

УДК 624.07:534.1

© 1997 г. П.М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

**УСТАНОВИВШИЕСЯ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ПЕРИОДИЧЕСКИ СОЧЛЕНЕННОЙ БАЛКИ
НА ОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ**

Рассматриваются установившиеся поперечные колебания бесконечной упругой балки на однородном вязкоупругом основании под действием комплексной гармонической силы, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью. Комплексное поперечное отклонение периодической балки предполагается установившимся в следующем смысле: сдвиг вдоль балки на расстояние, равное ее периоду, вызывает запаздывание отклонения на время, в течение которого гармоническая сила перемещается на это расстояние. При этом аргумент комплексного поперечного отклонения балки получает приращение, равное приращению аргумента гармонической силы.

Шарниры, связывающие однородные балки одинаковой длины, задают периодическую неоднородность балки. Последняя приводит к краевой задаче на периоде балки с граничными условиями, содержащими упомянутые выше запаздывание и приращение аргумента. Точное решение краевой задачи получается в замкнутой форме при помощи преобразования Фурье в предположении, что каждая точка балки находилась в состоянии покоя задолго до приближения гармонической силы и возвращается в это же состояние под действием вязкости основания после удаления силы в бесконечность. Периодическая балка оказывается в состоянии резонанса, если в отсутствие вязкости основания подынтегральная функция обратного преобразования Фурье имеет действительный полюс второго порядка.

Описанная выше задача возникает, например, в динамике железнодорожного пути. Упругость шпал и балласта значительно превосходит упругость рельса. Поэтому статическая нагрузка или нагрузка низкой частоты, приложенная к рельсу, образует в рельсе длинные волны и распределяется между многими шпалами. Это обстоятельство приводит к непрерывной модели железнодорожного пути как однородной упругой балки на однородном упругом основании [1–5]. Однако, непрерывная модель не учитывает нарушение однородности пути в стыках рельсов и связанное с этим периодическое изменение жесткости пути. При скорости движения колеса 50 м/с (180 км/ч) и длине рельса 25 м неоднородность пути вызывает вертикальные колебания колеса с низкой частотой 2 Гц. Колебания легко преодолевают рессорное подвешивание и проникают в экипаж. Измерения на буксе вагона при помощи сейсмографа показывают, что колебания с частотой прохождения стыков значительны, даже если рельсы сварены друг с другом [6]. В рассматриваемых обстоятельствах инерция поворота поперечных сечений рельса мала по сравнению с инерцией поступательного поперечного движения, а деформация сдвига поперечных сечений относительно друг друга мала по сравнению с изгибной деформацией. Поэтому рельс может рассматриваться как балка Эйлера–Бернулли.

1. Постановка задачи. Пусть поперечное отклонение периодической балки $y(x, t)$ вызвано поперечной гармонической силой $a_0 \exp(i\omega_0 t)$, движущейся вдоль балки с постоянной ненулевой скоростью u_0 . Здесь x и t – продольная координата и время, a_0 и ω_0 – амплитуда и круговая частота гармонической силы. Пусть величина l равна

периоду балки. Будем предполагать, что функция $y(x, t)$ удовлетворяет условию

$$y(x + l, t + l/v_0) = \exp(i\Phi_0)y(x, t) \quad (1.1)$$

Безразмерная величина $\Phi_0 = \omega_0 l/v_0$ зависит от v_0 и ω_0 одновременно и представляет собой приращение фазы возмущающей силы при перемещении этой силы на расстояние l . Если $\omega_0 = 0$, то возмущающая сила постоянна, $\Phi_0 = 0$ и $\exp(i\Phi_0) = 1$. В этом случае условие (1.1) приобретает вид

$$y(x + l, t + l/v_0) = y(x, t) \quad (1.2)$$

и показывает, что сдвиг вдоль балки на расстояние l приводит к запаздыванию колебаний балки на время l/v_0 , в течение которого возмущающая сила перемещается на расстояние l . Если

$$\omega_0 = 2\pi n v_0 / l \quad (1.3)$$

где n – целое число, то частота возмущающей силы кратна частоте прохождения периодов балки. В этом случае $\Phi_0 = 2\pi n$, $\exp(i\Phi_0) = 1$ и условие (1.1) снова переходит в условие (1.2). Частный случай возмущающей силы с круговой частотой (1.3) рассматривался в [5] применительно к балке, периодически поддерживаемой упругими опорами, а общий случай – в [7]. Условие (1.1) показывает, что при сдвиге по x на расстояние l и запаздывании на время l/v_0 модуль комплексной величины $y(x, t)$ не изменяется, а аргумент получает приращение Φ_0 . Множитель $\exp(i\Phi_0)$ был использован в [8] при исследовании распространения волн в периодически поддерживаемой балке.

Уравнение Эйлера–Бернулли колебаний балки на однородном вязкоупругом основании под действием подвижной гармонической силы имеет следующий вид:

$$EJ \partial^4 y(x, t) / \partial x^4 + \rho \partial^2 y(x, t) / \partial t^2 + r \partial y(x, t) / \partial t + u y(x, t) = a_0 \exp(i\omega_0 t) \delta(x - v_0 t) \quad (1.4)$$

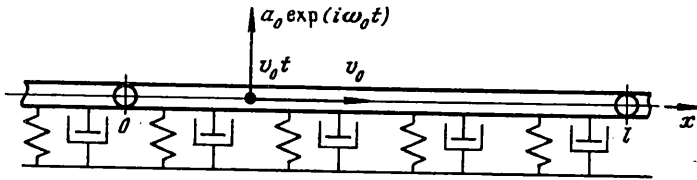
Здесь EJ и ρ – изгибная жесткость и линейная плотность балки, r и u – вязкость и упругость основания, отнесенные к единице длины балки, $v_0 t$ – точка приложения возмущающей силы, $\delta(x)$ – функция Дирака. Будем искать решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условию (1.1) и дополнительным условиям, связанным с наличием шарниров.

Пусть два смежных шарнира помещены в точки 0 и l (фиг. 1). Поперечное отклонение балки $y(x, t)$, изгибающий момент $EJ \partial^2 y(x, t) / \partial x^2$ и поперечная сила $EJ \partial^3 y(x, t) / \partial x^3$ непрерывны в этих точках, причем изгибающий момент обращается в нуль. Согласно условию (1.1):

$$\begin{aligned} y(l, t + l/v_0) &= \exp(i\Phi_0) y(0, t) \\ \partial^2 y(l, t) / \partial x^2 &= 0, \quad \partial^2 y(0, t) / \partial x^2 = 0 \\ \partial^3 y(l, t + l/v_0) / \partial x^3 &= \exp(i\Phi_0) \partial^3 y(0, t) / \partial x^3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Дифференциальное уравнение (1.4) и четыре граничных условия (1.5) определяют поперечное отклонение балки на периоде $0 \leq x \leq l$. Поперечное отклонение балки вне этого периода определяется условием (1.1). Будем предполагать, что каждая точка балки находилась в состоянии покоя задолго до приближения возмущающей силы и возвращается в это же состояние под действием вязкости основания после удаления силы в бесконечность. Таким образом, предполагается, что $y(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ вместе со своими производными и допускает преобразование Фурье по t .

Граничные условия (1.5) содержат запаздывание по времени l/v_0 и вместе с предположением о затухании $y(x, t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ определяет в полосе $(0, l)x(-\infty, +\infty)$ краевую задачу с запаздывающим аргументом [9] или по другой терминологии дифференциально-разностную краевую задачу [10] для уравнения (1.4).



Фиг. 1

2. Решение задачи. Перейдем в равенствах (1.1), (1.4) и (1.5) к безразмерным переменным $X = x/l$, $T = v_0 t/l$, $Y(X, T) = EJy(x, t)/(a_0 l^3)$ и безразмерным параметрам $M = \rho(v_0 l)^2/(EJ)$, $R = rv_0 l^3/(EJ)$, $U = ul^4/(EJ)$. Учитывая, что $\delta(l(X - T)) = \delta(X - T)/l$, получим

$$Y(X + 1, T + 1) = \exp(i\Phi_0)Y(X, T) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \partial^4 Y(X, T) / \partial X^4 + M \partial^2 Y(X, T) / \partial T^2 + R \partial Y(X, T) / \partial T + U Y(X, T) = \\ = \exp(i\Phi_0 T) \delta(X - T) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} Y(1, T + 1) &= \exp(i\Phi_0)Y(0, T) \\ \partial^2 Y(1, T) / \partial X^2 &= 0, \quad \partial^2 Y(0, T) / \partial X^2 = 0 \\ \partial^3 Y(1, T + 1) / \partial X^3 &= \exp(i\Phi_0) \partial^3 Y(0, T) / \partial X^3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Переменные X и T обозначают безразмерные продольную координату и время. Величина T также обозначает безразмерную продольную координату точки приложения подвижной гармонической силы. Обозначим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(X, T) \exp(-i\Phi T) dT = \hat{Y}(X)$$

где Φ – безразмерный параметр. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(X + 1, T + 1) \exp(-i\Phi T) dT = \exp(i\Phi) \hat{Y}(X + 1)$$

Выполняя преобразование Фурье в условии (2.1), дифференциальном уравнении (2.2) и четырех граничных условиях (2.3), а также интегрируя по частям, получим

$$\hat{Y}(X + 1) = \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) \hat{Y}(X) \quad (2.4)$$

$$d^4 \hat{Y}(X) / dX^4 - S^4 \hat{Y}(X) = \exp(i(\Phi_0 - \Phi)X) \quad (2.5)$$

$$\hat{Y}(1) = \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) \hat{Y}(0)$$

$$d^2 \hat{Y}(1) / dX^2 = 0, \quad d^2 \hat{Y}(0) / dX^2 = 0$$

$$d^3 \hat{Y}(1) / dX^3 = \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) d^3 \hat{Y}(0) / dX^3 \quad (2.6)$$

$$S^4 = M\Phi^2 - iR\Phi - U \quad (2.7)$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(X) = [C_1 \operatorname{sh}(S(1 - X)) + C_2 \operatorname{sh}(SX) + C_3 \sin(S(1 - X)) + C_4 \sin(SX) + \\ + \exp(i(\Phi_0 - \Phi)X)] / L(\Phi), \quad L(\Phi) = (\Phi_0 - \Phi)^4 - S^4 \end{aligned}$$

где постоянные $C_1 - C_4$ подлежат определению. Подставляя общее решение в гра-

нические условия (2.6), получим четыре уравнения для вычисления четырех постоянных $C_1 - C_4$. Вычисляя постоянные и выполняя обратное преобразование Фурье

$$Y(X, T) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Y}(X) \exp(i\Phi T) d\Phi$$

получим безразмерное поперечное отклонение балки

$$Y(X, T) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp(i(\Phi_0 - \Phi)X) + \frac{(\Phi_0 - \Phi)^2}{S^2 D(\Phi)} \left[\frac{\text{sh}(S(1-X)) + \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) \text{sh}(SX)}{\cos(\Phi_0 - \Phi) - \text{ch}(S)} + \frac{\sin(S(1-X)) + \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) \sin(SX)}{\cos(\Phi_0 - \Phi) - \cos(S)} \right] \right\} \frac{\exp(i\Phi T) d\Phi}{L(\Phi)} \quad (2.8)$$

$$D(\Phi) = \frac{\text{sh}(S)}{\cos(\Phi_0 - \Phi) - \text{ch}(S)} + \frac{\sin(S)}{\cos(\Phi_0 - \Phi) - \cos(S)} \quad (2.9)$$

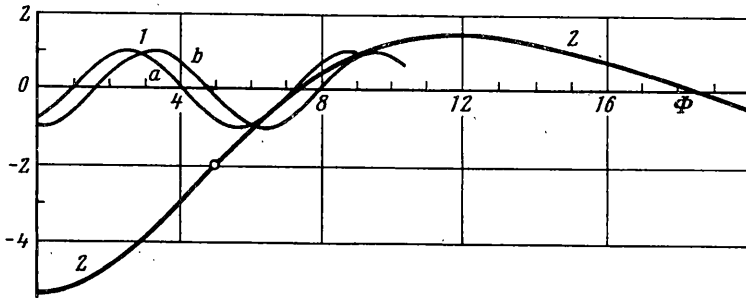
где величина S зависит от Φ и вычисляется при помощи равенства (2.7). Выражение в фигурной скобке интеграла (2.8) не изменяется при замене S на iS и, следовательно, не зависит от выбора ветви корня четвертой степени при вычислении S . Это означает, что выражение зависит от S^4 . Два простых корня многочлена в правой части равенства (2.7) являются полюсами первой степени подынтегральной функции (2.8). Кроме того, полюсами этой функции являются корни уравнения $D(\Phi) = 0$. Выражение в фигурной скобке обращается в нуль, если $L(\Phi) = 0$. Поэтому корни уравнения $L(\Phi) = 0$ не являются полюсами подынтегральной функции.

3. Резонанс. В отсутствие шарниров балка становится однородной. Задача об установившихся колебаниях однородной балки на однородном упругом основании рассматривалась в различных постановках [11–14]. Было показано, что в отсутствие вязкости и при выполнении некоторых условий, связывающих параметры задачи, амплитуда колебаний балки становится бесконечной. При малой вязкости эта амплитуда принимает конечные, но большие значения. Такое явление можно рассматривать как резонанс. В [13–14] было показано, что резонанс однородной балки наступает, если в отсутствие вязкости подынтегральная функция обратного преобразования Фурье имеет действительный полюс второго порядка.

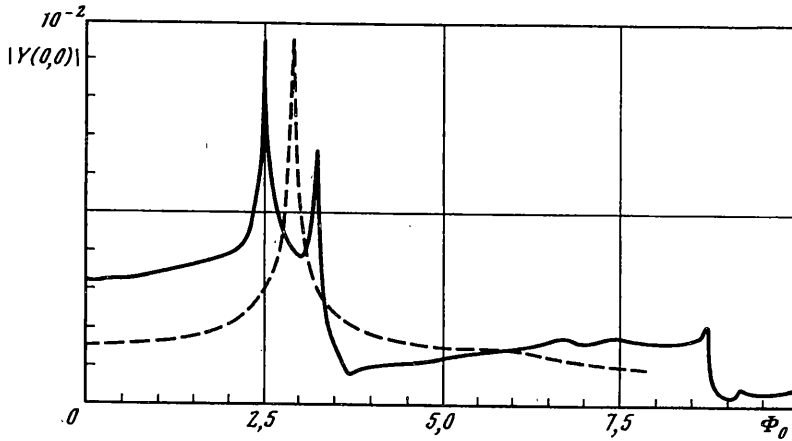
Покажем, что это условие распространяется на периодическую балку. С этой целью будем исследовать корни уравнения $D(\Phi) = 0$. Принимая во внимание равенство (2.9) представим это уравнение в следующем виде:

$$\cos(\Phi_0 - \Phi) = [\text{sh}(S)\cos(S) - \sin(S)\text{ch}(S)] / [\text{sh}(S) - \sin(S)] \quad (3.1)$$

Правая часть равенства (3.1) не изменяется при замене S на iS и, следовательно, зависит от S^4 . Пусть вязкое сопротивление отсутствует. Тогда $R = 0$ и $S^4 = M\Phi^2 - U$, а правая часть равенства (3.1) есть действительная четная функция действительных значений величины Φ . Будем искать действительные корни уравнения (3.1) графически. Кривые 1 и 2 на фиг. 2 изображают левую и правую части уравнения. Вид кривой 2 определяется двумя параметрами M и U , а вид кривой 1 – одним параметром Φ_0 . При увеличении (уменьшении) Φ_0 кривая 1 перемещается вправо (влево). Как видно на фиг. 2, существует бесконечное множество значений Φ_0 , при которых кривая 1 касается кривой 2, уравнение (3.1) имеет двукратный действительный корень, а периодическая балка находится по предположению в состоянии резонанса.



Фиг. 2



Фиг. 3

При отклонении параметра Φ_0 от резонансного значения двукратный корень уравнения (3.1) разветвляется и в зависимости от знака отклонения переходит или в пару действительных, или в пару комплексно-сопряженных корней. Первый случай соответствует бегущим незатухающим волнам, второй – волнам быстро затухающим при удалении от точки T приложения возмущающей силы.

Вычисление интеграла (2.8) при помощи вычетов затруднительно из-за сложности подынтегральной функции и бесконечного числа полюсов. Этот интеграл можно вычислить без затруднений, если, приняв $R \neq 0$, удалить полюсы подынтегрального выражения с действительной оси и ограничиться достаточно большим отрезком интегрирования. Если принять $X = T = 0$, то интеграл определяет поперечное отклонение шарнира во время прохождения над ним возмущающей силы. Абсолютная величина $|Y(0, 0)|$ отклонения периодической балки была вычислена для значений безразмерных параметров балки и однородного вязкоупругого основания $M = 8, R = 0,5$ и $U = 200$. Величина $|Y(0, 0)|$ представлена на фиг. 3 как функция безразмерного параметра Φ_0 , изменяющегося в пределах от 0 до 10. Как видно на фиг. 3, периодическая балка имеет на отрезке $0 \leq \Phi_0 \leq 10$ три отчетливо выраженных резонанса, соответствующих значениям Φ_0 , равным 2,51, 3,25 и 8,79. Первому и второму значениям Φ_0 соответствуют положения a и b кривой 1 на фиг. 2. Третье значение отличается от первого на 2π . Поэтому ему соответствует положение кривой 1, смещенной вправо из положения a на ее период. Таким образом, положения кривой 1, соответствующие первому и третьему значениям Φ_0 , совпадают друг с другом.

Как видно на фиг. 2, кривая 1 в положениях, соответствующих трем упомянутым

выше значениям Φ_0 , касается кривой 2, построенной при указанных выше значениях параметров M и U . Это обстоятельство подтверждает сделанное выше предположение о резонансе. Имеется бесконечное множество точек касания кривой 1 с кривой 2, соответствующих как положительным, так и отрицательным значениям Φ . Каждой точке касания соответствует бесконечное множество значений Φ_0 , отличающихся друг от друга на 2π и являющихся по предположению резонансными. В то же время, на отрезке $0 \leq \Phi_0 \leq 10$, превосходящем период, представлены только три резонанса. Этому обстоятельству можно дать следующее объяснение. Если резонанс выражен отчетливо, то основной вклад в интеграл (2.8) дают большие значения подинтегральной функции, вычисленные для значений переменной интегрирования Φ , близких к точке касания кривых 1 и 2 на фиг. 2. Если $R = 0$, то эти значения близки к полюсу второго порядка подинтегральной функции. Если $R \neq 0$, то параметр R входит в подинтегральную функцию в виде мнимого слагаемого $iR\Phi$, стремящегося к бесконечности при $\Phi \rightarrow \infty$. Поэтому резонанс выражается более отчетливо, если касание кривых 1 и 2 происходит при достаточно малых значениях Φ , как это показано на фиг. 2. Далее, если значения Φ , близкие к точкам касания, существенно отличаются от Φ_0 , то значения многочлена $L(\Phi)$ в знаменателе интеграла (2.8) велики, а соответствующие значения подинтегрального выражения малы. В этом случае резонанс также не проявляется отчетливо. По этой причине на фиг. 3 нет резонансов, соответствующих точкам касания кривых 1 и 2 на фиг. 2 при отрицательных значениях Φ . Возможны и другие причины, по которым резонанс не проявляется отчетливо. Отметим, что при уменьшении параметра R все резонансы проявляются более отчетливо, но при этом вычисление интеграла становится более затруднительным, поскольку полюсы подинтегральной функции располагаются ближе к линии интегрирования.

Если в общем решении дифференциального уравнения (2.5) принять $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, то получим частное решение, описывающее установившиеся колебания однородной балки. Величина $|Y(0, 0)|$, соответствующая однородной балке и вычисленная при упомянутых выше значениях параметров, показана на фиг. 3 штриховой линией. Однородная балка имеет единственный резонанс при $\Phi_0 = 2,92$. Этот резонанс не совпадает ни с одним резонансом периодической балки, что согласуется с приведенным выше анализом подинтегральной функции (2.8).

В заключение сделаем одно замечание о распределении корней уравнения (3.1), представляющее интерес в связи с вычислением интеграла (2.8). Если $R = 0$ и $S^4 = M\Phi^2 - U = 0$, то правая часть равенства (3.1) равна 2, при этом

$$\Phi = \Phi^* = (U/M)^{1/2} = (u/\rho)^{1/2} l / \dot{v}_0$$

Соответствующая точка кривой 2 на фиг. 2 показана белым кружком. Очевидно, что все действительные корни уравнения (3.1) находятся вне отрезка $-\Phi^* \leq \Phi \leq \Phi^*$. Если этот отрезок содержит в себе конечный отрезок интегрирования, принятый при вычислении квадратуры (2.8), то интеграл можно вычислить, приняв $R = 0$. В этом случае подинтегральная функция будет действительной, и вычисление значительно упрощается.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований МПС РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахуняц Г.М. Железнодорожный путь. М.: Транспорт, 1987. 479 с.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
3. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
4. Grassie S.L., Gregory R.W., Harrison D., Johnson K.L. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation // J. Mech. Engng. Sci. 1982. V. 24. No. 2. P. 77-90.

5. Белоцерковский П.М. Высокочастотные вертикальные колебания рельса под действием подвижной гармонической силы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 197–206.
6. Бурчак Г.П., Вучетич И.И., Бузаев А.В. К вопросу выбора расчетных схем и возмущающих воздействий в задачах о вертикальных колебаниях подвижного состава // Тр. ВНИИВ. М.: 1974. Вып. 25. С. 11–27.
7. Belotserkovskiy P.M. On the oscillations of finite periodic beams subjected to a moving concentrated force // J. Sound and Vibr. 1996. V. 193. No 3. P. 705–712.
8. Mead D.J. Vibration response and wave propagation in periodic structures // Trans. ASME. Ser. B. J. Engng. for Industry. 1971. V. 93. No 3. P. 783–792.
9. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
10. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
11. Mathews P.M. Vibration of a beam on elastic foundation // ZAMM. 1958. V. 38. No 3/4. P. 105–115.
12. Mathews P.M. Vibration of a beam on elastic foundation. Pt. 2. // ZAMM. 1959. V. 39. No 1/2. P. 13–19.
13. Муравский Г.Б. Колебания балки типа Тимошенко, лежащей на упругонаследственном основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 167–179.
14. Муравский Г.Б. Резонансные свойства балки типа Тимошенко на упругом основании // Строит. механика и расчет сооружений. 1991. № 1. С. 83–86.

Москва

Поступила в редакцию
6.IX.1995