положением равновесия вида

$$\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} - \mathbf{r}_0 = \varepsilon \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \varepsilon \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in V \tag{1.5}$$

Для системы (1.5) также могут быть поставлены и решены содержательные в прикладном аспекте задачи оптимального управления относительными колебаниями маятника совместно с перемещением точки подвеса. Отметим, что при выводе уравнений (1.3), (1.5) отбрасываются члены $O(\varepsilon^2 |\ddot{\mathbf{r}}_0|)$, которые могут быть малыми только в интегральном смысле, поскольку при релейном изменении $\mathbf{v}$ функции $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$, $\ddot{z}_0$ имеют характер обобщенных дельта-функций Дирака. Обоснование перехода к уравнениям вида (1.5) проводится на основе введения переменных Рауса [2].

Далее подробно изучается задача управления движениями маятника с регулируемым ускорением точки подвеса. Задача перемещения маятниковой системы вдоль криволинейной трассы с регулируемой скоростью движения точки подвеса вдоль кривой требует другого подхода и заслуживает отдельного исследования [2].

2. Управление относительными колебаниями маятника посредством ускорения точки подвеса. Уравнения колебаний маятника (1.4) при $\varepsilon = 0$ допускают элементарное полное интегрирование (линейный осциллятор). Для дальнейшего исследования более удобно представить эти интегралы и общее решение в полярных координатах

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) + \tfrac{1}{2} r^2 = E \geqslant 0, \quad r v_\varphi = K, \quad |K| \leqslant E \\
v_r = \dot{r} = d(E/Q)^{1/2} \cos 2\psi, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = K(EQ)^{-1/2} \\
r = (EQ)^{1/2}, \quad \varphi = \delta + \operatorname{arctg}[(\operatorname{tg}\psi + d)(1-d^2)^{-1/2}] \\
Q = 1 + d \sin 2\psi, \quad d = (1 - K^2/E^2)^{1/2}, \quad \psi = t + \gamma
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь v_r, v_φ – радиальная и трансверсальная составляющая скорости точки P; E – полная энергия; K – кинетический момент (K, $\dot{\varphi} \geqslant 0$ для определенности); δ – угловая постоянная, характеризующая ориентацию осей эллипса; ψ – фаза, γ – фазовая добавка. Величины E, K, δ, γ постоянны; параметр d определяет эксцентриситет e орбиты: $e = d[1 + (1-d^2)^{1/2}]^{-1}$, $0 \leqslant e \leqslant 1$. С помощью оскулирующих переменных E, K (или d), δ, γ (или ψ) удобно описывать элементы управляемых орбитальных движений (возмущенного эллипса) при $\varepsilon > 0$.

Продифференцируем интегралы E, K, δ, γ в силу возмущенной системы (1.4):

$$\begin{gathered}
\dot{E} = \varepsilon v_r (u_r + f) + \varepsilon v_\varphi u_\varphi, \quad \dot{K} = \varepsilon r u_\varphi \\
\dot{\delta} = -\varepsilon [v_r (u_r + f)/E + (v_\varphi / E - r/K) u_\varphi](1-d^2)^{1/2} (dQ)^{-1} (\cos\psi + d \sin\psi)\cos\psi \\
\dot{\gamma} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{d + \sin 2\psi}{d(EQ)^{1/2}} (u_r + f) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{K \cos 2\psi}{d(E^3 Q)^{1/2}} u_\varphi \\
f = r^3 (\tfrac{1}{2} - v^2 r^{-2}), \quad u_r = -u_x \cos\varphi - u_y \sin\varphi, \quad u_\varphi = u_x \sin\varphi - u_y \cos\varphi
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для системы (2.2) удобно поставить и исследовать задачу орбитального движения точки P при помощи воздействий u_r, u_φ. В частности, рассмотрим упрощенную задачу оптимального управления формой и размерами эллипса для некоторого фиксированного значения $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, см. [2], без учета ограничений на $\mathbf{u}$:

$$E(0)=E^0, \quad K(0)=K^0, \quad \delta(0)=\delta^0, \quad \gamma(0)=\gamma^0$$

$$c_E^2[E(T)-E^*]^2+c_K^2[K(T)-K^*]^2=0 \tag{2.3}$$

$$J[\mathbf{u}]=\varepsilon\int_0^T \mathbf{u}^2dt \to \min, \quad |\mathbf{u}|<\infty$$

где c_E^2, c_K^2 – постоянные ($c_E^2+c_K^2>0$), причем c_E^2, $c_K^2 \geqslant 0$.

Применим методы теории оптимального управления в форме принципа максимума [4] и асимптотическую процедуру метода усреднения [2, 5]. Заметим, что переменная δ не содержится в правых частях уравнений (2.2), поэтому соответствующая ей сопряженная переменная $p_\delta \equiv 0$, поскольку $p_\delta(t)$ = const, $p_\delta(T) = 0$. Далее, так как усредненная функция Гамильтона задачи не содержит γ, то $p_\gamma(t) = O(\varepsilon)$ для $t \sim \varepsilon^{-1}$. Отметим также, что усреднение величины $p_E v_r f$ дает нуль, поскольку в первом приближении по ε переменная p_E медленная. Усреднение по t (т.е. по ψ) приводит к гамильтоновой системе, описывающей переменные E, K, p_E, p_K в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ с функцией Гамильтона h, и приближенному управлению u_r^*, u_φ^*:

$$h=\tfrac{1}{4}E(p_E^2+p_K^2)+\tfrac{1}{2}Kp_Ep_K=\text{const} \tag{2.4}$$

$$u_r^*=\tfrac{1}{2}p_E v_r, \quad u_\varphi^*=\tfrac{1}{2}(p_E v_\varphi+p_K r)$$

Интегрирование системы с гамильтонианом (2.4) и построение решения краевой задачи представляет определенный методический интерес и поэтому дадим их краткое изложение. Оказывается более удобным перейти от переменных E, K и p_E, p_K к попарным суммам S, Σ и по разностям D, Δ:

$$S^\bullet=\tfrac{1}{2}S\Sigma, \quad D^\bullet=\tfrac{1}{2}D\Delta, \quad S=E+K, \quad D=E-K \tag{2.5}$$

$$\Sigma^\bullet=-\tfrac{1}{4}\Sigma^2, \quad \Delta^\bullet=-\tfrac{1}{4}\Delta^2, \quad \Sigma=p_E+p_K, \quad \Delta=p_E-p_K$$

Новые "импульсы" Σ, Δ отделяются от S, D; кроме того, они знакопостоянны и убывают при росте τ. Анализ выражений для $\Sigma(\Theta-\tau, \Sigma^*)$, $\Delta(\Theta-\tau, \Delta^*)$, где Σ^*, Δ^* – неизвестные значения Σ, Δ при $\tau = \Theta$, показывает, что допустимыми значениями являются следующие:

$$\Sigma(\Theta-\tau, \ \Sigma^*)=4\Sigma^*[4-\Sigma^*(\Theta-\tau)]^{-1}, \quad \Sigma^*=(4/\Theta)(1-(S^0/S^*)^{1/2}) \tag{2.6}$$

$$\Delta(\Theta-\tau, \ \Delta^*)=4\Delta^*[4-\Delta^*(\Theta-\tau)]^{-1}, \quad \Delta^*=(4/\Theta)(1-(D^0/D^*)^{1/2})$$

Постановка выражений Σ, Δ (2.6) в уравнения (2.5) для S, D и интегрирование приводит с учетом начальных и конечных значений $S^{0,*}$, $D^{0,*}$ к искомым S, D:

$$S=[(S^0)^{1/2}(1-\tau/\Theta)+(\tau/\Theta)(S^*)^{1/2}]^2 \tag{2.7}$$

$$D=[(D^0)^{1/2}(1-\tau/\Theta)+(\tau/\Theta)(D^*)^{1/2}]^2 \geqslant 0$$

В соответствии с формулами замены (2.5) элементарно восстанавливаются искомые переменные E и K, p_E и p_K как полусумма и полуразность S и D, Σ и Δ

соответственно. Чтобы получить согласно (2.4) приближенное оптимальное управление в форме программы, необходимо вычислить усредненную величину γ, т.е. фазу ψ, на основе (2.2) и полученных выше выражений u_r^*, u_φ^* (2.4):

$$\psi = t + \gamma(\tau), \quad \gamma = \psi^0 - \frac{1}{8}\int_0^\tau E(\sigma)d\sigma, \quad \tau = \varepsilon t \tag{2.8}$$

Здесь ψ^0 – начальное значение фазы ψ, функция $d(\tau)$ вычисляется через $E(\tau)$, $K(\tau)$ согласно (2.1) и (2.7). Отметим, что с погрешностью $O(\varepsilon)$ минимальное значение функционала $J^* = \Theta h$, где постоянная h определена согласно (2.4), (2.6), (2.7). Величины E, K, p_E, p_K, т.е. S, D, Σ, Δ можно брать в любой момент времени $\tau \in [0, \Theta]$, в частности, при $\tau = \Theta$, для которого $S = S^*$, $D = D^*$, $\Sigma = \Sigma^*$, $\Delta = \Delta^*$, причем Σ^*, Δ^* выражаются через $S^{0,*}$, $D^{0,*}$.

Итак, построено приближенное с погрешностью $O(\varepsilon)$ решение задачи оптимального управления (2.2), (2.3). Следует отметить, что аналогично получаются решения, когда одна из величин c_E^2 или c_K^2 равна нулю, т.е. значение $E(T)$ или $K(T)$ не фиксируется. Например, при $c_K^2 = 0$, когда требуется заданным образом изменить значение полной энергии E, а величина $K(T)$ не существенна, то [2]

$$u_{r,\varphi}^* = \tfrac{1}{2} p_E \; v_{r,\varphi}, \quad J^* = \Theta h, \quad h = \tfrac{1}{4} E p_E^2, \quad p_K \equiv 0$$

$$E(\tau) = [(E^0)^{1/2} - (\tau/\Theta)((E^0)^{1/2} - (E^*)^{1/2})]^2, \quad K(\tau) = K^0 (E^*/E^0)\chi^2(\tau)$$

$$p_E(\tau) = (4/\Theta)(1 - (E^0/E^*)^{1/2})/\chi(\tau), \quad \chi(\tau) \equiv 1 - (1 - \tau/\Theta)(1 - (E^0/E^*)^{1/2}) \tag{2.9}$$

Таким образом, оптимальным оказывается тангенциальное управление. Если одна из величин E^0 или E^* равна нулю, то в формулах (2.9) для $K(\tau)$, $p_E(\tau)$ нужно осуществить предельный переход.

С помощью построенного решения задачи программного управления (2.4), (2.5)–(2.9) можно получить приближенный оптимальный синтез (оптимальное управление по обратной связи) и функцию Беллмана задачи (2.2), (2.3). Для этого в полученных выражениях $u_{r,\varphi}^*$, J^* совершается переход от произвольных начальных к текущим значениям фазовых переменных, т.е. производятся следующие замены в выражениях p_E, p_K: $\tau \to 0$, $\Theta \to \Theta - \tau$, $E^0 \to E$, $K^0 \to K$. Величины v_r, v_φ, r могут рассматриваться как фазовые переменные, либо определяться по формулам (2.1), в которых величины E, K (или d) и ψ считаются измеряемыми. Отметим, что в задачах синтеза с фиксированными значениями T и фазовых переменных для $t = T$ имеет место особенность управлений и функции Беллмана при $t \to T$ (или $\tau \to \Theta$), т.е. сингулярность типа $(\Theta - \tau)^{-1}$, см. [2]. Поэтому соответствующие оценки близости будут неравномерными, а зависящими от величин $|E - E^*|$, $|K - K^*|$ и т.п.

Решение задачи ориентации эллипса и изменения его величины и формы может быть построено численно, поскольку требуется учет средних значений членов, содержащих функцию $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. В рассмотренной выше постановке вследствие специфики ($p_\delta \equiv 0$, $p_\gamma = O(\varepsilon)$ и $\langle v_r f\rangle \equiv 0$) возмущение f не оказывало влияния на приближенное решение. Можно также применить метод "локально оптимального" управления [1–3], приводящего к требуемому изменению угла δ, $\delta(T) = \delta^*$. Отметим еще, что построение управления приводит только к изменению элементов эллипса и не изменяют скорости вращения его осей. Эта прецессия эллипса происходит только вследствие влияния малой нелинейности εf и в первом приближении по ε равна

$$\langle \delta^\bullet \rangle = -\tfrac{3}{8} K + K d^{-2} - |K| K/(E d^2), \quad K \gtrless 0, \quad |K| \leqslant E \tag{2.10}$$

Средняя скорость сохраняет знак K; в пределе при $K \to 0$ величина $\langle \delta^{\bullet} \rangle = 0$, а при $|K| \to E - 0$ получим $\langle \delta^{\bullet} \rangle = \frac{1}{8} E \operatorname{sign} K$.

На основе построенных выше выражений для гамильтониана h и управлений u_r^*, u_φ^* (2.4), а также выражений для p_E, p_K, получаемых на основе функций Σ, Δ (2.6), могут быть относительно просто решены аналогичные задачи оптимального управления в других постановках, например, вида

$$J[\mathbf{u}] = c_E^2 (E(T) - E^*)^2 + c_K^2 (K(T) - K^*)^2 + \varepsilon \int_0^T \mathbf{u}^2 dt \to \min \tag{2.11}$$

$$c_E^2 (E(T) - E^*)^2 + c_K^2 (K(T) - K^*)^2 = 0, \quad c_E^2 + c_K^2 > 0$$

$$J[\mathbf{u}] = \varepsilon \int_0^{t_f} \mathbf{u}^2 dt + \varepsilon c_t^2 t_f \to \min, \quad c_t^2 > 0, \quad |\mathbf{u}| < \infty \tag{2.12}$$

В постановке (2.11) значения $E(T)$, $K(T)$ не фиксированы; в постановке (2.12) время окончания t_f не задано. Эти величины учитываются методом штрафов. Определение из условий трансверсальности соответствующих значений Σ^*, Δ^* для (2.11) и $\tau_f^* = \varepsilon t_f^*$ для (2.12) не представляет затруднений. Отметим, что постановки задач (2.11), (2.12) не приводят к сингулярным управлениям при $t \to T$ или $t \to t_f^*$.

3. Управление движениями маятника. Рассмотрим задачу управления в полной постановке, при которой состояние движения точки подвеса O' $\mathbf{r}_0(t)$ требуется изменить заданным образом. Решение задачи о перемещении точки подвеса без учета колебаний маятника $O'P$ с произвольными условиями при $t = T$ и функционалом (2.3) сводится к конечным уравнениям. В частности, при фиксированных значениях $\mathbf{r}_0(T)$, $v_0(T)$ получим

$$\mathbf{r}_0(T) = \mathbf{r}_0^*, \quad \mathbf{v}_0(T) = \mathbf{v}_0^*, \quad J[\mathbf{u}] = \varepsilon \int_0^T \mathbf{u}^2 dt \to \min \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\tau, \ \Delta\mathbf{r}_0, \ \Delta\mathbf{v}_0) = \frac{2}{\Theta}\left(3\frac{\Delta\mathbf{r}_0}{T} - \Delta\mathbf{v}_0\right) - \frac{6\tau}{\Theta^2}\left(2\frac{\Delta\mathbf{r}_0}{T} - \Delta\mathbf{v}_0\right)$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad \Theta = \varepsilon T, \quad \Delta\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^* - \mathbf{r}_0^0 - \mathbf{v}_0^0 T, \quad \Delta\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^* - \mathbf{v}_0^0$$

Выражения $\mathbf{v}_0(t)$ и $\mathbf{r}_0(t)$ получаются однократным и двукратным интегрированием функции $\varepsilon\mathbf{u}_0(\tau)$ (3.1) по t с учетом начальных условий $\mathbf{v}_0^0$, $\mathbf{r}_0^0$. Они представляют собой полиномы от t второго и третьего порядка соответственно, точнее, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\tau)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{w}_0(\tau)t$, где $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_0$ – полиномы второго порядка по τ. Поскольку предполагается, что $|\mathbf{u}_0| \sim 1$ для $\tau \sim 1$ ($\Theta \sim 1$), то из полученных соотношений следуют оценки допустимых изменений $|\Delta\mathbf{v}_0| \sim 1$, $|\Delta\mathbf{r}_0| \sim 1/\varepsilon$. Итак, установлено, что управление $\mathbf{u}_0$ является медленной функцией, т.е. зависит от "медленного" времени $\tau = \varepsilon t$.

Рассмотрим теперь уравнение (1.4) для $\mathbf{r}$ в декартовых координатах (x, y) и перейдем к осциллирующим переменным $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ посредством стандартной замены [2]

$$\dot{\mathbf{a}} = \varepsilon(-\mathbf{u} + f)\cos t, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\varepsilon(-\mathbf{u} + \mathbf{f})\sin t \tag{3.2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\sin t + \mathbf{b}\cos t, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \mathbf{a}\cos t - \mathbf{b}\sin t$$

Оскулирующие переменные E, K (или d), δ, γ (2.1) более удобны и наглядны для описания относительных орбитальных движений точки P. Они выражаются через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; в частности

$$E = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2), \quad K = a_y b_x - a_x b_y = [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]_z \tag{3.3}$$

$$\sin 2\delta = -(a_x a_y + b_x b_y)(a_x^2 + b_x^2)^{-\frac{1}{2}}(a_y^2 + b_y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sin 2\gamma = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)/E, \quad \cos 2\gamma = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/E, \quad \psi = t + \gamma$$

При помощи соотношений (3.3) могут быть заданы требуемые конечные условия. Таким образом, из (3.2) следует, что оптимальные управления для изменения элементов орбиты относительных движений представимы в виде

$$\mathbf{u}^* = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}(\tau)\cos t + \tfrac{1}{2}\mathbf{q}(\tau)\sin t \tag{3.4}$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ сопряженные $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ оскулирующие переменные. Управление $\mathbf{u}^*$ (3.4) в функциональном смысле "ортогонально" $\mathbf{u}_0$ (3.1) на асимптотически большом интервале времени $t \sim T = \Theta\varepsilon^{-1}$:

$$\left| \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{u}^*(\tau, \ t) \cdot \mathbf{u}_0(\tau))dt \right| \leqslant C\varepsilon \tag{3.5}$$

Далее отметим, что реализация управления $\mathbf{u}^*$ вида (3.4) не оказывает влияния на движение точки подвеса в первом приближении по ε. Действительно, интегрируя уравнение (1.4) для $\mathbf{r}_0$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, получим

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^0 + \varepsilon\int_0^t \mathbf{u}^*(\tau', \ t')dt' = \mathbf{v}_0^0 + \varepsilon\boldsymbol{\Delta}_v \tag{3.6}$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{v}_0^0 t + \varepsilon\int_0^t (t - t')\mathbf{u}^*(\tau', \ t')dt' = \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{v}_0^0 t + \boldsymbol{\Delta}_r$$

$$|\boldsymbol{\Delta}_v| \leqslant C, \quad |\boldsymbol{\Delta}_r| \leqslant C, \quad 0 \leqslant t \leqslant \Theta\varepsilon^{-1}$$

Из выражений для $\mathbf{u}_0(\tau)$ (3.1) и $\mathbf{u}^*(\tau, t)$ (3.4) следует, что суммарное управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^*$ удовлетворяет условию, см. (3.5):

$$J[\mathbf{u}] = \varepsilon\int_0^T \mathbf{u}^2 dt = \varepsilon\int_0^T (\mathbf{u}_0^2 + \mathbf{u}^{*2})dt + O(\varepsilon) = J[\mathbf{u}_0] + J[\mathbf{u}^*] + O(\varepsilon) \tag{3.7}$$

Нетрудно установить, что управляющее воздействие $\varepsilon\mathbf{u}_0(\tau)$ также не оказывает в первом приближении по ε влияния на относительные колебания маятника [2]. Оно приводит к смещению на величину $O(\varepsilon)$ положения равновесия для $t \sim 1/\varepsilon$.

Таким образом, согласно (3.1), (3.4), (3.6), (3.7) в первом приближении (с относительной погрешностью $O(\varepsilon)$) по управлению, траектории и функционалу происходит независимое оптимальное управление относительными колебаниями и перемещением точки подвеса посредством суммарного управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^*$, которое в форме программы $\mathbf{u}_p$ и синтеза $\mathbf{u}_s$ можно представить в виде

$$\mathbf{u}_p(\tau, \ t, \ \varepsilon) = \mathbf{u}_{0p}(\tau, \ \varepsilon) + \mathbf{u}_p^*(\tau, \ t) \tag{3.8}$$

$$\mathbf{u}_{0p} = \mathbf{u}_{0p}(\tau, \ \Theta, \ \mathbf{r}_0^0, \ \mathbf{v}_0^0, \ \varepsilon), \quad \mathbf{u}_p^* = \mathbf{u}_p^*(\tau, \ t, \ \Theta, \ \mathbf{r}^0, \ \mathbf{v}^0)$$

$$\mathbf{u}_s(\Theta - \tau, \ \mathbf{r}_0, \ \mathbf{v}_0, \ \mathbf{r}, \ \mathbf{v}, \ \varepsilon) = u_{0s}(\Theta - \tau, \ \mathbf{r}_0, \ \mathbf{v}_0, \ \varepsilon) + \mathbf{u}_s^*(\Theta - \tau, \ \mathbf{r}, \ \mathbf{v})$$

Функция $\mathbf{u}_{0s}$ получается из $\mathbf{u}_{0p}$ с помощью замены $\tau \to 0$, $\Theta \to \Theta - \tau$, $\mathbf{r}_0^0 \to \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0^0 \to \mathbf{v}_0$. Аналогично синтез $\mathbf{u}_s^*$ получается из функции $\mathbf{u}_p^*$ при $\tau, t \to 0$, $\Theta \to \Theta - \tau$, $\mathbf{r}^0 \to \mathbf{r}$, $\mathbf{v}^0 \to \mathbf{v}$. Переменные $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ могут быть выражены через другие, более удобные для описания орбитальных движений, например, через E, K (или d), δ и ψ (или t и γ) или через фокальный параметр, эксцентриситет, угол апсид и фазу (или время и фазовую постоянную).

Управление в задачах типа (2.11), (2.12) также представимо в виде суммы двух независимых управлений $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}^*$.

Отметим, что согласно предположениям и нормировке (1.2) происходит следующая эволюция параметров движения системы (в исходных размерных переменных):

$$
\begin{aligned}
&|\Delta \mathbf{r}| \sim \varepsilon^{1/2} l, \quad |\Delta \mathbf{v}| \sim \varepsilon^{1/2} (gl)^{1/2} \\
&|\Delta \mathbf{r}_0| \sim \varepsilon^{-1/2} l, \quad |\Delta \mathbf{v}_0| \sim \varepsilon^{1/2} (gl)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Отметим также, что наряду со способом введения малого параметра ε (1.2) можно предложить следующий:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}', \quad \ddot{\mathbf{r}}_0 = \varepsilon^2 \mathbf{u} \\
&\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 = \varepsilon \mathbf{v}_0', \quad \mathbf{r}_0 = \varepsilon \mathbf{r}_0'
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

В результате получим управляемые системы типа (1.3), (1.4), в которых функция $\mathbf{f} = O(\varepsilon)$, т.е. оказывается величиной, пренебрежимо малой в первом приближении по ε. Таким образом, при условиях (3.10), уравнения управляемого движения окажутся линейными, что существенно упростит их анализ. Оценка типа (3.9) изменения параметров движения, т.е. фазовых переменных, имеет вид

$$
|\Delta \mathbf{r}| \sim \varepsilon l, \quad |\Delta \mathbf{v}| \sim \varepsilon (gl)^{1/2}, \quad |\Delta \mathbf{r}_0| \sim l, \quad |\Delta \mathbf{v}_0| \sim \varepsilon (gl)^{1/2}
$$

Отметим существенное обстоятельство, сказанное с отсутствием ограничений на ускорение точки подвеса в процессе управления. Такая ситуация может быть реализована и при наличии ограничений, если интервал времени Θ достаточно велик ($|\mathbf{u}_p| \to 0$ при $\Theta \to \infty$).

4. Управление колебаниями с учетом ограничений на вектор ускорения точки подвеса. Рассмотрим управляемую систему в форме (3.2) при наличии геометрического ограничения на $\mathbf{u}$ с функционалом типа оптимального быстродействия

$$
\mathbf{a}(t_f) = \mathbf{a}^f, \quad \mathbf{b}(t_f) = \mathbf{b}^f; \quad J[\mathbf{u}] = \varepsilon t_f \to \min, \quad |\mathbf{u}| \leqslant u^0 \tag{4.1}
$$

При помощи принципа максимума, составляя функцию Гамильтона и определяя ее максимум по $\mathbf{u}$, находим

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^0 (-\mathbf{p} \cos t + \mathbf{q} \sin t) |-\mathbf{p} \cos t + \mathbf{q} \sin t|^{-1} \\
&H^* = \varepsilon u^0 |-\mathbf{p} \cos t + \mathbf{q} \sin t| - \varepsilon (\mathbf{p}, \ \mathbf{f}) \cos t + \varepsilon (\mathbf{q}, \ \mathbf{f}) \sin t
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Здесь $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ – сопряженные соответственно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переменные, которые также оказываются медленными, т.е. $|\dot{\mathbf{p}}| \sim \varepsilon$, $|\dot{\mathbf{q}}| \sim \varepsilon$, поскольку [2]:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{p}} = \varepsilon \partial (\mathbf{p}, \ \mathbf{f}) / \partial \mathbf{a} \cos t - \varepsilon \partial (\mathbf{q}, \ \mathbf{f}) / \partial \mathbf{a} \sin t \\
&\dot{\mathbf{q}} = \varepsilon \partial (\mathbf{p}, \ \mathbf{f}) / \partial \mathbf{b} \cos t - \varepsilon \partial (\mathbf{q}, \ \mathbf{f}) / \partial \mathbf{b} \sin t
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Усредненный гамильтониан h_0 первого приближения по ε в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ и соответствующая система для усредненных переменных имеют вид, см.

(4.1)–(4.3):

$$h_0 = \frac{2}{\pi} u^0 N \mathrm{E}(k) - (\mathbf{p},\ \mathbf{f}_c) + (\mathbf{q},\ \mathbf{f}_s) \qquad (4.4)$$

$$N = (A^2 + B^2)^{1/2}, \quad A^2 = {}^1\!/\!_2(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2), \quad B^2 = [(\mathbf{p},\ \mathbf{q})^2 + {}^1\!/\!_4(\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)^2]^{1/2}$$

$$k^2 = 2B^2 / N^2, \quad \mathbf{f}_c = \langle \mathbf{f} \cos t \rangle, \quad \mathbf{f}_s = \langle \mathbf{f} \sin t \rangle$$

$$\mathbf{a}^\bullet = \partial h_0 / \partial \mathbf{p}, \quad \mathbf{b}^\bullet = \partial h_0 / \partial \mathbf{q}, \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}^0, \quad \mathbf{b}(0) = \mathbf{b}^0$$

$$\mathbf{p}^\bullet = -\partial h_0 / \partial \mathbf{a}, \quad \mathbf{q}^\bullet = -\partial h_0 / \partial \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}(\tau_f) = \mathbf{a}^f, \quad \mathbf{b}(\tau_f) = \mathbf{b}^f$$

Для усредненных переменных сохранены прежние обозначения. Отметим, что в h_0 (4.4) $\mathbf{E}$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода по модулю k, $0 \leqslant k \leqslant 1$, а функция h_0 является однородной 1-го порядка относительно $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Для определения неизвестной τ_f имеет место условие трансверсальности

$$h_0(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{p},\ \mathbf{q}) = 1, \quad h_0 = \mathrm{const} \qquad (4.5)$$

причем соотношение (4.5) справедливо в любой момент времени τ, в частности, при $\tau = \tau_f$. В результате получены девять условий относительно восьми неизвестных постоянных интегрирования и времени τ_f окончания процесса управления. Вследствие однородности h_0 по $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ число неизвестных параметров можно свести к восьми, например, делением $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ на постоянную $\sqrt{2}A(\tau_f)$, так что при $\tau = \tau_f$ нормированные сопряженные переменные будут связаны соотношением $\mathbf{p}^2(\tau_f) + \mathbf{q}^2(\tau_f) = 1$. В результате для определения управления, траектории и времени τ_f оказываются достаточными восемь условий (4.4).

В более простой ситуации (3.10), когда $\mathbf{f} = O(\varepsilon)$, т.е. в первом приближении $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_s \equiv 0$, получим $\mathbf{p} = \mathrm{const}$, $\mathbf{q} = \mathrm{const}$; а в качестве постоянной нормировки можно взять величину $n = (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2)^{1/2}$. Для этого случая в любой момент времени τ выполняется условие нормировки $\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 = 1$, а уравнения движения допускают полное интегрирование

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}^0 + (\tau / \tau_f)\Delta\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}(\tau) = \mathbf{b}^0 + (\tau / \tau_f)\Delta\mathbf{b}$$

$$(\partial h_0 / \partial \mathbf{p})\tau_f = \Delta\mathbf{a}^0, \quad (\partial h_0 / \partial \mathbf{q})\tau_f = \Delta\mathbf{b}^0 \qquad (4.6)$$

$$\Delta\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}^f - \mathbf{a}^0, \quad \Delta\mathbf{b}^0 = \mathbf{b}^f - \mathbf{b}^0$$

Неизвестные $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ($\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 = 1$) и τ_f определяются из четырех краевых условий (4.6). Решение этих уравнений, как и краевой задачи (4.4), (4.5), может быть получено численно. Реализация таких управлений представляет значительные трудности. Поэтому для прикладных целей может представить интерес построение существенно более простых законов управления, например, локально оптимальных или квазиоптимальных, не приводящих к значительному увеличению функционала [1–3].

Изложим такой подход применительно к упрощенной задаче с малыми колебаниями маятника при условии (3.10), когда возмущениями $\mathbf{f}$ можно пренебречь в первом приближении. Вместо исходной системы уравнений (3.2) (при $\mathbf{f} \equiv 0$) рассмотрим две независимые и соответствующие им задачи оптимального управления

$$\dot{a}_i = -\varepsilon u_i \cos t, \quad \dot{b}_i = \varepsilon u_i \sin t, \quad i = x,\ y \qquad (4.7)$$

$$|u_i| \leqslant u_i^0, \quad a_i(t_f) = a_i^f, \quad b_i(t_f) = b_i^f, \quad \varepsilon t_f \to \min_{u_i}$$

Применим описанную выше процедуру метода усреднения для приближенного решения краевой задачи принципа максимума. Получим искомые выражения для (4.7):

$$u_i^* = u_i^0 \operatorname{sign}(-p_i \cos t + q_i \sin t) \quad (i = x,\ y)$$

$$a_i = a_i^0 + (\tau / \tau_{fi})\Delta a_i^0, \quad b_i = b_i^0 + (\tau / \tau_{fi})\Delta b_i^0$$

$$\tau_{fi} = (\pi / 2u_i^0)d_i^0, \quad h_{0i} = (2/\pi)(p_i^2 + q_i^2)^{1/2} \tag{4.8}$$

$$d_i^0 = (\Delta a_i^{02} + \Delta b_i^{02})^{1/2}, \quad p_i = n_i \Delta a_i^0 / d_i^0, \quad q_i = n_i \Delta b_i^0 / d_i^0$$

Таким образом, согласно (4.8) программные управления u_i^*, траектории a_i, b_i и функционалы полностью определены. Отметим, что p_i, q_i в u_i^* заменяются на Δa_i^0, Δb_i^0 соответственно. Далее, поскольку должны быть выполнены условия суммарного ограничения на управления $u_x^{02} + u_y^{02} = u^{02}$ и совпадения моментов окончания процессов $\tau_{fx} = \tau_{fy}$, то для искомого квазиоптимального решения получим представления

$$u_{x,y}^* = u^0 (d_{x,y}^0 / d^0) \operatorname{sign}(-\Delta a_{x,y}^0 \cos t + \Delta b_{x,y}^0 \sin t) \tag{4.9}$$

$$d_{x,y}^0 = (\Delta a_{x,y}^{02} + \Delta b_{x,y}^{02})^{1/2}, \quad d^0 = (d_x^{02} + d_y^{02})^{1/2}, \quad \tau_{fx,y} = (\pi / 2u^0) d^0$$

Квазиоптимальное управление в форме синтеза получается заменами $\Delta a_{x,y}^0 \to \Delta a_{xy}$, $\Delta b_{x,y}^0 \to \Delta b_{x,y}$ в выражениях (4.9).

Решение задачи перемещения точки подвеса и управления относительными колебаниями маятника может быть осуществлено последовательно или независимо, поскольку эти процессы слабо взаимосвязаны, см. *п.* 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221) и совместного гранта Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки РФ (J17100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980, 384 с.
2. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
3. *Akulenko L.D.* Problems and Methods of Optimal Control. Dordrecht: Kluwer, 1994. 342 p.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.X.1995