

УДК 531.383

© 1997 г. В.Э. ДЖАШИТОВ, В.М. ПАНКРАТОВ

О ВОЗМУЩЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

Рассматривается движение однородного, проводящего тепло тела, возмущаемое нестационарным температурным полем. Полученная обобщенная математическая модель позволила изучить колебания тонкого стержня с одной закрепленной точкой при условии периодического изменения со временем интенсивности поля температур. Показано, что такого рода возмущения, при определенном сочетании параметров движения и температурного поля, приводят к эффекту аналогичному сдвигу нуля гармонических колебаний осциллятора на качающемся основании.

Рассмотрим задачу о движении однородного теплопроводящего твердого тела с одной закрепленной точкой, находящегося в нестационарном неоднородном температурном поле.

В качестве исходной примем ситуацию, в которой начало неподвижной и подвижной систем отсчета (центр подвеса) совпадают с центром масс тела, а оси подвижной системы отсчета совпадают с главными осями инерции тела.

Результатом воздействия неоднородного, трехмерного, нестационарного температурного поля на твердое тело является перераспределение плотности по объему тела, искажения его формы и, следовательно, изменение его динамических характеристик – моментов инерции и смещения центра масс относительно центра подвеса.

За исходные положения примем следующие. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, определяется в соответствии с [1]:

$$E = \frac{1}{2} \iiint_V [\omega^2 r^2 - (\omega \mathbf{r})^2] \rho dV \quad (1)$$

где ω – вектор мгновенной угловой скорости вращения тела.

Зависимость плотности от температуры имеет вид:

$$\rho(\tau, q_i) = \rho_0 [1 - \beta_T T(\tau, q_i)] \quad (2)$$

где ρ_0 – плотность тела при исходном стационарном температурном поле, β_T – температурный коэффициент изменения плотности, $T(\tau, q_i)$ – температурное поле тела, q_i – обобщенные координаты, τ – время.

Выражения для моментов инерции и смещения центра масс имеют вид [1]:

$$J = \iiint_V \rho r^2 dV, \quad M \mathbf{r}_c = \iiint_V \rho \mathbf{r} dV \quad (3)$$

где $V = V_0 + \Delta V_T$ – объем тела с учетом температурных изменений его формы, M – масса тела.

Система уравнений движения твердого тела, в общем случае, имеет вид

$$\dot{X} = A(T)F(X) + S(X) \quad (4)$$

где X – вектор механического состояния, $A(T)$ – матрица инерционных, диссипативных и других свойств тела, $S(X)$ – вектор входных воздействий и возмущений на механическое состояние тела.

С тепловой точки зрения, тело идеализируется [2] как система со средоточенными параметрами, состоящими из конечного числа "элементарных" объемов со своими теплофизическими характеристиками и тепловыми связями.

Тепловое состояние такой системы, на основе метода балансов [2, 3] описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{T} = G_0 T + D(T_c, X) \quad (5)$$

где T, T_c – вектора теплового состояния тела и окружающей среды, G_0 – матрица теплофизических свойств элементов объекта, $D(T_c, X)$ – вектор входных воздействий и возмущений на тепловое состояние тела.

Выберем в качестве обобщенных координат углы Эйлера.

Кинетическая энергия (1) типа запишется известным [4] выражением вида

$$E = \frac{1}{2} A (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2} B (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \quad (6)$$

Учитывая соотношения (1)–(6), применяя формализм Лагранжа и программные средства компьютерной алгебры [5] "Mathematica", получим уравнения движения твердого тела в виде

$$\begin{aligned} & \ddot{\psi} (C \cos^2 \theta + A \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) + \dot{\psi} \dot{\varphi} (A - B) \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \\ & + \dot{\psi} \dot{\theta} (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - C) \sin 2\theta + \frac{1}{2} \ddot{\theta} (A - B) \sin \theta \sin 2\varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} [(A - B) \cos 2\varphi - C] + \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (A - B) \cos \theta \sin 2\varphi + \dot{A} (\frac{1}{2} \dot{\theta} \sin \theta \sin 2\varphi + \dot{\psi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) + \\ & + \dot{B} (\dot{\psi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \dot{\theta} \sin \theta \sin 2\varphi) + C \ddot{\varphi} \cos \theta + \dot{C} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \cos^2 \theta) = Q_\psi \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) + \dot{\theta} \dot{\varphi} (B - A) \sin 2\varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} [(A - B) \sin \theta \cos 2\varphi] + \\ & + \frac{\ddot{\psi}}{2} (A - B) \sin \theta \sin 2\varphi + \frac{\dot{\psi}^2}{2} (C - A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin 2\theta + \dot{A} \left(\dot{\theta} \cos^2 \varphi + \dot{\psi} \frac{\sin \theta \sin 2\varphi}{2} \right) + \\ & + \dot{B} \left(\dot{\theta} \sin^2 \varphi - \dot{\psi} \frac{\sin \theta \sin 2\varphi}{2} \right) = Q_\theta \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & C \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \dot{\theta} (B - A - C) \sin \theta + C \dot{\psi} \cos \theta + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (B - A) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 (B - A) \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \\ & + \dot{C} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Q_\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

В системе уравнений (7)–(9) обобщенные силы $Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi$ зависят не только от времени, но и от конфигурации температурного поля в твердом теле.

То или иное распределение температуры может быть обусловлено не только внешними источниками тепла и условиями теплообмена с окружающей средой, но и наличием внутренних источников тепловыделения в самом теле, как это имеет место в реальных конструкциях электромеханических устройств.

Результатом численного решения уравнений (5) является нестационарное температурное поле по объему тела, которое может быть представлено в общем случае рядами Фурье

$$T(\tau, q_i) = f(\tau) \sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty} \gamma_{nmk} \exp[(nq_1 + mq_2 + kq_3)i] \quad (10)$$

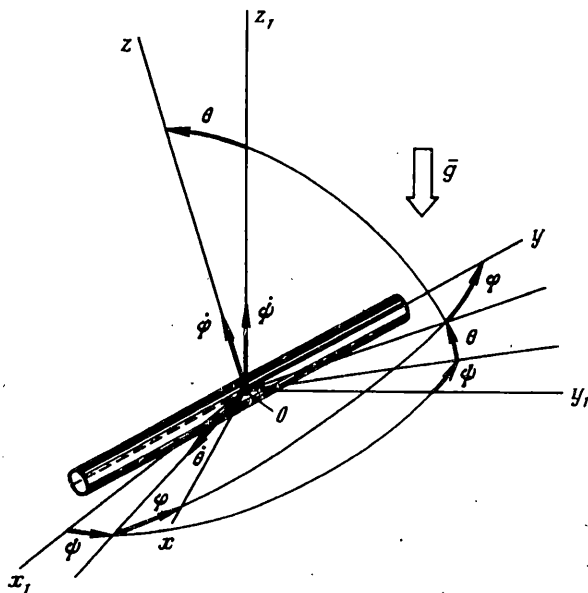
где $f(\tau)$ – функция, обуславливающая зависимость температурного поля от времени.

Таким образом, математическая модель движения твердого тела с одной закрепленной точкой, которое возмущается нестационарным и неоднородным температурным полем представляет собой в общем случае систему взаимосвязанных соотношений и уравнений (1)–(10) теплового состояния и механического движения тела.

Рассмотрим без ограничения общности, для сокращения громоздких выкладок, случай вращения тонкого однородного стержня вокруг его центра масс.

Пусть в исходной ситуации стационарного и однородного температурного поля вращения происходит вокруг оси z_1 (фигура) неподвижной системы координат в плоскости перпендикулярной вектору переносного ускорения.

Наличие неоднородности и нестационарности температурного поля приводит к появлению составляющей $\dot{\theta}$ угловой скорости.



Фиг. 1

Подобная ситуация может служить основой для составления, например, модели погрешности прецизионного градиентометра, или может быть использована в задачах об орбитальных движениях гантельного искусственного спутника Земли.

Для этого случая ($J = A = C, B = 0, Q_\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$) система (7)–(9) примет вид

$$J\ddot{\psi} \cos^2 \theta - J\dot{\psi}\dot{\theta} \sin 2\theta + J\dot{\psi} \cos^2 \theta = Q_\psi, \quad J\ddot{\theta} + \frac{1}{2} J\dot{\psi}^2 \sin 2\theta + J\dot{\theta} = Q_\theta \quad (11)$$

Полагая $Q_\psi = 0$ (момент двигателя уравновешивает момент сил трения при вращении вокруг оси z_1), а $\theta, \dot{\theta}$ – малыми первого порядка, будем иметь в первом приближении уравнение для ψ :

$$J\ddot{\psi} + J\dot{\psi} = 0 \quad (12)$$

Пусть при достаточной теплопроводности стержня, температурная составляющая момента инерции стержня представляет собой малую величину, а температурное поле изменяется по гармоническому закону от времени.

Тогда $J = b + a \sin \lambda \tau$, $b = \text{const}$, $a/b = \varepsilon_1 \ll 1$.

В этом случае при ω_0 начальной угловой скорости стержня вокруг оси z_1 будем иметь

$$\dot{\psi} = \omega_0 / (1 + \varepsilon_1 \sin \lambda \tau) \quad (13)$$

Предположим для определенности температурное поле изменяется по линейному закону вдоль стержня

$$T(\tau, q_i) = f(\tau) T_{00}(x+l)/(2l) \quad (14)$$

где $2l$ – длина стержня в однородном температурном поле.

С учетом (2), (3) будем иметь следующие выражения для температурно возмущенных моментов инерции и смещения центра масс

$$J = \frac{2\rho_0 l^3}{3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} T_{00} f(\tau) [\alpha_T - \beta_T] \right\} \quad (15)$$

$$Mx_c = \rho_0 T_{00} f(\tau) l^2 (\alpha_T / 2 - \beta_T / 3) \quad (16)$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения стержня.

Обобщенная сила Q_θ с учетом момента сил вязкого трения принимает вид

$$Q_\theta = -\mu\dot{\theta} - wMx_c \quad (17)$$

где μ – коэффициент демпфирования.

Имея в виду то обстоятельство, что $\beta_T \approx 3\alpha_T$, после введения малой $\epsilon = 3\alpha_T T_{00} \ll 1$ и $w_* = w/(4l)$, $2n = \mu/b$, полагая $\epsilon_1 = 0$, второе уравнение системы (11) запишем в виде

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + \omega_0^2\theta - \theta\epsilon\lambda\cos\lambda\tau = -w_*\epsilon\sin\lambda\tau \quad (18)$$

Рассмотрим стационарное движение стержня, считая переходные процессы установления периодического температурного поля и переходные процессы движения стержня закончившимися.

В соответствии с методом малого параметра частное решение уравнения (18) будем искать в виде разложения по степеням ϵ :

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 \quad (19)$$

Тогда, подставляя (19) в (18), получим уравнения первого и второго приближений в следующем виде:

$$\ddot{\theta}_0 + 2n\dot{\theta}_0 + \omega_0^2\theta_0 = -w_*\epsilon\sin\lambda\tau \quad (20)$$

$$\ddot{\theta}_1 + 2n\dot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \dot{\theta}_0\lambda\cos\lambda\tau \quad (21)$$

Частное решение уравнения (20) можно записать в виде:

$$\theta_0 = 2h_1\cos\lambda\tau - 2h_2\sin\lambda\tau \quad (22)$$

$$2h_1 = \frac{2n\lambda w_*\epsilon}{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2\lambda^2}, \quad 2h_2 = \frac{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 w_*\epsilon}{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2\lambda^2}$$

В этом случае уравнение (21) имеет вид

$$\ddot{\theta}_1 + 2n\dot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = -h_2\lambda^2 - h_2\lambda^2\cos 2\lambda\tau - h_1\lambda^2\sin 2\lambda\tau \quad (23)$$

Очевидно, что имеет место постоянное смещение по углу θ , мерой которого служит $\theta_1^{(1)} = -h_2\lambda^2/\omega_0^2$, что соответствует сдвигу нуля колебаний маятника при качке основания и периодическая составляющая решения двойной частоты $\theta_1^{(2)} = H\sin(2\lambda\tau + \delta)$.

Пусть параметры имеют следующие числовые значения: $\Delta T^0 = 1^\circ\text{C}$, $\lambda = \omega_0 = 14\text{ c}^{-1}$, $\alpha_T = 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $n = 0,14\text{ c}^{-1}$, $l = 0,1\text{ м}$. Тогда постоянное смещение составит $h_1 \approx 3,6\text{ угл.мин}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1977. 544 с.
2. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Методы расчета теплового режима приборов. М.: Радио и связь, 1990. 312 с.
3. Джашишов В.Э., Панкратов В.М., Сучков А.Б. Автоматизированное исследование смещений центров масс быстровращающихся роторов изделий машиностроения в неоднородном температурном поле // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1990. № 4. С. 106–111.
4. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. 483 с.
5. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 216 с.

Саратов

Поступила в редакцию
18.X.1994