**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997**

УДК 539.3

© 1997 г. **Б.В. НЕРУБАЙЛО, В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, М.Е. РЕЗУНЕНКО**

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

С помощью двумерного преобразования Фурье построены фундаментальные решения уравнений изгиба гиперболического параболоида. Методом Ватсона несобственные интегралы на линиях главных кривизн представлены одинарными степенными рядами, умноженными на логарифмическую функцию. Предложена простая асимптотика поведения решения в окрестности точки приложения нормальной сосредоточенной силы.

Из работ, посвященных изучению напряженно-деформированного состояния оболочек отрицательной гауссовой кривизны под действием сосредоточенных нагрузок, укажем [1–4]. Распределение силовых факторов в окрестности точки приложения нормальной силы находилось в [2–4] с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье, что приводило к несобственным интегралам. Предлагались различные методы вычисления этих интегралов, но полученные результаты имели весьма громоздкий и сложный вид. Ниже используется способ вычисления интегралов, разработанный Ватсоном [5]. Он позволяет представить фундаментальные решения дифференциальных уравнений оболочек отрицательной кривизны на линиях главных кривизн одинарными степенными рядами, умноженными на логарифмическую функцию. В аналогичной форме решения уравнений оболочек нулевой и положительной кривизн были получены ранее [6].

Выражения для нормального перемещения $w(x, y)$, тангенциальных усилий $t_1(x, y)$, $t_2(x, y)$, изгибающих моментов $m_1(x, y)$, $m_2(x, y)$ в окрестности точки приложения нормальной силы P, совпадающей с началом координат, имеют вид [7]:

$$w = \frac{P}{4\pi^2 D}A_1,\quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad t_1 = -\frac{PEh}{4\pi^2 DR_2}A_2 \tag{1}$$

$$t_2 = -\frac{PEh}{4\pi^2 DR_2}A_3,\quad m_1 = -\frac{P}{4\pi^2}(A_4+\nu A_5),\quad m_2 = -\frac{P}{4\pi^2}(A_5+\nu A_4)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки; R_1, R_2 – радиусы кривизны, A_j – двумерные интегралы Фурье, которые могут быть записаны в виде

$$A_j(x,\ 0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(\xi^2+\eta^2)^4 + b^4(\xi^2+\lambda\eta^2)^2]^{-1}e^{-i(\xi x+\eta y)}[(\xi^2+\eta^2)^2\delta_{1j} + (\xi^2+\lambda\eta^2)^2\eta^2\delta_{2j} +$$

$$+(\xi^2+\lambda\eta^2)^2\xi^2\delta_{3j} + (\xi^2+\eta^2)^2\xi^2\delta_{4j} + (\xi^2+\eta^2)^2\eta^2\delta_{5j}]d\xi d\eta$$

$$b^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2R_2^2},\quad |\lambda| = \frac{R_2}{R_1}\ (j=1,\ldots,\ 5)\ \ -1 \leqslant \lambda \leqslant 0$$

Учитывая совпадение линий главных кривизн с осями x и y, анализ поведения интегралов проведем вдоль этих осей.

Приведем для примера вычисление интеграла $A_1(x, 0)$ вдоль оси абсцисс. Полагая $y = 0, j = 1$ и делая замену переменных $\xi = \gamma\cos\varphi$, $\eta = \gamma\sin\varphi$, получим

$$A_1(x,\ 0) = 4\int_0^{\pi/2}\Phi(\varphi)d\varphi,\ \ \Phi(\varphi) = \int_0^{\infty}\frac{\gamma\cos(x\gamma\cos\varphi)}{\gamma^4 + b^4(\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi)^2}d\gamma$$

Применяя к $\Phi(\varphi)$ преобразование Меллина по переменной x и вычисляя получающийся двойной интеграл при помощи таблиц [8], после обращения преобразования Меллина приходим к выражению

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{8\pi b_1^2 i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{(b_1 x\cos\varphi)^s}\Gamma\left(\frac{2-s}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2+s}{4}\right)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}ds$$

$$b_1^4 = b^4(\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi)^2,\ \ 0 < s < 1,\ \ 0 < c < 1$$

При помощи теории вычетов находим

$$\Phi(\varphi) = \frac{4}{b_1^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(b_1 x\cos\varphi)^{4k+2}}{(4k+2)!}(\Psi(4k+3) - \ln|b_1 x\cos\varphi|) + \frac{\pi}{b_1^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(b_1 x\cos\varphi)^{4k}}{(4k)!}$$

где $\Psi(s)$ – пси-функция.

Интегрируя $\Phi(\varphi)$ по полярному углу от 0 до $\pi/2$, найдем значение A_1.

Заметим, что для этого необходимо вычислить три типа интегралов:

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2m}|\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi|^{m-1}d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2m}|\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi|^{m-1}\ln|\cos\varphi|d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2m}|\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi|^{m-1}\ln|\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi|d\varphi$$

где первые два интеграла берутся, используя таблицы [8], предварительно понизив степень с помощью бинома Ньютона. Что касается последнего интеграла, то, используя известный результат [8]:

$$\int_{-1}^{+1}T_n(y)(1-y^2)^{-1/2}\ln|x-y|dy = g_n T_n(x) \tag{2}$$

в котором $T_n(y)$ – полином Чебышева

$$g_n = \begin{cases}-\pi/n & \text{при}\ \ n \neq 0\\ -\pi\ln 2 & \text{при}\ \ n = 0\end{cases}$$

С помощью подстановок $x = (1+\lambda)/(1-\lambda)$, $y = \cos 2\varphi$ перепишем (2) в виде

$$\int_0^{\pi/2}\cos 2k\varphi\ln|\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi|d\varphi = \frac{\pi}{2}\delta_{k0}\ln\frac{1-\lambda}{4} + \frac{(-1)^{k+1}\pi}{2k}[1-\delta_{k0}]T_k\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$$

Это позволяет нам вычислить оставшийся третий интеграл (также понизив степень и разложив его по косинусам кратных дуг). В результате приходим к следующему выражению для $A_1(x, 0)$:

$$A_1(x,\ 0) = \frac{4\pi}{b^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f(x,\ 4k+2)\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^l\lambda^{2k-l}(1-\lambda)^l\big[S(4k+2l+1)\{\Psi(4k+3) -$$

$$-\ln\frac{|bx|}{2} + R(4k+2l+2)\Big\} - M(2k+l+1)\big] +$$

$$+\frac{\pi}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(x,\ 4k)\sum_{l=0}^{2k-1}(1-\lambda)^l\lambda^{2k-l-1}L(2k+l)C_{2k-1}^l+\frac{\pi}{b^2}I$$

$$f(x\delta_{1j}+y\delta_{2j},\ k)=\frac{b^k(x\delta_{1j}+y\delta_{2j})^k}{k!}$$

$$C_{2k}^l=\frac{l!}{(2k)!(l-2k)!};\quad R(k)=\sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^r}{r}$$

$$S(k)=\frac{k!}{2(k+1)!!};\quad I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{|\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi|}$$

$$M(k)=\frac{1}{2^{2k+1}}\left\{\sum_{r=0}^{k-1}C_{2k}^r\frac{(-1)^{k-r}T_{k-r}\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)}{k-r}-\frac{1}{2}C_{2k}^k\ln\frac{1-\lambda}{4}\right\}$$

$$L(k)=\frac{1}{2^{2k}}\left\{\sum_{r=0}^{k-1}2C_{2k}^r\frac{\sin 2(k-r)\varphi_1}{k-r}+\frac{1}{2}C_{2k}^kH(\lambda)\right\}$$

$$\varphi_1=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}};\quad H(\lambda)=4\varphi_1-\pi$$

Применение изложенного выше метода позволяет вычислить и оставшиеся интегралы. Приведем результаты вычислений, используя символ Кронекера δ_{ij}:

$$A_i(x(\delta_{2i}+\delta_{3i}),\ 0)=\frac{4\pi}{b^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}f(x,\ 4k+2)\sum_{l=0}^{2k+1}C_{2k+1}^l(1-\lambda)^l\lambda^{2k-l+1}\times$$

$$\times\left[S(4k+2l+1)\left(\frac{\delta_{2i}}{4k+2l+3}+\delta_{3i}\right)\left\{\Psi(4k+3)-\ln\frac{|bx|}{2}+\right.\right.$$

$$\left.+\delta_{2i}\left(-\Psi\left(2k+l+\frac{3}{2}\right)+\Psi(2k+l+3)\right)+R(4k+2l+4)\delta_{3i}\right\}-M(2k+l+2)\times$$

$$\left.\times(\delta_{2i}-\delta_{3i})+M(2k+l+1)\delta_{2i}\right]+\frac{\pi}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(x,\ 4k)\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^l(1-\lambda)^l\lambda^{2k-l}\times$$

$$\times[L(2k+l)\delta_{2i}-L(2k+l+1)(\delta_{2i}-\delta_{3i})]+\frac{\pi}{b^2}N_i$$

$$A_i(0,\ y(\delta_{1i}+\delta_{2i}+\delta_{3i}))=\frac{4\pi}{b^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}f(y,\ 4k+2)\sum_{l=0}^{2k+1}C_{2k+1}^l(\lambda-1)^l\times$$

$$\times\left[S(4k+2l+1)\left(\frac{\delta_{3i}}{4k+2l+3}+\delta_{2i}+\delta_{1i}\right)\left\{\Psi(4k+3)-\ln\frac{|by|}{2}+\delta_{3i}\left(-\Psi\left(2k+l+\frac{3}{2}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Psi(2k+l+3)\right)+R(4k+2l+2+2\delta_{2i})(\delta_{1i}+\delta_{2i})\right\}+M^1(2k+l+2)(\delta_{2i}-\delta_{3i})+$$

$$\left.+M^1(2k+l+2)(\delta_{3i}-\delta_{1i})\right]+\frac{\pi}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(y,\ 4k)\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^l(\lambda-1)^l\times$$

$$\times[L^1(2k+l)(\delta_{1i}+\delta_{3i})+L^1(2k+l+1)(\delta_{2i}-\delta_{3i})]+\frac{\pi}{b^2}N_i$$

$$A_i(x(\delta_{4i}+\delta_{5i}),\ 0)=4\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(x,\ 4k)\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^l(1-\lambda)^l\lambda^{2k-l}\times$$

$$\times[S(4k+2l+1)(\delta_{4i}-\delta_{5i})+S(4k+2l-1)\delta_{5i})\Big\{\Psi(4k+1)-\ln\frac{|bx|}{2}+\frac{(4k+2l-1)!}{(4k+2l+1)!!}\delta_{5i}+$$

$$+R(4k+2l)\Big\}+M(2k+l+1)(\delta_{4i}-\delta_{5i})+M(2k+l)\delta_{5i}\Big]+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(x,\ 4k+2)\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{2k+1} C_{2k+1}^{l}(1-\lambda)^l\lambda^{2k-l+1}[L(2k+l+2)(\delta_{4i}-\delta_{5i})+L(2k+l+1)\delta_{5i}]+Q_i(x)$$

$$A_i(0,\ y(\delta_{4i}+\delta_{5i}))=4\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(y,\ 4k)\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^{l}(\lambda-1)^l\times$$

$$\times\Big[(S(4k+2l+1)(\delta_{5i}-\delta_{4i})-\delta_{4i}S(4k+2l-1))\Big\{\Psi(4k+1)-\ln\frac{|by|}{2}+\frac{(4k+2l+1)!}{(4k+2l-1)!!}\delta_{4i}+$$

$$+R(4k+2l)\Big\}+M^1(2k+l+1)(\delta_{5i}-\delta_{4i})+M^1(2k+l)\delta_{4i}\Big]+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\times$$

$$\times f(y,\ 4k+2)\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^{l}(\lambda-1)^l[L^1(2k+l+2)(\delta_{5i}-\delta_{4i})+L^1(2k+l+1)\delta_{4i}]+Q_i(y)$$

$$M^1(k)=\frac{1}{2^{2k+1}}\left\{\sum_{r=0}^{k-1}C_{2k}^{r}\frac{T_{k-r}((1+\lambda)/(1-\lambda))}{k-r}-\frac{1}{2}C_{2k}^{k}\ln\frac{1-\lambda}{4}\right\}$$

$$L^1(k)=\frac{1}{2^{2k}}\left\{\sum_{r=0}^{k-1}2C_{2k}^{r}\frac{(-1)^{k-r}\sin 2(k-r)\varphi_1}{k-r}+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}H(\lambda)\right\}$$

$$Q_i(x\delta_{1j}+y\delta_{2j})=\pi\left[\ln\frac{b\sqrt{1-\lambda}}{4}+(-1)^i\frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)}+\ln|x\delta_{1j}+y\delta_{2j}|+C-\frac{(-1)^{i+j}}{2}\right]$$

$$N_i=\varphi_1+(-1)^i\frac{\sqrt{-\lambda}}{\lambda-1}-\frac{\pi}{4},\quad u_n=\sin(n\varphi_1)$$

Здесь C – постоянная Эйлера ($C\approx 0{,}5772$).

Полученные результаты позволяют дать относительно простые асимптотические формулы для вычисления перемещения w, тангенциальных усилий t_1, t_2 и изгибающих моментов m_1, m_2 в окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки:

$$A_1(x\delta_{1j},\ y\delta_{2j})=\frac{\pi}{b^2}I+\frac{x^2\delta_{1j}+y^2\delta_{2j}}{2}\left[\ln\frac{b\sqrt{1-\lambda}}{4}+\ln|x\delta_{1j}+\right.$$

$$\left.+y\delta_{2j}|+(-1)^{j+1}\frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)}+C-1\right]$$

$$A_2(x\delta_{1j},\ y\delta_{2j})=\frac{\pi}{b^2}N_2+\frac{(x^2\delta_{1j}+y^2\delta_{2j})\pi}{16}\Big\{\Big(1+\delta_{1j}\lambda+5\delta_{2j}\lambda\Big)\times$$

$$\times\left[\ln\frac{b|x\delta_{1j}+y\delta_{2j}|}{4}+C-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(1-\lambda)\right]+\frac{5+\delta_{1j}\lambda+37\delta_{2j}\lambda}{12}+(-1)^j\frac{1-\lambda}{12}T_3\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)+$$

$$+\frac{(1-\lambda)\delta_{1j}-(1+15\lambda)\delta_{2j}}{4}T_1\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)+\frac{1-3\delta_{1j}\lambda+\delta_{2j}\lambda}{4}T_2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\Big\}$$

$$A_3(x\delta_{1j},\ y\delta_{2j})=\frac{\pi}{b^2}N_3+\frac{(x^2\delta_{1j}+y^2\delta_{2j})\pi}{16}\Big\{\Big(\lambda+5\delta_{1j}\lambda+\delta_{2j}\Big)\times$$

$$\times\left[\ln\frac{b|x\delta_{1j}+y\delta_{2j}|}{4}+C-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(1-\lambda)\right]+\frac{5\lambda+\delta_{2j}\lambda+37\delta_{1j}\lambda}{12}+(-1)^j\frac{1-\lambda}{12}T_3\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)+$$

$$+\frac{(15+\lambda)\delta_{1j}-(1-\lambda)\delta_{2j}}{4}T_1\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)+\frac{\lambda-3\delta_{1j}+\delta_{2j}}{4}T_2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\Bigg\}$$

$$A_i(x\delta_{5i},\ y\delta_{4i})=\frac{(x^2\delta_{5i}+y^2\delta_{4i})\pi}{64}b^2\{(H(\lambda)-u_4)(1+\lambda)+(1-\lambda)u_2-$$

$$-(-1)^i\frac{1-\lambda}{3}u_6\Big\}-Q_i(x\delta_{5i}+y\delta_{4i})$$

$$A_i(x\delta_{4i},\ y\delta_{5i})=\frac{(x^2\delta_{4i}+y^2\delta_{5i})\pi}{64}b^2\{(H(\lambda)(1+\lambda+4\delta_{4i}+4\delta_{5i}\lambda)+$$

$$+(1+\lambda+14\delta_{4i}+14\lambda\delta_{5i})u_2+(-1)^i\frac{1-\lambda}{3}u_6+[(3-\lambda)\delta_{4i}+(1-3\lambda)\delta_{5i}]u_4\}-$$

$$-Q_i(x\delta_{4i}+y\delta_{5i})$$

Отметим, что при $\lambda=0$ имеет место совпадение записанных здесь асимптотических результатов с уже полученными ранее в работе [6] для оболочек нулевой и положительной гауссовой кривизны.

Ниже представлены результаты вычисления интегралов Фурье для различных значений y при $x=0$ для $\lambda=-1$ (над чертой) и $\lambda=0$ (под чертой):

by	0	0,250	0,500	0,750	1,000	1,250	1,500
$A_1-\frac{\pi l}{b^2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-0,2796}{-1,4511}$	$\frac{-0,8465}{-2,3579}$	$\frac{-1,5464}{-3,0592}$	$\frac{-2,2973}{-3,6271}$	$\frac{-3,0418}{-4,0957}$	$\frac{-3,7359}{-4,4853}$
A_2	$\frac{-1,5707}{2,4674}$	$\frac{-1,4514}{2,4281}$	$\frac{-1,2293}{2,3445}$	$\frac{-0,9816}{2,2358}$	$\frac{-0,7493}{2,1121}$	$\frac{-0,5611}{1,9808}$	$\frac{-0,4391}{1,8472}$
A_3	$\frac{1,5707}{2,4674}$	$\frac{1,5694}{2,4281}$	$\frac{1,5655}{2,3445}$	$\frac{1,5590}{2,2358}$	$\frac{1,5499}{2,1121}$	$\frac{1,5382}{1,9808}$	$\frac{1,5239}{1,8472}$
A_4	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{7,3872}{-6,8873}$	$\frac{5,2341}{-4,6808}$	$\frac{4,0012}{-3,3588}$	$\frac{3,1547}{-2,3876}$	$\frac{2,5273}{-1,5998}$	$\frac{-2,0445}{-0,9210}$
A_5	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{4,1965}{-6,8873}$	$\frac{1,8962}{-4,6808}$	$\frac{0,4178}{-3,3588}$	$\frac{-0,7722}{-2,3876}$	$\frac{-1,8414}{-1,5998}$	$\frac{-2,8641}{-0,9210}$

Результаты расчетов показывают характер убывания компонент напряженного состояния с удалением от точки приложения сосредоточенной нагрузки. Характерно, что в точке приложения нормальной силы при $\lambda=-1$ тангенциальные усилия имеют разные знаки, тогда как при $\lambda=0$ знаки совпадают. Параметр кривизн, при котором тангенциальное усилие t_2 равно нулю в точке приложения нормальной сосредоточенной силы, определяется уравнением

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}+\frac{\sqrt{-\lambda}}{1-\lambda}-\frac{\pi}{4}=0$$

Это приближенно дает $\lambda\approx-0{,}1981$.

Полученные численные результаты соответствуют расчетам для компонент напряженного состояния, представленных в [4], где они получены путем численного суммирования рядов с удержанием в частичных суммах свыше ста членов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (N2J300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернышев Г.Н.* О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую тонкую оболочку произвольного очертания // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 126–134.
2. *Величко П.М., Хижняк В.К., Шевченко В.П.* Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизн // Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Тбилиси: Мецниереба, 1975. Т. 1. С. 31–41.
3. *Simmonds J.G., Bradley M.R.* The fundamental solution for a shallow shell with an arbitrary quadratic midsurface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1976. V. 43. No 2. P. 286–290.
4. *Matsui Tetsuya, Matsuoka Osamu.* The fundamental solution in the theory of shallow shells // Intern. Solids and Struct. 1978. V. 14. No. 12. P. 971–986.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М. Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
6. *Ольшанский В.П.* Об одной форме фундаментального решения уравнений пологих оболочек // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища школа, 1978. Вып. 35. С. 145–152.
7. *Величко П.М., Шевченко В.П.* О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 2. С. 147–151.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Подольск

Поступила в редакцию
29.IX.1995