МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. А.Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

ЗАМЕЧАНИЯ О СТАТЬЕ В.В. ВАСИЛЬЕВА "ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОБОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИН"

В общей теории пластин и оболочек в настоящее время сложилось три направления исследований. Два из них заключаются в усовершенствовании теорий, которые как и в [1] назовем здесь K-L (Кирхгофа – Лява) и T-R (Тимошенко – Рейсснера) теориями. Под третьим направлением подразумеваются асимптотические подходы к той же проблеме.

Последнее направление развивалось во второй половине нашего столетия во многих странах усилиями многих ученых. Не претендуя на полноту, назовем в США – К.О. Фридрихса, Е. Рейсснера, Дж. Симондса, в Англии – А.Е. Грина, Р.Д. Грегори, во Франции – Ф. Сьярле и его школу, в России – И.И. Воровича, В.Л. Бердичевского, А.Л. Гольденвейзера.

Асимптотические подходы, конечно, у разных авторов различаются, но в результатах пока не было зафиксировано ни одного существенного расхождения.

Представляется естественным обсудить K-L и T-R теории, основанные на использовании гипотез, с точки зрения асимптотических результатов, свободных от каких бы то ни было предположений. Такому сопоставлению посвящена работа [1]. Она подтвердила K-L теорию, а в T-R теории обнаружила некоторые несообразности.

Конечно, не исключено, что T-R теория может быть реабилитирована какими-то другими доводами, но они пока еще не найдены. Известны лишь отдельные числовые примеры, где T-R теория берет верх над K-L теорией, однако, свидетельство асимптотических подходов нельзя сбрасывать со счетов, так как именно они являются наиболее естественным математическим аппаратом теории тонких оболочек и пластин.

Критика, которой подверглась работа [1] в обсуждаемой здесь статье [2], в основном базируется на недоверии к правомерности применения асимптотических методов в теории оболочек и пластин. Оно подкрепляется рассуждениями, при помощи которых легко подвергнуть сомнению весь этот важнейший раздел математики. Это делает соображения В.В. Васильева неубедительными вообще. Тем не менее представляется нужным обсудить их конкретно в силу большой популярности как K-L, так и T-R теорий и, конечно, самих асимптотических методов.

Параметры асимптотики в реальных задачах никогда не бывают сколь угодно малыми. Почему же В.В. Васильев считает, что этот факт закрывает дорогу асимптотическим методам только в теории оболочек и пластин?

Реальные относительные толщины оболочек и пластин часто очень малы (0,01; 0,001 и меньше), но конечно возможны и противоположные случаи. Кроме того, в реальные задачи могут входить помимо толщины и другие параметры, способные ухудшить ситуацию. Это значит лишь, что геометрически тонкая оболочка может вести себя как пространственное упругое тело. Неужели В.В.Васильев думает, что T-R теория в подобных случаях всегда спасет положение? Конечно же нет! Она, вообще говоря, выйдет из строя примерно одновременно с асимптотическими подходами. Только в последних этот момент будет более предсказуемым.

Ни у кого и никогда не вызывали резкого неприятия асимптотические подходы с малым числом приближений. Существует термин "одночленная асимптотика" (сохраняющая лишь асимптотически наибольшие слагаемые). Например, Вейль построил ставшую классической одночленную асимптотику распределения частот свободных колебаний упругих тел. В [1] речь идет об одночленной асимптотической теории оболочек и пластин. Конечно, двучленная, например, асимптотика ценнее одночленной. Она выявляет дополнительные факторы, формирующие изучаемое явление. Однако самые существенные из этих факторов обнаруживаются уже на первом шаге.

Так например, одночленная асимптотика Вейля показывает, что главная часть числа N (количества частот, не превышающих некоторой заданной частоты) в теории изгибных колебаний пластины зависит только от площади пластины. Двучленная асимптотика в этой задаче не опровергает этот результат, а только вносит в него второстепенные поправки, порожденные условиями закрепления пластины, формой ее границы и т.д. Наивно предполагать, что в общей теории оболочек картина кардинально изменится и двучленная асимптотика перевернет вверх ногами все "одночленные" выводы.

Среди критических соображений в [2] есть и такое "Можно предположить, что это (невязка T-R теории с асимптотическими результатами) связано с особенностями изложенного в [1] асимптотического подхода, который отличен от традиционного". Новизна, если и не всегда, то часто, сопутствует научным публикациям, но это не значит, что все они недостоверны. Кроме того, надо отметить, что асимптотические подходы в [1] вовсе не уникальны. Они характерны для задач с так называемым сингулярным вырождением. Непривычен не метод, а вытекающий из него вывод: естественными координатными параметрами для описания краевых явлений в тонких упругих телах является α_1 (расстояние от торца) и α_3 (расстояние от срединной поверхности), а для внутренних зон надо пользоваться параметрами α_1, α_2. Описанное обстоятельство правильно отражает физику решаемой проблемы (об этом подробно в [1]), и эта способность схватывать главное является характерной особенностью асимптотических подходов.

С математической точки зрения T-R теория изгиба пластин отличается от K-L теории наличием дополнительного уравнения, имеющего в декартовых координатах вид

$$\partial^2\Phi / \partial\alpha_1^2 + \{\partial^2\Phi / \partial\alpha_2^2\} - k^2\Phi = 0 \qquad (1)$$

В асимптотической теории пластин уравнения K-L теории также сохраняются. Их порождает исходное приближение внутреннего итерационного процесса. Дополнительно появляется краевой итерационный процесс. Он, при некоторых обстоятельствах, к которым еще предстоит вернуться, приводит к следующему аналогу уравнения (1):

$$\partial^2\Phi / \partial\alpha_1^2 + \partial^2\Phi / \partial\alpha_3^2 = 0 \qquad (2)$$

Сравним эти два (казалось бы совершенно различные) уравнения. В (1) слагаемое в фигурной скобке оказывается в сущности лишним: при большом k^2 и не слишком большой (допустимой в двумерных теориях) изменяемости функции Φ по переменной α_2 оно пренебрежимо мало (на это указывает даже его автор Е. Рейсснер).

После соответствующего упрощения уравнение (1) можно сравнить с (2), положив в первом

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_3) = \Sigma\Phi_n(\alpha_1)\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\frac{\pi\alpha_3}{h}\right)\sin\frac{2n-1}{2}\pi\frac{\alpha_3}{h}$$

и оставив в правой части равенства только первый член ряда. Тогда (2) будет отличаться от (1) только тем, что в последнем k^2 заменится на $\pi^2/4h^2$. В [3] отмечено, что эти числа мало отличаются друг от друга. Соответственно, в сущности отпадут и различия в обсуждаемых уравнениях. Это должно было бы подтолкнуть В.В. Васильева к безрадостному для T-R теории выводу, что в задаче изгиба пластины она является в высшей степени частным случаем одночленного асимптотического решения соответствующей задачи теории упругости. Причина утраты общности понятна: она лежит в излишней приверженности любителей гипотез к линейному закону распределения искомых функций по толщине.

Почти линейной по α_3 на рассматриваемом интервале является функция $\Phi_1(\alpha_1)\sin(\pi\alpha_3/2h)$. Но на крае пластины закон изменения искомых величин по α_3 диктуется не гипотезами, а условиями задачи, в которых закон изменения по α_3 в принципе может оказаться совершенно произвольным. К таким сложностям способно адаптироваться уравнение (2), но никак не уравнение (1). И это еще не все. T-R теория не только не способна учитывать сложные краевые воздействия, но не может должным образом реагировать и на условия закрепления края пластины. В [4] показано, что уравнение (2) является асимптотическим аналогом уравнения (1) только тогда, когда край пластины закреплен не слишком жестко. В противном случае (2) превратится в бигармоническое уравнение и рухнет даже тот ненадежный мостик, который соединял описанным образом уравнения (1) и (2).

Утверждение В.В. Васильева о неединственности асимптотических решений – голословно и в высшей степени удивительно. Много лет тому назад он публично обещал привести пример столь странного феномена, но пока этот пример не появился. Конечно, он, если и появится, то будет сопровождаться оговорками, исключающими его связь с теорией оболочек и пластин.

Единственность асимптотической процедуры, использованной в [1], проверялась. Установлено, что при любой замене принятых там асимптотик не удастся получить ничего, кроме противоречий. Соответствующие рассуждения в принципе просты, но слишком громоздки для публикации в журнале.

В.В. Васильев не понял смысла статьи [5] (см. также [6]). Там обсуждаются такие теории пластин, которые не связаны с требованием отсутствия поперечного сдвига (будем их здесь условно называть сдвиговыми).

Частным случаем сдвиговой теории является T-R теория, названная в [5, 6] инженерной. Другой вариант сдвиговой теории можно построить при помощи асимптотического интегрирования уравнений пространственной теории упругости, выполненного с повышенной точностью. Так построенная сдвиговая теория названа в [5, 6] асимптотической. Асимптотическая теория сопоставлена с инженерной и результаты не совпали. Из этого В.В. Васильев, без всяких на то оснований, заключает, что асимптотический результат – ошибочен. Все поставлено с ног на голову. В асимптотической сдвиговой теории, по определению, соблюдается аккуратность в отбрасывании малых членов одинакового порядка. Следовательно, в инженерной сдвиговой, т.е. в T-R теории, такое правило нарушается. Это и послужило одной (но не единственной) причиной назвать в [1] T-R теорию математически непоследовательной.

В работах [5, 6] обнаружилось также, что в асимптотической сдвиговой теории перемещения в направлении толщины распределяются уже не по линейному, а по квадратичному закону. Сохранение линейного закона в инженерной сдвиговой теории, как разъясняется в [1], свидетельствует о второй (и тоже не последней) математической непоследовательности T-R теории.

Весь абзац, посвященный "разгрому" концепции декомпозиции НДС пластины, основан на непонимании "духа" асимптотических подходов. Под краевым НДС (под погранслоем, в математических терминах) в [1] понимается не всякое, а лишь такое НДС, которое затухает с определенной скоростью. Она в [1] задана формулами преобразования независимых переменных (2.1), означающими, что показатель изменяемости краевого НДС по α_1 должен быть равен единице, а это "правилами асимптотической игры" для внутреннего НДС недопустимо. Другими словами, существует барьер между внутренним и краевым НДС, а опасность их "перемешивания" В.В. Васильеву просто почудилась. Учитывать взаимодействие внутреннего и краевого НДС конечно нужно и этому в [1] уделено большое внимание. Но зачем, как рекомендует В.В. Васильев, это делать дважды: один раз при наложении граничных условий, а второй – при построении каждого НДС в отдельности?

Попытки обойтись в теории оболочек и пластин без расчленения полного НДС на внутреннее и краевое предпринимались неоднократно. Они основаны на прямом или завуалированном разложении в степенные ряды по поперечной координате. Ни одна из этих работ большой популярности не завоевала. Это и понятно. Степенные ряды все свои возможности растрачивают на аппроксимацию второстепенных краевых НДС, а в наиболее важное внутреннее НДС они вносят лишь незначительные исправления.

Характерная для асимптотических подходов декомпозиция НДС является аналогом известных методов улучшения сходимости рядов и борьбу с ней едва ли можно признать полезным занятием.

В.В. Васильев считает, что в [1] "...исходные асимптотические порядки напряжений и перемещений... обоснования не имеют... и, следовательно ...ее (асимптотическую теорию) математическим обоснованием (K-L теории) назвать нельзя".

Здесь ситуация совершенно искажена. Соотношениями (1.1) – (1.3) и (1.5) работы [1] не вводятся какие бы то ни было предположения, а задается некоторый класс интегралов дифференциальных уравнений пространственной теории упругости (достаточно широкий, чтобы ими можно было приближенно аппроксимировать внутреннее НДС оболочек или пластины). Из перечисленных соотношений совершенно элементарно выводятся уравнения (1.4) работы [1]. Они совпадают с уравнениями K-L теории. Далее (уже не элементарно и весьма пространно) показывается, что произволы уравнений K-L теории вместе с произволами уравнений теории краевого НДС достаточны для приближенного решения краевых задач пространственной теории упругости. Этим обосновываются соотношения (1.1) – (1.3) и (1.5), но В.В. Васильев не счел нужным обратить внимание на описанные, основные для всей работы [1], рассуждения. А ведь они составляют традиционную схему асимптотической теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Эта схема заключается в том, что вид решения "угадывается" и принятое предположение проверяется задним числом по корректности порождаемых им краевых задач (см., например [7]). Почему же автору предлагаемых замечаний предоставлена честь отвечать за это достижение математики?

Надо заметить, что в асимптотической теории пластин и оболочек возникает специфическая трудность. Система дифференциальных уравнений пространственной теории упругости в общем случае к одному уравнению не сводится. Только это и порождает необходимость "угадывать" асимптотику напряжений и перемещений. В противоположном случае достаточно было бы подбирать лишь масштабные преобразования независимых переменных.

Лишена содержания фраза В.В. Васильева "строго говоря, асимптотические представления показывают только скорость, с которой изменяются некоторые функции, если малый параметр стремится к нулю".

Она была бы оправданной по отношению к формулам (1.1), (1.2), если бы в [1] не указывался способ определения величин σ_{ij}, σ_{i3}, σ_{33}, v_i,v_3 в этих соотношениях. Но если не об этом, так о чем же главным образом и идет речь в [1]?

Подводя итог дискуссии по теории пластин, цитированной в [2] под номерами 2–6 (ниже она будет называться просто дискуссией), В.В. Васильев обнаруживает следующие дефекты физического характера в K-L теории:

(a) нарушен принцип Лагранжа;

(b) нет соответствия между порядком дифференциальных уравнений и числом физических граничных условий;

(c) естественные граничные условия не имеют физического смысла;

(d) существуют нерешаемые по K-L теории задачи;

(e) отсутствует физический смысл в решении задачи о параболическом штампе.

Все эти обвинения не состоятельны по следующим соображениям.

Дефект (*a*). О вариационных принципах в любой двумерной теории упругих тел (K-L или T-R – безразлично), строго говоря, нельзя даже ставить вопроса. В этих теориях нет ни напряжений (они заменены усилиями и моментами), ни пространственных перемещений (они заменены перемещениями срединной поверхности и углами поворота). Поэтому формально лишено смысла даже такое фундаментальное понятие, как работа. Речь может идти лишь о каких-то двумерных аналогах вариационных принципов. Часто такие аналоги основываются на заимствованных из сопромата предположениях, что усилия и моменты совершают работу соответственно на перемещениях срединной поверхности и углах поворота. Но это уже не принципы, а эрзацы, чреватые какими-то неточностями.

Вопрос о двумерных аналогах вариационных принципов в K-L теории рассмотрен и положительно решен уже более полувека назад [8, 9]. Показано, что указанное выше представление о работе усилий и моментов находится по точности в строгом соответствии с гипотезами K-L теории и что двумерный аналог вариационных принципов в K-L теории существует и обладает всеми соответствующими математическими свойствами, надо только потребовать, чтобы соотношения упругости K-L теории были выбраны с соблюдением некоторых мер предосторожности (в частности, соотношения упругости не должны противоречить так называемому шестому уравнению равновесия).

Надо заметить, что в K-L теории перерезывающие усилия имеют особый статус; они не связаны с деформацией срединной поверхности и являются чисто статическим фактором, не совершающим никакой работы. Это порождает некоторую трудность в проблеме формулировки вариационных принципов K-L теории. Она преодолевается благодаря тому, что перерезывающие усилия легко поддаются исключению из уравнений равновесия. В результате оказывается, что K-L теория допускает вариационную формулировку со всеми связанными с этим математическими преимуществами. Более того, можно утверждать, что вариационная формулировка K-L теории (и только K-L теории) находится в полном соответствии (по точности) с гипотезами, положенными в ее основу.

Специфика вариационной формулировки K-L теории заключается в том, что в рамках принципа Лагранжа уравнениями Эйлера для K-L теории являются три равенства, получаемые в результате исключения "странных" перерезывающих усилий N_1, N_2 из первых трех уравнений равновесия K-L теории оболочек. К ним надо присоединить четвертое и пятое уравнения равновесия, трактуя их как формулы, раскрывающие статический смысл усилий N_1, N_2. Шестое уравнение равновесия, по предположению, должно вытекать из соотношений упругости. Это значит, что в K-L теории аналог принципа Лагранжа полностью сохранится и из него, вопреки утверждению В.В. Васильева, следуют все шесть уравнений равновесия теории оболочек, а беда, которая здесь обнаружилась в [2], сводится к необходимости не слишком примитивно трактовать вариационные принципы. Кстати, в T-R теории с вариационными принципами дело обстоит не проще, а сложнее, чем в K-L теории. Об этом подробно говорится в [1].

Трудно понять, о какой глобальной неуравновешенности говорит В.В. Васильев в [2]. В K-L теории уравнения равновесия, как бы они не были выведены, являются точными (обеспечивают строгую уравновешенность воображаемого двумерного упругого тела под действием воображаемых сил и моментов).

Дефект (*b*). Порожден слишком упрощенным пониманием термина "физический смысл граничных условий в двумерной теории оболочек". Он сложнее, чем может показаться. Именно "легким" отношением к нему и объясняются беспрецедентно долгие споры по поводу формулировки граничных условий для свободного края оболочки или пластины.

Будем для конкретности говорить о свободном торце тонкой трехмерной оболочки. В силу закона "действие равно противодействию" на нем всюду по толщине должны считаться заданными три краевые напряжения. Эти требования, конечно, в двумерной теории выполнить невозможно. Почему же их можно выполнять интегрально? Ответ на этот вопрос не прост.

K-L теория является приближенным методом исследования внутреннего НДС оболочки. Поэтому граничные условия в ней должны выполнять двойную роль: учитывать все, что влияет на проникающие НДС, и отсеивать все, порождающее лишь краевые возмущения. Этим определяется как физический смысл граничных условий, так и их интегральный (сен-венановский) вид.

В [1] показано, что число понимаемых таким образом граничных условий в K-L теориях на свободном крае оболочки равно четырем, т.е. их именно столько, сколько можно выполнить, и автор замечаний располагает материалом, позволяющим утверждать, что при изложенном подходе к рассматриваемому вопросу такое соответствие будет соблюдаться всегда.[1]

К изложенной выше трактовке граничных условий в теории изгиба пластин был близок Буссинеск [10]. Однако, к сожалению, победила красивая, но неправильная идея преобразования Кельвина – Тэта, в которой учитывается только соображения статики, но не принимается во внимание способ закрепления края.

Дефект (*c*). Естественными граничными условиями называются требования, обусловливающие существование тех математических свойств, которые делают столь привлекательными вариационные принципы. В K-L теориях к естественным принадлежат и так называемые кирхгофовские условия. Свое математическое предназначение они полностью выполняют и это важнее, чем наличие в них простого физического смысла.

Дефект (*d*). О нем остается лишь повторить сказанное в [1]. Приближенные методы всегда имеют определенную область применимости и опровергать их контрпримерами можно лишь тогда, когда последние не выходят за пределы этой области.

Кстати, для T-R теории контрпример тоже построить можно. Его схема описана в [3]. Она относится к случаю, когда край пластины достаточно жестко закреплен (для построения этого контрпримера не требуется выходить за пределы применимости T-R теории).

Дефект (*e*). Парадокс параболического штампа. Здесь недоразумение, о котором говорится в [1], лежит на совести автора замечаний. Не обратив внимания на фиг. 2 в [11], он считал, что штамп вдавливается в пластину лишь с одной стороны. Поэтому приведенные в [1] рассуждения, оказались не относящимися к делу. Исправить это несложно.

Рассмотрение фиг. 2 не вносит полной ясности в обсуждаемый вопрос. Непонятно, что задано, а что надо определить. Будем считать, что заданы прогибы на обеих лицевых поверхностях. Тогда получится задача не изгиба, а обжатия пластины. Откуда же при этом возьмется бигармоническое уравнение, в которое для опровержения K-L теории надо вставлять заданный прогиб?

Задача в приведенной выше постановке обсуждена с асимптотической точки зрения в [12], где пластина названа прокладкой. Показано, что в первом приближении прокладка работает как набор вертикальных стержней, сжимаемых заданными на концах перемещениями, и от бигармонического уравнения, а также связанного с ним парадокса, снова ничего не остается.

---

[1] Показано в статье А.Л. Гольденвейзера "Граничные условия в двумерной теории оболочек. Математический аспект вопроса".

Замечание. В K-L теориях оболочек и пластин принимается, среди прочих, и гипотеза о несжимаемости нормального элемента. В [8] указывалось, что это предположение в сущности – лишнее. Отказ от него только несущественно усложняет уравнения состояния, не влияя на общие свойства дифференциальных уравнений. В то же время сохранение этого предположения выключает из рассмотрения детали, относящиеся к способу приложения внешних воздействий, а в некоторых задачах это сопряжено с существенными опасностями. Одна из них и возникает в пресловутой задаче о штампе, которая вообще имеет смысл только тогда, когда достаточно ясно определен механизм приложения внешних воздействий. По вопросу несжимаемости см. также [13].

Основные результаты дискуссии В.В. Васильев (и только он) формулирует так: "...существо проблемы совсем не в том, что T-R теория учитывает сдвиг... и вопрос о том какая из них (K-L или T-R теория) точнее вообще не стоит". Сущность в том, что в T-R теории полностью реализуется кинематическая модель, определяемая соотношениями $v_x = zq_x$, $v_y = zq_y$, $w = w(x,y)$.

В связи с этим отметим, что приближенные теории очень легко как сурово критиковать (утверждая, что допущенные в них нарушения имеют катастрофический характер), так и возносить до небес (утверждая, что первостепенно важны ненарушенные факторы). В.В. Васильев этим приемом здесь и воспользовался.

По его мнению, в теории пластин нет ничего важнее как полностью реализовать некую кинематическую модель, не обращая при этом внимания даже на точность окончательного результата. Во имя этого В.В. Васильев призывает переделать всю учебную литературу. На самом деле гораздо важнее было бы избавить теорию пластин от тех слишком простых линейных соотношений, кинематические возможности которых так беспокоят В.В. Васильева.

Удивительно, что такая повышенная чувствительность В.В. Васильева к "кинематическим возможностям" его формул (1) уживается с полным равнодушием к свидетельству асимптотических методов о сложности и разнообразии краевых явлений в почти двумерных упругих телах. Неужели он не чувствует, что структура уравнения (5) в работе [2] слишком проста для их описания?

Приведем разъяснения по вопросам, которые В.В. Васильев не понял.

Более общей и более точной в [1] называется не та приближенная теория, в уравнениях которой наличествуют лишние члены, исчезающие вместе со стоящими при них коэффициентами, а та, которая при этом приближает нас к "истине". В рассматриваемом случае – к результату, получаемому по трехмерной теории. В дискуссии такие свойства приписываются T-R теории без всякой аргументации.

Формула относительной погрешности в теории приближенных вычислений записывается так $\varepsilon = \delta A/A$. При уменьшении A относительная погрешность растет. С учетом этого в [1] написано: "..."свидетельства" дефектности теории Кирхгофа... относятся к случаям, когда так полученные решения либо обращаются в тождественный нуль, либо становятся асимптотически малыми. Ситуация не нова. Она может возникнуть в любом приближенном методе".

Совершенно непонятно, почему В.В. Васильев, во-первых, считает, что к такому выводу можно прийти лишь после изучения дискуссии по теории пластин, и во-вторых, что такое свойство присуще лишь асимптотическим методам и свидетельствует об их недостатках.

Еще одно свидетельство ущербности моей статьи [1] заключается в том, что ее утверждения не всегда совпадают с тем, что говорится в учебниках и справочниках. С каких это пор авторам научных статей стали воспрещаться такие "нарушения приличий"? И каких учебников необходимо придерживаться? Тех, которые уже есть, или тех, которым предстоит еще подвергаться капитальным переделкам В.В. Васильева и его сторонников?

Основные итоги работы [1] и приведенных здесь рассуждений заключаются в следующем.

Многочленную асимптотику теории тонких пластин и оболочек в принципе надо строить, чередуя решения краевых задач в плоскости независимых переменных α_1, α_2 и краевых задач в плоскости независимых переменных α_1, α_3, т.е. многократно выполняя расчет по K-L теории и строя решения антиплоской и плоской задачи теории упругости (практически это достаточно проделать один раз, а часто можно ограничиться лишь расчетом по K-L теории). Такой подход, при использовании только исходного приближения, уместно было бы назвать обобщенной теорией Кирхгофа – Лява.

Поскольку асимптотическим подходам свойственно "умение" схватывать главное в рассматриваемом явлении, из этого вытекает, что теории, привязанные только к переменным α_1, α_2, плохо согласуются с физической сущностью проблемы.

Неочевидна целесообразность дальнейших попыток продвинуться вперед ценой смягчения гипотез Кирхгофа – Лява, оставляя их едиными для внутреннего и краевого НДС. Более перспективным выглядит введение понятия краевого НДС с выделением его в самостоятельное рассмотрение. Такой подход является естественным аналогом концепции прандтлевского погранслоя в гидродинамике. Более того, в [14] показано, что эта концепция адекватна также многим проблемам математической физики.

Отсюда следует, что для превращения теории тонких оболочек и пластин в антисимптотический заповедник, В.В. Васильеву нужно было бы найти более весомые доводы.

Одночленную асимптотику теории тонких оболочек и пластин можно считать в настоящее время уже построенной. Она может служить математической трактовкой обобщенной теории Кирхгофа – Лява. Однако наряду с этим оправданным выглядит (с педагогической точки зрения) и желание сохранить гипотезы. Его вероятно следует осуществлять в увязке с результатами асимптотического анализа, а не вопреки им. Этого, например, можно достичь при помощи "парных гипотез": разных для внутреннего и краевого НДС. Такая попытка предпринималась в [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
2. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 150–155.
3. *Гольденвейзер А.Л.* О внутреннем и краевом расчетах тонких упругих тел // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 8. С. 1019–1032.
4. *Гольденвейзер А.Л.* О краевом напряженно-деформированном состоянии тонких упругих оболочек // Proc. Estonian Acad. Sc. Ser. Phys., Math. 1993. Т. 42. № 1. С. 32–44.
5. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 127–138.
6. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On the Timoschenko–Reissner type theories of plates and shelles // Intern. J. Solids and Structures. 1993. V. 10. № 3. P. 675–694.
7. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77).
8. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 519 с.
9. *Гольденвейзер А.Л.* О применимости общих теорем теории упругости к тонким оболочкам // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 1. С. 3–14.
10. *Todhunter I., Pirson K.* A History of the theory of elastisity and the strength of materials. N.I. Dover. 1990. V. 2. Pt. 2. 546 p.
11. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. АН МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
12. *Гольденвейзер А.Л.* Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. АН МТТ. 1992. № 3. С. 5–17.

13. *Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* О роли поперечного обжатия в динамике оболочек // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 644–650.
14. *Fudrichs K.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Soc. 61, 6, 1955.
15. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1997