

УДК 539.3

© 1997 г. В.Ф. ЧЕКУРИН, Р.С. ШПАКОВИЧ

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В ПЛАСТИНАХ

При решении задач об упругом равновесии тел, нагруженных локально распределенными силами, с целью упрощения задачи внешняя нагрузка зачастую заменяется, в соответствии с принципом Сен-Венана, другой, статистически ей эквивалентной. В этом случае определение напряженно-деформированного состояния в окрестности зон нагружения (закрепления или контакта разнородных материалов) требует отдельного рассмотрения. При этом приходим к задачам об исследовании напряженно-деформированного состояния тел, нагруженных по локальным участкам их поверхности самоуравновешенными силами.

Этот момент имеет существенное значение, в частности, для классических теорий тонкостенных элементов (пластин, оболочек), так как при их использовании возникает вопрос о достоверности полученных результатов в окрестностях зон приложения нагрузки.

В различных вариантах уточненных теорий (см., например, [1–6]) удастся достичь существенного повышения точности получаемых решений, однако, вопрос о достоверности результатов непосредственно в окрестностях зон приложения нагрузки все же не может быть решен в рамках этих теорий, которые исходят (явно или неявно) из тех или иных предположений о характере распределения напряжений или перемещений по толщинной координате.

Таким образом, исследование в рамках теории упругости напряженно-деформированного состояния таких объектов в окрестностях зон локального нагружения или закрепления представляет научный и практический интерес.

При воздействии самоуравновешенной локально распределенной поверхностной нагрузки напряжения и деформации затухают при удалении от области ее приложения, т.е. эффект имеет краевой характер. Поэтому исследование этого эффекта для тел, у которых по крайней мере один из размеров значительно превосходит размеры области приложения внешней нагрузки, можно проводить для бесконечных областей. В частности, краевой эффект в прямоугольной плите $0 \leq x \leq 1$, $-h \leq y \leq h$, $-b \leq z \leq b$, $2h \ll 1$, нагруженной по грани $x = 0$, при $b \gg h$ и плоской деформации или при $b \leq h$ и плоском напряженном состоянии можно исследовать решая задачу о полуполосе.

Задача о полуполосе исследовалась многими авторами. Точные решения различных краевых задач для полосы получены в частности, в работах [7–11]. В [10, 11] приводятся также и результаты количественных исследований напряженно-деформированного состояния, выполненных с использованием полученных решений. В [7, 8] с использованием метода однородных решений получены затухающие на бесконечности решения смешанных задач для полубесконечной полосы.

В [12] приводится решение задачи о равномерном нагреве бесконечной полосы, состоящей из двух разнородных полуполос, полученное с использованием метода суперпозиции. Количественные результаты дают представление о характере НДС в зоне контакта разнородных материалов для данной симметрической задачи.

При рассмотрении задачи для полосы важное значение имеет поведение решения в угловых точках. В этой связи отметим [13, 14], в которых в рамках плоской задачи линейной теории упругости изучалось напряженное состояние в области границ раздела разнородных материалов. В этих работах получены асимптотические представления решения [13] и приводятся результаты количественных исследований сингулярного поведения решения в окрестностях угловых точек.

В настоящей работе развивается вариационная методика решения плоской задачи теории упругости для полуполосы со свободными продольными краями, нагруженной самоуравновешенной нагрузкой по торцу, и на этой основе исследуется распределение напряжений при однородном нагреве в условиях заземления торца.

Пусть на торце $x = 0$ полуполосы $\{0 \leq x < \infty, |y| \leq 1\}$ (x, y – безразмерные координаты, отнесенные к полутолщине полуполосы h) заданы компоненты вектора напряжения

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma(y), \quad \sigma_{xy}|_{x=0} = \tau(y) \quad (1)$$

или вектора перемещения

$$u_x|_{x=0} = u(y), \quad u_y|_{x=0} = v(y) \quad (2)$$

а боковые поверхности $y = \pm 1$ – свободны от внешней нагрузки.

Принятое условие самоуравновешенности приложенной внешней нагрузки обеспечивает равновесие рассматриваемого тела, при этом функция напряжений Эри удовлетворяет в области полуполосы бигармоническому уравнению

$$\Delta \Delta W = 0 \quad (3)$$

Условия ненагруженности боковых граней полуполосы выполняются, если принять [14]:

$$W|_{y=\pm 1} = 0, \quad \partial W / \partial y|_{y=\pm 1} = 0 \quad (4)$$

Принимаем, что правые части (1) и (2) удовлетворяют условиям симметрии $\sigma(y) = \sigma(-y)$, $\tau(y) = -\tau(-y)$, $u(y) = u(-y)$, $v(y) = -v(-y)$, либо антисимметрии $\sigma(y) = -\sigma(-y)$, $\tau(y) = \tau(-y)$, $u(y) = -u(-y)$, $v(y) = v(-y)$, поскольку всякая задача вида (1), (3) или (2), (3) может быть сведена к независимым симметрической и антисимметрической задачам.

Будем исходить из известного представления комплексного решения бигармонического уравнения [14], подчинение которого условиям (4) приводит к следующим системам однородных комплексных решений для симметрической (индекс s) и антисимметрической (индекс a) задачи, соответственно,

$$W_k^s = e^{-\gamma_k^s x} (\alpha_k^s \cos \gamma_k^s y + \gamma_k^s y \sin \gamma_k^s y), \quad W_k^a = e^{-\gamma_k^a x} (\gamma_k^a y \cos \gamma_k^a y + \alpha_k^a \sin \gamma_k^a y) \quad (5)$$

Здесь γ_k^s, γ_k^a – комплексные корни уравнений

$$\sin 2\gamma_k^s + 2\gamma_k^s = 0, \quad \sin 2\gamma_k^a - 2\gamma_k^a = 0 \quad (6)$$

α_k^a, α_k^s – комплексные константы

$$\alpha_k^s = -\gamma_k^s \operatorname{tg} \gamma_k^s, \quad \alpha_k^a = -\gamma_k^a \operatorname{ctg} \gamma_k^a \quad (7)$$

Действительную функцию напряжений W представим в виде

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{Re} W_k + B_k \operatorname{Im} W_k] \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем в формулах, имеющих одинаковый вид для симметричной и антисимметричной задачи, индексы a и s , указывающие на тип задачи, будем опускать.

В формуле (8) A_k и B_k – действительные константы, подлежащие определению, исходя из заданных граничных условий (1) или (2). Суммирование ряда (8) ведется по корням уравнений (6), действительная часть которых положительная, вследствие чего функция $W(x, y)$ является затухающей при $x \rightarrow \infty$. При этом имеем следующие выра-

жения для напряжений:

$$\sigma_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \left(\eta_{1k} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} + \eta_{2k} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} \right) + B_k \left(-\eta_{1k} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \eta_{2k} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} \right) \right\} \quad (9)$$

$$\sigma_{xy} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \left(\frac{\partial \eta_{1k}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} + \frac{\partial \eta_{2k}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) + B_k \left(-\frac{\partial \eta_{1k}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \frac{\partial \eta_{2k}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right) \right\} \quad (10)$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \left(\Psi_k \frac{\partial^2 \eta_{1k}}{\partial x^2} + \Phi_k \frac{\partial^2 \eta_{2k}}{\partial x^2} \right) + B_k \left(-\Phi_k \frac{\partial^2 \eta_{1k}}{\partial x^2} + \Psi_k \frac{\partial^2 \eta_{2k}}{\partial x^2} \right) \right\} \quad (11)$$

В формулах (9) – (11) использованы следующие обозначения:

$$\eta_{1k} = e^{-\alpha_k x} \sin \beta_k x, \quad \eta_{2k} = e^{-\alpha_k x} \cos \beta_k x$$

$$\Phi_k^s = -\frac{a_1^s \chi_{22}^s + a_2^s \chi_{11}^s}{a_0^s} + y (\alpha_k^s \chi_{12k}^s - \beta_k^s \chi_{21k}^s)$$

$$\Psi_k^s = \frac{a_1^s \chi_{11}^s - a_2^s \chi_{22}^s}{a_0^s} + y (\beta_k^s \chi_{12k}^s + \alpha_k^s \chi_{21k}^s)$$

$$\Phi_k^a = \frac{a_1^a \chi_{12}^a - a_2^a \chi_{21}^a}{a_0^a} + y (\beta_k^a \chi_{11k}^a + \alpha_k^a \chi_{22k}^a)$$

$$\Psi_k^a = \frac{a_1^a \chi_{21k}^a + a_2^a \chi_{12k}^a}{a^a} + y (\beta_k^a \chi_{22k}^a - \alpha_k^a \chi_{11k}^a)$$

$$a_{0k}^s = \operatorname{ch} 2\beta_k^s + \cos 2\alpha_k^s, \quad a_{0k}^a = \operatorname{ch} 2\beta_k^a - \cos 2\alpha_k^a$$

$$a_{1k}^s = \alpha_k^s \sin 2\alpha_k^s - \beta_k^s \operatorname{sh} 2\beta_k^s, \quad a_{1k}^a = \beta_k^a \operatorname{sh} 2\beta_k^a + \alpha_k^a \sin 2\alpha_k^a$$

$$a_{2k}^s = \alpha_k^s \operatorname{sh} 2\beta_k^s + \beta_k^s \sin 2\alpha_k^s, \quad a_{2k}^a = \beta_k^a \sin 2\alpha_k^a - \alpha_k^a \operatorname{sh} 2\beta_k^a$$

$$\chi_{11k} = \sin \alpha_k y \operatorname{sh} \beta_k y, \quad \chi_{12k} = \sin \alpha_k y \operatorname{ch} \beta_k y$$

$$\chi_{21k} = \cos \alpha_k y \operatorname{sh} \beta_k y, \quad \chi_{22k} = \cos \alpha_k y \operatorname{ch} \beta_k y$$

$$\alpha_k = \operatorname{Re}(\gamma_k), \quad \beta_k = \operatorname{Im}(\gamma_k)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Из формул (9) – (11) следует, что напряжения в полуполосе, соответствующие введенной функции напряжений W , имеют затухающий характер. Кроме того, напряжения, представляемые формулами (9)–(10) являются самоуравновешенными в любом сечении $x = \text{const}$ для произвольных коэффициентов A_k, B_k , что является следствием условий (4). Отсюда следует, что полученное решение может быть подчинено лишь граничным условиям, при которых внешняя нагрузка, действующая на торце $x = 0$, является самоуравновешенной, что согласуется с условиями существования затухающего решения для задачи такого типа, полученными в [8, 9].

Формулы для перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, соответствующих напряжениям (9) – (11), кроме затухающих членов содержат слагаемые вида [8]:

$$u_0 = -ay + c_1, \quad v_0 = ax + c_2 \quad (12)$$

которые представляют перемещения полуполосы, как абсолютно твердого тела. Здесь a, c_1, c_2 – константы, подлежащие определению.

В случае симметрической задачи следует положить в (12):

$$a = 0, \quad c_2 = 0 \quad (13)$$

а в антисимметрическом случае

$$c_1 = 0 \quad (14)$$

Таким образом, в некоторых случаях перемещения могут с ростом x неограниченно возрастать по линейному закону. Поскольку задача решается для неограниченной области, то такое поведение перемещений является физически оправданным. В случаях, когда

$$u_0 = u_0 = 0 \quad (15)$$

не только напряжения и деформации, но и перемещения затухают на бесконечности. Понятно, что наложение условий затухания перемещений (15) сужает множество возможных функций $\sigma(y)$ и $\tau(y)$, $u(y)$ и $v(y)$, которым могут быть подчинены полученные решения. Ограничения на эти функции, обеспечивающие затухание на бесконечности компонент вектора перемещений, для различных вариантов граничных условий, заданных на торце, получены в работах [8, 9]. Этим выделен класс функций, задание которых на границе $x = 0$ обеспечивает одновременное выполнение условий заделки и ненагруженности бесконечно удаленных точек.

Принимая, что функции $\sigma(y)$, $\tau(y)$, $u(y)$, $v(y)$ принадлежат к классу интегрируемых с квадратом, коэффициенты разложения в (8) выберем так, чтобы достичь минимального по норме в L_2 различия между полученным решением при $x = 0$ и условиями (1) или (2), заданными на торце.

С этой целью для задачи (1), (3), (4) введем в рассмотрение квадратичный функционал

$$F_\sigma = \int_0^1 \left((\sigma_{xx}|_{x=0} - \sigma(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=0} - \tau(y))^2 \right) dy \quad (16)$$

который обращается в нуль как только $\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma(y)$ и $\sigma_{xy}|_{x=0} = \tau(y)$.

Условия экстремальности функционала (16) по отношению к функциям $\sigma_{xx}|_{x=0}$ и $\sigma_{xy}|_{x=0}$ сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k M_{km}^{11} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k M_{km}^{12} = K_m^1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k M_{km}^{21} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k M_{km}^{22} = K_m^2 \quad (17)$$

$$M_{km}^{11} = \int_0^1 (T_{1k} T_{1m} + N_{1k} N_{1m}) dy, \quad M_{km}^{12} = \int_0^1 (T_{2k} T_{1m} + N_{2k} N_{1m}) dy$$

$$M_{km}^{21} = \int_0^1 (T_{1k} T_{2m} + N_{1k} N_{2m}) dy, \quad M_{km}^{22} = \int_0^1 (T_{2k} T_{2m} + N_{2k} N_{2m}) dy$$

$$K_m^1 = \int_0^1 (\sigma(y) T_{1m} + \tau(y) N_{1m}) dy, \quad K_m^2 = \int_0^1 (\sigma(y) T_{2m} + \tau(y) N_{2m}) dy$$

$$T_{1k} = \partial^2 \varphi_k / \partial y^2, \quad N_{1k} = \alpha_k \partial \varphi_k / \partial y - \beta_k \partial \psi_k / \partial y$$

$$T_{2k} = \partial^2 \varphi_k / \partial y^2, \quad N_{2k} = \beta_k \partial \varphi_k / \partial y + \alpha_k \partial \psi_k / \partial y$$

Для задачи (2) – (4) используем функционал

$$F_u = \int_0^1 \left((u_x|_{x=0} - u(y))^2 + (u_y|_{x=0} - v(y))^2 \right) dy \quad (18)$$

При определении условий стационарности этого функционала принимаем во внимание, что вариации входящих в него функций $u_x|_{x=0}$ и $u_y|_{x=0}$ выражаются через при-

ращения коэффициентов A_k и B_k , а также параметров a, c_1, c_2 . В результате приходим к бесконечной системе уравнений на неизвестные A_k, B_k, a, c_1, c_2 .

В случае симметрической задачи из коэффициентов a, c_1, c_2 лишь c_1 отлично от нуля. Условия экстремальности функционала (18) сводятся при этом к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных A_k, B_k вида (17), в которой

$$M_{km}^{12} = \int_0^1 (U_{2k}U_{1m} + V_{2k}V_{1m})dy - \int_0^1 U_{2k}dy \int_0^1 U_{1m}dy$$

$$M_{nm}^{21} = \int_0^1 (U_{1k}U_{2m} + V_{1k}V_{2m})dy - \int_0^1 U_{1k}dy \int_0^1 U_{2m}dy$$

$$M_{nm}^{22} = \int_0^1 (U_{2k}U_{2m} + V_{2k}V_{2m})dy - \int_0^1 U_{2k}dy \int_0^1 U_{2m}dy$$

$$K_m = \int_0^1 (u(y)U_{1m} + v(y)V_{1m})dy - \int_0^1 u(y)dy \int_0^1 U_{1m}dy$$

$$K_m = \int_0^1 (u(y)U_{2m} + v(y)V_{2m})dy - \int_0^1 u(y)dy \int_0^1 U_{2m}dy$$

$$U_{1k} = v(\alpha_k \varphi_k - \beta_k \psi_k) - \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left(\alpha_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + \beta_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} \right)$$

$$U_{2k} = v(\alpha_k \psi_k + \beta_k \varphi_k) + \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left(\beta_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} - \alpha_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} \right)$$

$$V_{1k} = -(2 + \nu) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \frac{(\alpha_k^2 - \beta_k^2) \partial^3 \varphi_k / \partial y^3 + 2\alpha_k \beta_k \partial^3 \psi_k / \partial y^3}{(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2}$$

$$V_{2k} = -(2 + \nu) \frac{\partial \psi_k}{\partial y} + \frac{(\alpha_k^2 - \beta_k^2) \partial^3 \psi_k / \partial y^3 - 2\alpha_k \beta_k \partial^3 \varphi_k / \partial y^3}{(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2}$$

Кроме того, имеем соотношение, позволяющее определить c_1 при известных A_k, B_k :

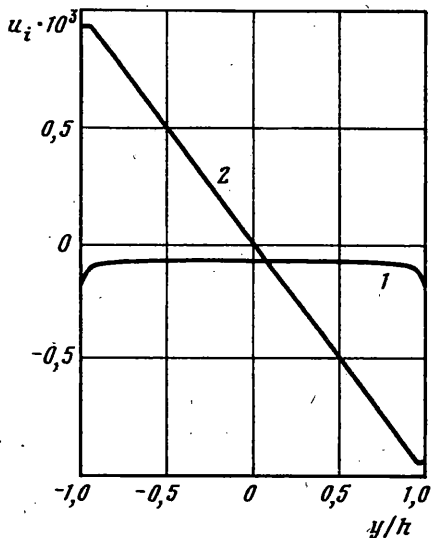
$$c_1 = \int_0^1 u(y)dy - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^1 U_{1k}dy - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 U_{2k}dy \quad (19)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению бесконечной системы вида (17). Если решать эту систему методом редукции, т.е. рассматривать конечную систему, содержащую $2N$ первых неизвестных, то получим приближенное решение. При этом значения функционалов (16) или (18), соответствующие найденным значениям коэффициентов разложения A_k, B_k , дают среднеквадратическую по толщине погрешность найденного решения при $x = 0$. Заметим, что любая найденная таким образом система коэффициентов A_k, B_k дает точное решение некоторой краевой задачи, близкой по норме в L_2 к исходной.

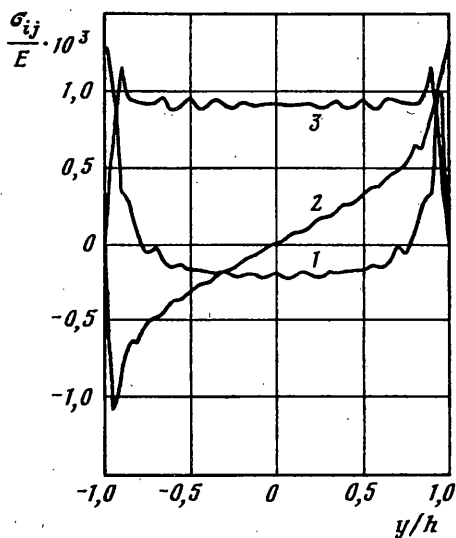
На фиг. 1–4 показаны некоторые результаты решения для

$$u(y) = 0, v(y) = -\alpha y \quad (20)$$

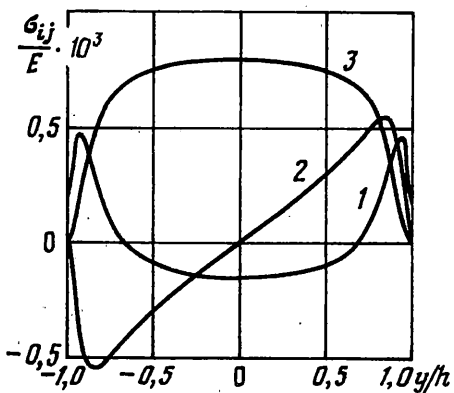
где α – безразмерная константа, равная $1 \cdot 10^{-3}$. Граничные условия вида (20) возникают в задаче о равномерном нагреве защемленной по торцу $x = 0$ балке, а также в задаче о сжатии защемленной по торцу балки осевой силой. При вычислениях ограничивались $N = 13$.



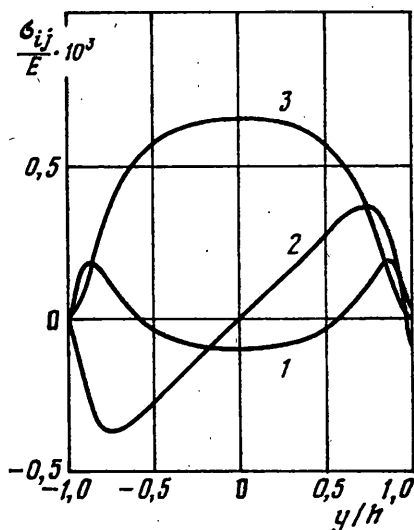
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Как следует из фиг. 1, на которой показано распределение перемещений на торце $x = 0$, для выбранного N наблюдается довольно неплохое совпадение рассчитанных значений компонент вектора перемещений с заданными граничными условиями во всем интервале изменения y , за исключением окрестностей угловых точек $y = \pm 1$. Среднеквадратическая погрешность, вычисленная исходя из значения функционала, составляет при этом несколько процентов от значения α . Однако, анализ распределения компонент тензора напряжений (фиг. 2-4), показывает, что не для всех удалений от торца $x = 0$ точность, достигаемую при выбранном N можно считать удовлетворительной. Действительно, на кривых фиг. 2, на которой показано распределение компонент напряжений при $x = 0,01$ (кривые 1, 2, 3 на всех фигурах относятся к $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ соответственно) наблюдается высокочастотная составляющая

во всем интервале изменения y . Это указывает на недостаточную для данного x точность полученного решения, что, впрочем, следует непосредственно из анализа корней трансцендентного уравнения (6), поскольку $1/\alpha_{14} \cong 1/43 > 0,01$.

Численный эксперимент показал, что увеличение N приводит к сглаживанию кривых распределения напряжений, в результате чего высокочастотная составляющая исчезает, а рассчитанные значения напряжений стабилизируются.

Поскольку $1/\alpha_{14} < 0,1$, то для $x > 0,1$ следует ожидать, что увеличение N уже не будет приводить к заметному изменению рассчитанных значений напряжений. Фиг. 3 и фиг. 4, на которых изображено распределение напряжений по толщинной координате y при $x = 0,1$ и $x = 0,2$ соответственно, подтверждают это.

Из анализа полученных численных результатов следует также, что напряжения затухают с возрастанием координаты x на расстояниях порядка нескольких толщин.

Точное решение бигармонического уравнения имеет в точке $x = 0, y = \pm 1$ сингулярность для σ_{xx} , причем в ее окрестности справедливо следующее асимптотическое представление [8]:

$$\sigma_{xx} = K_I (x^2 + (1-y)^2)^{-\lambda/2} \quad (21)$$

Здесь K_I и λ – постоянные, которые в теории Боджи [12] определяются, исходя из характеристик материала. Следовательно (21) есть асимптотика для ряда (9) при $x \rightarrow 0, y \rightarrow \pm 1$. Это означает, что при достаточно большом N в окрестности указанной точки остаток ряда (9) и остаток соответствующего расходящегося ряда, являющегося асимптотическим разложением правой части (21), есть величины одного порядка малости. Это позволяет получить аналитическое представление для напряжений, справедливое во всем диапазоне изменения переменных x, y :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \sum_{k=1}^N \left\{ A_k \left(\eta_{1k} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} + \eta_{2k} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \right) + B_k \left(-\eta_{1k} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} + \eta_{2k} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} \right) \right\} + \\ & + K_I (x^2 + (1-y)^2)^{-\lambda/2} - \sum_{k=1}^N \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)(-1)^k}{k!} \left((x^2 + (1-y)^2)^{1/2} - 1 \right)^k - \\ & - 1 + o\left((x^2 + (1-y)^2)^{-\lambda/2} \right) \end{aligned}$$

Для оценки N примем во внимание, что асимптотическое представление (21) дает удовлетворительную точность лишь в некоторой окрестности угловой точки $x \rightarrow 0, y \pm 1$, а частичные суммы ряда (9) наоборот, – дают результат, близкий к истинному лишь на некотором удалении от поверхности $x = 0$. Следовательно, необходимо выбрать такое значение N , чтобы зона достоверности результатов, получаемых при использовании отрезка ряда (9) частично перекрывалась с зоной достоверности приближения (21). Согласно результатам работы [13], в которой предпринято численное исследование по методу конечных элементов, приближение (21) можно считать удовлетворительным на расстояниях не больших, чем 0,004 от угловой точки. Исходя из этого, и принимая во внимание, что при больших k : $\alpha_k \cong \frac{1}{4} \pi(4k-1)$, получаем $N \approx 80$.

В заключение отметим, что численная реализация предложенной методики не требует значительных машинных ресурсов. Наиболее трудоемкая процедура – вычисление элементов матриц $M^{11}, M^{12}, M^{21}, M^{22}$ по формулам (12), может выполняться последовательно путем постепенного увеличения размерности матриц и при этом не требуются большие объемы оперативной памяти. Поэтому данная методика может быть реализована на маломощных персональных компьютерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. мех. М.: Наука, 1966. Вып. 3. С. 116–136.
2. *Аксентян О.К., Щепкин Г.Г.* Изгиб толстой плиты с шарнирно закрепленным отверстием // Тр. 7-ой Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 33–37.
3. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вл.Н., Чехов Вик.Н., Шнернко К.И.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наук. думка, 1980. 636 с. (Методы расчета оболочек. Т. I.)
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636с.
5. *Чернуха Ю.А.* О задаче термоупругости для тонких пластин // Мат. методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1985. Вып. 21. С. 37–41.
6. *Васильев В.В.* К дискуссии по классической теории пластин // Изв. АН МТТ. 1995. № 4. С. 140–150.
7. *Прокопов В.К.* О соотношении обобщений ортогональности П.Ф. Папковича для прямоугольной пластины // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 351–355.
8. *Гусейн-Заде М.И.* Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 393–399.
9. *Гусейн-Заде М.И.* О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 752–760.
10. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР МТТ. 1984. № 5. С. 125–135.
11. *Lurie S.A., Vasiliev V.V.* The biharmonic Problem in the theory of elasticity. Gordon and Breach Publ. 1995. 265 p.
12. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
13. *Vogy D.B.* On the problem of edge-bonded elastic quarter-planes loaded at the boundary // Intern. J. Solids Structures 1970. Vol. 6. № 9. P. 1287–1313.
14. *Munz D., Yang J.* Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. Vol. 59. № 4. P. 857–861.
15. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М: Наука, 1975. 575 с.

Львов

Поступила в редакцию
20.IV.1995