**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997**

УДК 539.3

© 1997 г. В.Н. ПАЙМУШИН, И.Н. СИДОРОВ, И.М. СУЛЕЙМАНОВ

ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В [1] предложен метод построения граничных интегральных уравнений изотропной оболочки произвольной геометрии. Метод основан на разложении формулы Сомильяны по полиномам Лежандра от поперечной координаты нормальной системы координат оболочки. Однако в процессе дальнейших теоретических и численных исследований было выявлено, что в рамках двухмоментного приближения, при определенных граничных условиях на лицевых поверхностях и на контуре оболочки решение моментных интегральных уравнений может с большой погрешностью отличаться от решения аналогичной задачи в рамках трехмерной теории упругости. Решение же уравнений равновесия, полученных после разложения трехмерных уравнений равновесия по тем же полиномам Лежандра с редукцией к двухмоментному приближению, с хорошей точностью приближает решение трехмерной задачи для наиболее общих граничных условий как на контуре, так и на лицевых поверхностях оболочки.

В этой связи возникает необходимость построения граничных интегральных уравнений, решение которых точно удовлетворяет редуцированным уравнениям равновесия оболочки.

1. В данной работе рассматривается изотропная тонкая или пологая оболочка постоянной толщины $2h$ в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Оболочка имеет срединную поверхность S, удовлетворяющую необходимым требованиям гладкости, кусочно-гладкий контур этой поверхности Γ и боковую поверхность Σ, образованную движением нормали $\mathbf{m}$ к поверхности S вдоль контура Γ. В [2] для такой оболочки получена конечная система уравнений равновесия в векторной форме в криволинейной нормальной системе координат, связанной с ее срединной поверхностью. Следуя обозначениям этой работы, конечная система уравнений равновесия представляется следующим образом ($\mathbf{r}_\mathbf{x}$ – радиус-вектор точек срединной поверхности S, z – поперечная координата нормальной системы координат; далее везде греческие индексы пробегают значения 1,2, латинские индексы – $\overline{1,3}$, по повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_{\alpha,x}\left(\sqrt{a}\mathbf{P}^{(k)\alpha}(\mathbf{r}_\mathbf{x})\right)-\frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}^{(k)3}}(\mathbf{r}_\mathbf{x})+\mathbf{\Phi}^{(k)}(\mathbf{r}_\mathbf{x})=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{r}_\mathbf{x}\in S\left(k=\overline{0,N}\right)$$

В уравнениях (1.1) приняты следующие обозначения ($P_k(\omega)$ – полином Лежандра k-го порядка):

$$\mathbf{P}^{(k)i}=\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h}P_k(z/h)\mathbf{P}^i dz \quad \left(i=\overline{1,3}\right)$$

$$\underline{\mathbf{P}^{(k)3}} = (2k+1)\left(\mathbf{P}^{(k-1)3} + \mathbf{P}^{(k-3)3} + \ldots\right), \quad k = \overline{1,N}, \quad \underline{\mathbf{P}^{(0)3}} = 0$$

$$\mathbf{\Phi}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} + \left[\mathbf{p}_n^{(+)} + (-1)^k \mathbf{p}_n^{(-)}\right]\frac{(2k+1)}{2h}$$

($\mathbf{P}^i$ – векторные составляющие тензора напряжений, $\mathbf{F}$ – вектор объемных сил, $\mathbf{p}_n^{(\pm)}$ – заданный вектор напряжений на верхней (нижней) лицевой поверхности оболочки); $\partial_{\alpha,x} \equiv \partial/\partial x^\alpha$ (x^1, x^2 – криволинейные координаты), a – определитель метрического тензора срединной поверхности.

В рамках (N + 1) моментного приближения вектор перемещений для элементов оболочки определяется формулой [2]:

$$\mathbf{u}_N = \sum_{k=0}^{N} P_k(z/h)\mathbf{w}^{(k)}$$

Тогда векторы $\mathbf{P}^{(k)i}$ согласно обобщенному закону Гука представятся как

$$\mathbf{P}^{(k)i} = \lambda\left(\mathbf{r}^m, D_{m,x}^{(N)}\mathbf{w}^{(k)}\right)\mathbf{r}^i + \mu\left(\mathbf{r}^i, D_{m,x}^{(N)}\mathbf{w}^{(k)}\right)\mathbf{r}^m + \mu a^{im}\left(D_{m,x}^{(N)}\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{r}^j\right)\mathbf{r}_j \tag{1.2}$$

$$D_{m,x}^{(N)}\mathbf{w}^{(k)} = \begin{cases} \partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(k)}, & m = \alpha \\ (2k+1)/h\left(\mathbf{w}^{(k+1)} + \mathbf{w}^{(k+3)} + \ldots\right), & m = 3 \end{cases}$$

$$\left(k = \overline{0,N};\ \mathbf{w}^{(k)} = 0 \text{ при } k > N\right)$$

где $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}^i$ – векторы основного и взаимного базиса срединной поверхности оболочки; λ, μ – параметры Ламе; a^{im} – контравариантные компоненты метрического тензора.

Для построения интегральной формы решения системы (1.1) воспользуемся уравнением, которому удовлетворяют моменты тензора перемещений Кельвина [3] $U_i^k(\mathbf{R}, \mathbf{\Lambda})$ ($\mathbf{R} = \mathbf{r}_\mathbf{x} + z\mathbf{m}(\mathbf{r}_\mathbf{x})$):

$$\partial_{\alpha,x}\left(\sqrt{a}\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}(\mathbf{r}_\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})\right) - \sqrt{a}\,\underline{\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3}}(\mathbf{r}_\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})/h + \tag{1.3}$$

$$+\frac{(2k+1)}{2h}\sqrt{a}\left[\mathbf{e}_i P_k(\xi/h)\delta\left(\mathbf{r}_\mathbf{x} - \mathbf{r}_\eta\right) + \left(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3} - (-1)^k\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}\right)\right] = 0$$

$$\left(k = \overline{0,N}\right), \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{r}_\eta + \xi\mathbf{m}\left(\mathbf{r}_\eta\right), \quad \mathbf{r}_\eta \in S, \quad |\xi| < h$$

где $\delta(\mathbf{r}_\mathbf{x} - \mathbf{r}_\eta)$ – дельта-функция Дирака; $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор декартовой системы координат, определяющий направление действия сосредоточенной силы в бесконечной упругой среде и приложенный в точке с радиус-вектором $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{T}_{(i)}^{(\pm)3} = \mathbf{T}_{(i)}^3\left(\mathbf{r}_\mathbf{x} \pm h\mathbf{m}(\mathbf{r}_\mathbf{x}), \mathbf{\Lambda}\right)$:

$$\mathbf{T}_{(i)}^{(k)j} = \lambda\left(\mathbf{r}^m, D_{m,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right)\mathbf{r}^j + \mu\left(\mathbf{r}^j, D_{n,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right)\mathbf{r}^n +$$

$$+\mu a^{jm}\left(D_{m,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}, \mathbf{r}^p\right)\mathbf{r}_p, \quad \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} = U_{(i)}^{(k)p}\mathbf{e}_p \quad \left(j = \overline{1,3}\right) \tag{1.4}$$

$$D_{m,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)} = \begin{cases} \partial_{\alpha,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}, & m = \alpha \\ (2k+1)/h\left(\mathbf{U}_{(i)}^{(k+1)} + \mathbf{U}_{(i)}^{(k+3)} + \ldots\right), & m = 3 \end{cases}$$

Система уравнений (1.3) получена с учетом предположения, что для тонких или пологих оболочек с погрешностью zb_i^j по сравнению с δ_i^j (b_i^j – смешанные компоненты второго метрического тензора срединной поверхности оболочки,

$\delta_i^j = \left(\mathbf{r}^j, \mathbf{r}_i\right)$) векторы основного и взаимного базиса, а также определитель метрического тензора элементов оболочки, можно заменить на соответствующие величины срединной поверхности. Заключением индекса i в круглые скобки подчеркивается, что вектор Кельвина $\mathbf{U}_{(i)}$ соответствует единичной силе $\mathbf{e}_i$ в декартовой системе координат, а уравнение для этого вектора записывается в криволинейной системе координат. Интеграл

$$I = \int\limits_{-h}^{h} dz \iint\limits_S \left(\sum_{k=0}^{N} \partial_{\alpha,x}\left(\sqrt{a}\mathbf{P}^{(k)\alpha}\right) P_k\left(\frac{z}{h}\right),\ \mathbf{U}_{(i)} \right) dx^1 dx^2 =$$
$$= \iint\limits_S \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\partial_{\alpha,x}\left(\sqrt{a}\mathbf{P}^{(k)\alpha}\right),\ \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) dx^1 dx^2$$

который в соответствии с (1.1) равен

$$I = \iint\limits_S \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\frac{1}{h} \underline{\mathbf{P}^{(k)3}} - \mathbf{\Phi}^{(k)}, \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \tag{1.5}$$

преобразуем к виду

$$I = \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\mathbf{P}^{(k)\alpha}, \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) n_\alpha^\Sigma dL -$$
$$- \iint\limits_S \sqrt{a} \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\mathbf{P}^{(k)\alpha}, \partial_{\alpha,x} \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) dx^1 dx^2 \tag{1.6}$$

где dL – элемент дуги контура Γ срединной поверхности, n_α^Σ – компоненты единичной нормали к боковой поверхности оболочки Σ.

Скалярное произведение во втором интеграле правой части (1.6) с учетом (1.2) и (1.4) представим следующим образом

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\mathbf{P}^{(k)\alpha}, \partial_{\alpha,x} \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}, \partial_{\alpha,x} \mathbf{w}^{(k)} \right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left[\left(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3}, D_{3,x}^{(N)} \mathbf{w}^{(k)} \right) - \left(\mathbf{P}^{(k)3}, D_{3,x} \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) \right] \tag{1.7}$$

Используя (1.7), соотношение

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \sqrt{a} \left(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}, \partial_{\alpha,x} \mathbf{w}^{(k)} \right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \partial_{\alpha,x} \left(\sqrt{a} \mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}, \mathbf{w}^{(k)} \right) -$$
$$- \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left(\partial_{\alpha,x} \left(\sqrt{a} \mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha} \right), \mathbf{w}^{(k)} \right)$$

а также (1.3), правую часть в (1.6) преобразуем к виду

$$I = \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1} \left\{ \int\limits_{\Gamma} \left[\left(\mathbf{P}^{(k)\alpha}, \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) - \left(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}, \mathbf{w}^{(k)} \right) \right] n_\alpha^\Sigma dL - \right.$$
$$- \iint\limits_S \sqrt{a} \left[\left(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3}, D_{3,x}^{(N)} \mathbf{w}^{(k)} \right) - \left(\mathbf{P}^{(k)3}, D_{3,x} \mathbf{U}_{(i)}^{(k)} \right) + \right. \tag{1.8}$$
$$+ \frac{2k+1}{2h} P_k(\xi / h) \left(\mathbf{e}_i \delta\left(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta\right), \mathbf{w}^{(k)} \right) - \frac{1}{h} \left(\underline{\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3}}, \mathbf{w}^{(k)} \right) +$$
$$\left. \left. + \frac{2k+1}{2h} \left(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3} - (-1)^k \mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}, \mathbf{w}^{(k)} \right) \right] dx^1 dx^2 \right\}$$

После некоторых преобразований правой части (1.8) с учетом (1.5) получим интегральное представление вектора перемещений $\mathbf{u}_N$, моменты которого $\mathbf{w}^{(k)}$ удовлетворяют системе (1.1):

$$\beta_{ip}(\mathbf{r}_\eta)\left(\mathbf{e}_p, \sum_{k=0}^{N} P_k(\xi/h)\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta)\right) = A_N\left[\mathbf{u}_N(\mathbf{r}_x), \mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta + \xi\mathbf{m}_\eta)\right] \tag{1.9}$$

$$A_N\left[\mathbf{u}_N(\mathbf{r}_x), \mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta + \xi\mathbf{m}_\eta)\right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}\left\{\iint_S \left[\left(\mathbf{\Phi}^{(k)}, \mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right) - \right.\right.$$

$$-\frac{2k+1}{2h}\left(\left(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3} - (-1)^k \mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}, \mathbf{w}^{(k)}\right) - \left(\mathbf{P}^{(k)3}, \mathbf{U}_{(i)}^{(+)} - (-1)^k \mathbf{U}_{(i)}^{(-)} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \sum_{j=0}^{N} \mathbf{U}_{(i)}^{(j)}\left[1 - (-1)^{k+j}\right]\right)\right)\right] dS + \int_\Gamma \left[\left(\mathbf{P}_n^{(k)\Sigma}, \mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right) - \left(\mathbf{P}_{(i)}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}\right)\right] dL\right\}$$

$$\beta_{ip}(\mathbf{r}_\eta) = \begin{cases} \delta_{ip}, & \mathbf{r}_\eta \in S \\ 0, & \mathbf{r}_\eta \notin S, \quad |\xi| < h \\ \tfrac{1}{2}\delta_{ip}, & \mathbf{r}_\eta \in \Gamma \end{cases}$$

где $\mathbf{P}_n^{(k)\Sigma} = \mathbf{P}^{(k)\alpha} n_\alpha^\Sigma$; $\mathbf{P}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha} n_\alpha^\Sigma = P_{(i)}^{(k)p}\mathbf{e}_p$ ($P_{(i)}^p$ – тензор напряжений Кельвина [3]); $\mathbf{U}_{(i)}^{(\pm)} = \mathbf{U}_{(i)}\left(\mathbf{r}_x \pm h\mathbf{m}(\mathbf{r}_x), \mathbf{\Lambda}\right)$; δ_{ip} – символ Кронеккера; $\mathbf{m}_\eta = \mathbf{m}(\mathbf{r}_\eta)$.

При выводе (1.9) были использованы соотношения

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}\left[\left(\mathbf{P}^{(k)3}, D_{3,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right) - \frac{1}{h}\left(\underline{\mathbf{P}^{(k)3}}, \mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\left(\mathbf{P}^{(k)3}, \mathbf{U}_{(i)}^{(+)} - (-1)^k \mathbf{U}_{(i)}^{(-)}\right) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\mathbf{P}^{(k)3}, \mathbf{U}_{(i)}^{(j)}\right)\left[1 - (-1)^{k+j}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}\left(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3}, D_{3,x}^{(N)}\mathbf{w}^{(k)}\right) = \int_{-h}^{h}\left(\mathbf{T}_{(i)}^3, \sum_{k=0}^{N} P_k D_{3,x}^{(N)}\mathbf{w}^{(k)}\right) dz =$$

$$= \int_{-h}^{h}\left(\mathbf{T}_{(i)}^3, \partial_{3,x}\left(\sum_{k=0}^{N} P_k \mathbf{w}^{(k)}\right)\right) dz = \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}\,\frac{1}{h}\left(\underline{\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3}}, \mathbf{w}^{(k)}\right)$$

Интегральное представление (1.9) решения системы (1.1) как во внутренних точках срединной поверхности оболочки, так и на ее контуре позволяет определять неизвестные моменты $\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{P}_n^{(k)\Sigma}$ в соответствующих точках оболочки. Эта система является основой при построении граничных интегральных уравнений для вычисления параметров напряженно-деформированного состояния элементов оболочки.

Покажем, что вектор перемещений $\mathbf{u}_N$, удовлетворяющий системе соотношений (1.9), является решением системы (1.1). Для этого подействуем на вектор $\mathbf{u}_N$, построенный с помощью соотношений (1.9), оператором ($\mathbf{r}_\eta \in S$):

$$L_\eta^{(N)}\mathbf{u}_N = \sum_{k=0}^{N} P_k(\xi/h) L_\eta^{(k)}\mathbf{u}_N$$

$$L_\eta^{(k)}\mathbf{u}_N = \frac{1}{\sqrt{a}}\partial_{\alpha,\eta}\left\{\sqrt{a}\left[\lambda\left(\mathbf{r}^m, D_{m,\eta}\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta)\right)\mathbf{r}^\alpha + \right.\right. \tag{1.10}$$

$$\left.\left. +\mu\left(\mathbf{r}^\alpha, D_{n,\eta}\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta)\right)\mathbf{r}^n + \mu\alpha^{\alpha m}\left(D_{m,\eta}, \mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta)\mathbf{r}^j\right)\mathbf{r}_j\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}_N^{(k)3}}\left(\mathbf{r}_\eta\right)+\frac{2k+1}{2h}\left[\mathbf{P}_N^{(+)3}\left(\mathbf{r}_\eta\right)-(-1)^k\mathbf{P}_N^{(-)3}\left(\mathbf{r}_\eta\right)\right]$$

$$\mathbf{P}_N^j=\sum_{k=0}^{N}P_k\mathbf{P}_N^{(k)j},\quad j=\left(\overline{1,3}\right)$$

Принимая во внимание, что имеют место соотношения

$$\underline{\mathbf{P}_N^{(k)j}}\left(\mathbf{u}_N\right)=\underline{\mathbf{P}^{(k)j}}\left(\mathbf{u}_N\right);\quad \mathbf{P}_N^{(+)3}-(-1)^k\mathbf{P}_N^{(-)3}=\sum_{j=0}^{N}\left[1-(-1)^{k+j}\right]\mathbf{P}^{(j)3}$$

$$L_\eta^{(k)}\mathbf{U}_{(i)}^{(m)}\left(\mathbf{r}_\mathbf{x},\Lambda\right)=-\frac{2m+1}{2h}\delta_k^m\mathbf{e}_i\delta\left(\mathbf{r}_\mathbf{x}-\mathbf{r}_\eta\right),\quad m=\overline{0,N} \tag{1.11}$$

$$L_\eta^{(k)}\mathbf{U}_{(i)}^{(m)}\left(\mathbf{r}_{\mathbf{x},\Gamma},\Lambda\right)=L_\eta^{(k)}\mathbf{P}_{(i)}^{(m)}\left(\mathbf{r}_{\mathbf{x},\Gamma},\Lambda\right)=0,\quad \mathbf{r}_{\mathbf{x},\Gamma}\in\Gamma$$

$$L_\eta^{(k)}\left[\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}-(-1)^k\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}\right]=L_\eta^{(k)}\left[\mathbf{U}_{(i)}^{(+)}-(-1)^k\mathbf{U}_{(i)}^{(-)}\right]=0$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[1-(-1)^{k+j}\right]\left(\mathbf{P}^{(j)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[1-(-1)^{k+j}\right]\left(\mathbf{P}^{(k)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(j)}\right)$$

после действия оператора $L_\eta^{(N)}$ на интегральное представление вектора $\mathbf{u}_N$, из (1.10) и (1.11) имеем

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_{\alpha,\eta}\left(\sqrt{a}\mathbf{P}^{(k)\alpha}\left(\mathbf{r}_\eta\right)\right)-\frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}^{(k)3}}\left(\mathbf{r}_\eta\right)+\mathbf{\Phi}^{(k)}\left(\mathbf{r}_\eta\right)\right]P_k(\xi/h)=0$$

Из последнего равенства в силу независимости полиномов Лежандра следует (1.1). Таким образом, доказана

Теорема. Для того, чтобы вектор $\mathbf{u}_N$ являлся решением системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы этот вектор удовлетворял системе соотношений (1.9).

2. Интегральное представление (1.9) получено для вектора $\mathbf{u}_N$, представляющего собой конечную часть ряда разложения вектора $\mathbf{u}$ по полиномам Лежандра. Поэтому необходимо дополнительное выделение из (1.9) интегральных уравнений отдельно для моментов $\mathbf{w}^{(k)}$. В настоящей работе предлагается разложение (1.9) по полиномам Лежандра $P_k(\xi/h)\left(k=\overline{0,N}\right)$. При этом (1.9) распадается на $(N+1)$ интегральное уравнение для $\mathbf{w}^{(k)}$ вида

$$\beta_{ip}\left(\mathbf{r}_\eta\right)w_p^{(k)}\left(\mathbf{r}_\eta\right)=\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}P_k(\xi/h)A_N\left[\mathbf{u}_N\left(\mathbf{r}_\mathbf{x}\right),\mathbf{U}_{(i)}\left(\mathbf{r}_\mathbf{x},\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta\right)\right]d\xi=$$

$$=A_N\left[\mathbf{u}_N\left(\mathbf{r}_\mathbf{x}\right),\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}P_k(\xi/h)\mathbf{U}_{(i)}\left(\mathbf{r}_\mathbf{x},\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta\right)d\xi\right],$$

$$\mathbf{r}_\eta\in S\cup\Gamma,\quad k=\overline{0,N}$$

В частном случае двухмоментного приближения ($N=1$) интегральное представление (1.9) принимает вид

$$\beta_{ip}\left(\mathbf{r}_\eta\right)\left(\mathbf{e}_p,\mathbf{w}^{(0)}\left(\mathbf{r}_\eta\right)+P_1(\xi/h)\mathbf{w}^{(1)}\left(\mathbf{r}_\eta\right)\right)=$$

$$=A_1\left[\mathbf{u}_1\left(\mathbf{r}_\mathbf{x}\right),\mathbf{U}_{(i)}\left(\mathbf{r}_\mathbf{x},\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta\right)\right],\quad \mathbf{r}_\eta\in S\cup\Gamma,\ |\xi|<h \tag{2.1}$$

$$A_1\left[\mathbf{u}_1\left(\mathbf{r}_\mathbf{x}\right),\mathbf{U}_{(i)}\left(\mathbf{r}_\mathbf{x},\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta\right)\right]=\iint_S\left\{2h\left(\mathbf{\Phi}^{(0)},\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}\right)+2h/3\left(\mathbf{\Phi}^{(1)},\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}\right)+\right.$$

$$+\left(\mathbf{P}^{(0)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(+)}-\mathbf{U}_{(i)}^{(-)}-2\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}\right)+\left(\mathbf{P}^{(1)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(+)}+\mathbf{U}_{(i)}^{(-)}-2\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}\right)-$$

$$-\left[\left(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}-\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3},\mathbf{w}^{(0)}\right)+\left(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}+\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3},\mathbf{w}^{(1)}\right)\right]\Big\}dS+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\frac{2h}{2k+1}\left(\int_{\Gamma}\left[\left(\mathbf{P}_n^{(k)\Sigma},\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}\right)-\left(\mathbf{P}_{(i)}^{(k)},\mathbf{w}^{(k)}\right)\right]dL\right)$$

В соответствии с принятым способом выделения уравнений для моментов имеем

$$\beta_{ip}(\mathbf{r}_\eta)w_p^{(0)}(\mathbf{r}_\eta)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}A_1\left[\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_x),\mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta)\right]d\xi=$$

$$=A_1\left[\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_x),\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta)d\xi\right] \tag{2.2}$$

$$\beta_{ip}(\mathbf{r}_\eta)w_p^{(1)}(\mathbf{r}_\eta)=\frac{3}{2h}\int_{-h}^{h}A_1\left[\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_x),\mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta)\right](\xi/h)d\xi=$$

$$=A_1\left[\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_x),\ \frac{3}{2h}\int_{-h}^{h}\mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_\eta+\xi\mathbf{m}_\eta)(\xi/h)d\xi\right],\quad \mathbf{r}_\eta\in S\cup\Gamma$$

3. Для построения алгебраической системы уравнений МГЭ на основе (2.2) срединная поверхность S разбивается на M_s изопараметрических треугольных (десятиузловых) и (или) четырехугольных (двенадцатиузловых) граничных элемента (ГЭ) [3] с кубической интерполяцией геометрических и механических переменных оболочки внутри каждого ГЭ. При этом контур Г разобьется на M_q контурных (четырехузловых) ГЭ. Интерполяция моментов векторов перемещений и напряжений внутри q-го ГЭ контура выполняется с помощью формул

$$\mathbf{w}_q^{(k)}=\sum_{m=1}^{4}N_m\mathbf{w}_q^{(k)m},\quad \mathbf{P}_{nq}^{(k)\Sigma}=\sum_{m=1}^{4}N_m\mathbf{P}_{nq}^{(k)\Sigma m} \tag{3.1}$$

а моментов векторов перемещений внутри s-го ГЭ срединной поверхности S-формул (N_m – функции формы, N_s – число узлов s-го ГЭ):

$$\mathbf{w}_s^{(k)}=\sum_{m=1}^{N_s}N_m\mathbf{w}_s^{(k)m} \tag{3.2}$$

С помощью формул (3.2) выражение (1.2) при $i=3$ аппроксимируется следующим образом

$$\mathbf{P}_s^{(0)3}=\sum_{k=1}^{N_s}\left\{\frac{\mu}{h}N_k\mathbf{w}_s^{(1)k}+\mathbf{m}\left(\mathbf{m},N_k\mathbf{w}_s^{(1)k}\right)\frac{\lambda+\mu}{h}+\right.$$

$$\left.+\mu\mathbf{r}^\beta\left(\mathbf{m},N_{k,\beta}\mathbf{w}_s^{(0)k}\right)+\lambda\mathbf{m}\left(\mathbf{r}^\alpha,N_{k,\alpha}\mathbf{w}_s^{(0)k}\right)\right\} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{P}_s^{(1)3}=\sum_{k=1}^{N_s}\left\{\mu\mathbf{r}^\beta\left(\mathbf{m},N_{k,\beta}\mathbf{w}_s^{(1)k}\right)+\lambda\mathbf{m}\left(\mathbf{r}^\alpha,N_{k,\alpha}\mathbf{w}_s^{(1)k}\right)\right\}$$

Аппроксимационная форма системы (2.2) с учетом (3.1) и (3.2) представится для j-го узла ГЭ следующим образом (далее будем обозначать квадратными скобками [ ] матрицы, а фигурными { } – вектор-столбец)

$$\left[\beta_{ip}\right]\left\{w_p^{(0)j}\right\}=\sum_{s=1}^{M_s}\left(\left\{F0_{(i)s}^{j}\right\}+\left[U01_{(i)s}^{j}\right]\left\{P_s^{(0)3}\right\}+\left[U00_{(i)s}^{j}\right]\left\{P_s^{(1)3}\right\}-\right.$$

$$-\sum_{m=1}^{N_s}\left(\left[P00_{(i)s}^{jm}\right]\left\{w_s^{(0)m}\right\}+\left[P01_{(i)s}^{jm}\right]\left\{w_s^{(1)m}\right\}\right)\Bigg)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M_q}\sum_{q=1}^{4}\left(\left[U0_{(i)m}^{jq}\right]\left\{P_{nm}^{(0)\Sigma q}\right\}+\left[U0Z_{(i)m}^{jq}\right]\left\{P_{nm}^{(1)\Sigma q}\right\}-\right.$$

$$\left.-\left[P0_{(i)m}^{jq}\right]\left\{w_m^{(0)q}\right\}-\left[P0Z_{(i)m}^{jq}\right]\left\{w_m^{(1)q}\right\}\right) \qquad (3.4)$$

$$\left[\beta_{ip}\right]\left\{w_p^{(1)j}\right\}=\sum_{s=1}^{M_s}\left(\left\{F1_{(i)s}^{j}\right\}+\left[U11_{(i)s}^{j}\right]\left\{P_s^{(0)3}\right\}+\left[U10_{(i)s}^{j}\right]\left\{P_s^{(1)3}\right\}-\right.$$

$$-\sum_{m=1}^{N_s}\left(\left[P10_{(i)s}^{jm}\right]\left\{w_s^{(0)m}\right\}+\left[P11_{(i)s}^{jm}\right]\left\{w_s^{(1)m}\right\}\right)\Bigg)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M_q}\sum_{q=1}^{4}\left(\left[U1_{(i)m}^{jq}\right]\left\{P_{nm}^{(0)\Sigma q}\right\}+\left[U1Z_{(i)m}^{jq}\right]\left\{P_{nm}^{(1)\Sigma q}\right\}-\right.$$

$$\left.-\left[P1_{(i)m}^{jq}\right]\left\{w_m^{(0)q}\right\}-\left[P1Z_{(i)m}^{jq}\right]\left\{w_m^{(1)q}\right\}\right)$$

$$\left\{Fk_{(i)s}^{j}\right\}=\iint_{\Delta S_s}\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\left\{2h\left(\mathbf{\Phi}^{(0)},\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}\right)+\frac{2h}{3}\left(\mathbf{\Phi}^{(1)},\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}\right)\right\}P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)d\xi dS$$

$$\left[Uk1_{(i)s}^{j}\right]=\iint_{\Delta S_s}\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(U_{(i)p}^{(+)j}-U_{(i)p}^{(-)j}-2U_{(i)p}^{(1)j}\right)P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)d\xi dS$$

$$\left[Uk0_{(i)s}^{j}\right]=\iint_{\Delta S_s}\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(U_{(i)p}^{(+)j}+U_{(i)p}^{(-)j}-2U_{(i)p}^{(0)j}\right)P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)d\xi dS$$

$$\left[Pk1_{(i)s}^{jm}\right]=\iint_{\Delta S_s}\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(T_{(i)p}^{(+)3j}+T_{(i)p}^{(-)3j}\right)P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)d\xi N_m dS$$

$$\left[Pk0_{(i)s}^{jm}\right]=\iint_{\Delta S_s}\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(T_{(i)p}^{(+)3j}-T_{(i)p}^{(-)3j}\right)P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)d\xi N_m dS$$

$$\left[Uk_{(i)m}^{jq}\right]=\int_{L_m}\int_{-h}^{h}U_{(i)p}^{(k)j}dzN_q dL,\quad \left[UkZ_{(i)m}^{jq}\right]=\int_{L_m}\int_{-h}^{h}U_{(i)p}^{(k)j}zdzN_q dL$$

$$\left[Pk_{(i)m}^{jq}\right]=\int_{L_m}\int_{-h}^{h}P_{(i)p}^{(k)j}dzN_q dL,$$

$$\left[PkZ_{(i)m}^{jq}\right]=\int_{L_m}\int_{-h}^{h}P_{(i)p}^{(k)j}zdzN_q dL,\quad p=\overline{1,3},\quad k=0,1$$

где dS – элемент площади срединной поверхности оболочки, ΔS_s – элемент поверхности s-го ГЭ на S, L_m – элемент дуги Γ m-го ГЭ на Σ.

Вычисление приведенных интегралов осуществляется с помощью квадратурных формул Гаусса для функций от двух переменных. Для сингулярных интегралов применяются специальные численно-аналитические формулы.

Сгруппируем в (3.4) матрицы при векторах $\mathbf{w}_s^{(k)}$ по ГЭ срединной поверхности и контура, соответствующих j-му узлу в единую матрицу. Аналогичную операцию проделаем для матриц при векторах $\mathbf{P}_{nm}^{(k)\Sigma}$ по ГЭ контура. Учитывая, что матрицы $\left[Uk0_{(i)s}^{j}\right]$ и $\left[Uk1_{(i)s}^{j}\right]$ соответственно при $\mathbf{w}_s^{(0)}$ и $\mathbf{w}_s^{(1)}$ на основании (3.3) преобразуются в матрицы $\left[Uk0_{(i)s}^{*j}\right]$ и $\left[Uk1_{(i)s}^{*j}\right]$, система уравнений (3.4) примет вид

$$\left[AUP^{js_1}\right]\left\{X_{s_1}\right\}+\left[AUP^{js_2}\right]\left\{X_{s_2}\right\}=\left\{H^j\right\} \tag{3.5}$$

$$\left[AUP^{js_2}\right]=\left[P^{js_2}\right],\quad \left\{H^j\right\}=\sum_{s=1}^{M_s}\left(\left\{F0_s^j\right\}\left\{F1_s^j\right\}\right)$$

$$\left[AUP^{js_1}\right]=\left[\left[P^{js_1}\right]\left[U_{n_1}^{js_1}\right]\left[U_{n_2}^{js_1}\right]\right]$$

$$\left\{X_{s_1}\right\}=\left\{\left\{w^{(0)s_1}\right\}\left\{w^{(0)s_1}\right\}\left\{P_{n_1}^{(0)s_1}\right\}\left\{P_{n_1}^{(1)s_1}\right\}\left\{P_{n_2}^{(0)s_1}\right\}\left\{P_{n_2}^{(1)s_1}\right\}\right\},$$

$$\left\{X_{s_2}\right\}=\left\{\left\{w^{(0)s_2}\right\}\left\{w^{(1)s_2}\right\}\right\}$$

$$\left[P^{js_\alpha}\right]=\sum_{n=1}^{M_s}\left(\begin{bmatrix}\left[P00_{(i)n}^{js_\alpha}\right]\left[P01_{(i)n}^{js_\alpha}\right]\\ \left[P10_{(i)n}^{js_\alpha}\right]\left[P11_{(i)n}^{js_\alpha}\right]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left[U01_{(i)n}^{*js_\alpha}\right]\left[U00_{(i)n}^{*js_\alpha}\right]\\ \left[U11_{(i)n}^{*js_\alpha}\right]\left[U10_{(i)n}^{*js_\alpha}\right]\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\delta_{\alpha,1}\sum_{m=1}^{M_q}\begin{bmatrix}\left[P0_{(i)m}^{js_\alpha}\right]\left[P0Z_{(i)m}^{js_\alpha}\right]\\ \left[P1_{(i)m}^{js_\alpha}\right]\left[P1Z_{(i)m}^{js_\alpha}\right]\end{bmatrix},$$

$$\left[U_{n_\alpha}^{js_1}\right]=\sum_{m=1}^{M_q}\begin{bmatrix}\left[U0_{(i)mn_\alpha}^{js_1}\right]\left[U0Z_{(i)mn_\alpha}^{js_1}\right]\\ \left[U1_{(i)mn_\alpha}^{js_1}\right]\left[U1Z_{(i)mn_\alpha}^{js_1}\right]\end{bmatrix}$$

Следует отметить, что в узлах, соответствующих гладкому участку контура (компоненты n_α^Σ нормали к Σ не претерпевают разрыв), в матрице $\left[AUP^{js_1}\right]$ и векторе $\left\{X_{s_1}\right\}$ системы (3.5) блоки с индексом n_2 отсутствуют.

В системе (3.5) индексы принимают следующие значения:

узел ГЭ $j=\overline{1,M}$ (M – число узлов на поверхности S, включая узлы контура Г);

узел на контуре Г $s_1=\overline{1,N_q}$ (N_q – число узлов на Г);

последовательные номера узлов на S/Г $s_2=\overline{N_{q+1},M}$.

Система (3.5) представляет собой систему $6M$ алгебраических уравнений. С учетом граничных условий решение этой системы позволяет определить полный вектор перемещений на поверхности S и вектор напряжений на контуре Г.

С помощью предложенного алгоритма проведены расчеты по определению неизвестных моментов для следующих задач, имеющих аналитическое решение. Во всех задачах модуль Юнга и коэффициент Пуассона полагались равными $E = 1$, $\nu = 0{,}3$, а также были приняты обозначения, в которых $f_{\max}^{(k)a}$ – максимальное аналитическое значение k-го момента функции, $f_{\max}^{(k)}$ – соответствующее численное значение:

$$\varepsilon^{(0)}=\left|\left(w_{\max}^{(0)a}-w_{\max}^{(0)}\right)\right|/\left|w_{\max}^{(0)a}\right|,\quad \varepsilon^{(1)}=\left|\left(w_{\max}^{(1)a}-w_{\max}^{(1)}\right)\right|/\left|w_{\max}^{(1)a}\right|$$

$$\varepsilon_\sigma^{(1)}=\left|\left(\sigma_{\max}^{(1)a}-\sigma_{\max}^{(1)}\right)\right|/\left|\sigma_{\max}^{(1)a}\right|$$

Таблица 1

$2h/L$	$w_{\max}^{(0)a}$	$w_{\max}^{(0)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$w_{\max}^{(1)a}$	$w_{\max}^{(1)}$	$\varepsilon^{(1)}$	$\sigma_{\max}^{(1)a}$	$\sigma_{\max}^{(1)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$
1/6	–5,400d–2	–5,401d–2	0,0002	1,350d–2	1,350d–2	0,0	–3,462d–3	–3,460d–3	0,0003
1/60	–5,400d–2	–5,383d–2	0,003	1,350d–3	1,349d–3	0,0007	–3,462d–4	–3,461d–4	0,0002
1/600	–5,400d–2	–6,012d–2	0,11	1,350d–4	1,348d–4	0,001	–3,462d–5	–3,451d–5	0,003

Таблица 2

$2h/L$	$w_{\max}^{(0)a}$	$w_{\max}^{(0)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$w_{\max}^{(1)a}$	$w_{\max}^{(1)}$	$\varepsilon^{(1)}$	$\sigma_{\max}^{(1)a}$	$\sigma_{\max}^{(1)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$
0,1	8,999d2	8,999d2	0,0	–6,685d1	–6,685d1	0,0	6,00d1	5,998d1	0,0003
0,01	8,915d4	8,705d4	0,024	–6,685d2	–6,529d2	0,023	6,00d2	5,850d2	0,025
0,005	3,566d5	3,238d5	0,092	–1,337d3	–1,214d3	0,092	1,20d3	1,088d3	0,093

Таблица 3

число	$h_* = 1/20$		$h_* = 1/40$		$h_* = 1/80$		$h_* = 1/240$		$h_* = 1/400$	
ГЭ	$\varepsilon^{(0)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$\varepsilon_{\sigma}^{(1)}$
4	0,052	0,061	0,144	0,120	0,195	0,146	0,248	0,341	0,310	0,358
8	0,005	0,016	0,020	0,050	0,108	0,094	0,185	0,121	0,178	0,132
12	0,005	0,005	0,005	0,024	0,067	0,060	0,122	0,093	0,136	0,104

Задача 1. Заданному полю перемещений, удовлетворяющему уравнениям равновесия системы (1.1) при $N = 1$:

$$w_z^{(0)} = a_z^{(0)}\left(x^3 - 3xy^2\right) + d_z^{(0)}\left(y^3 - 3yx^2\right), \quad w_x^{(0)} = 0$$

$$w_x^{(1)} = 3a_z^{(0)}h\left(y^2 - x^2\right) + 6d_z^{(0)}h(yx), \quad w_y^{(0)} = 0$$

$$w_y^{(1)} = 3d_z^{(0)}h\left(x^2 - y^2\right) + 6a_z^{(0)}h(yx), \quad w_z^{(1)} = 0$$

соответствует поле напряжений

$$\sigma_{yy}^{(1)} = 12\mu h\left(a_z^{(0)}x - d_z^{(0)}y\right); \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 12\mu h\left(a_z^{(0)}y + d_z^{(0)}x\right)$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = -\sigma_{yy}^{(1)}; \quad \sigma_{xx}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{xy}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{xz}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(1)} = 0$$

На боковой поверхности квадратной в плане пластины со стороной $L = 3$ и толщиной $2h$ заданы ГУ: 1) сторона квадрата $x = 0$ защемлена; 2) на трех других сторонах – статические условия, получаемые с помощью формул для напряжений путем подстановки в них соответствующих координат x и y.

Для аппроксимации неизвестных на поверхности S использовался один четырехугольный ГЭ. Результаты решения для различных толщин представлены в табл. 1 $\left(a_z^{(0)} = 0,\ d_z^{(0)} = 1, d-3\right)$.

Задача 2. Бесконечно протяженная вдоль оси x защемленная по одному краю ($y = 0$) пластина толщиной $2h$ нагружена на свободном торце ($y = L$) равномерно распределенным вдоль оси z поперечным усилием $N_z = 1$.

Аналитическое решение (1.1) для $w_z^{(0)}, w_z^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$ имеет вид [2]:

$$w_z^{(0)} = N_z\left\{y^2\frac{L - y/3}{2D'} + \frac{y}{2\mu h}\right\}, \quad w_z^{(1)} = -3N_z y\frac{L - y/2}{2h^2(\lambda + 2\mu)}$$

$$\sigma_y^{(1)} = -3N_z(y - L)/\left(2h^2\right), \quad D' = \tfrac{2}{3}h^3(\lambda + 2\mu)$$

Для аппроксимации неизвестных на поверхности S использовался один четырехугольный ГЭ. Результаты решения для различных толщин при $L = 3$ представлены в табл. 2.

Задача 3. Бесконечно протяженная в направлении оси x защемленная по краям пластина толщиной $2h$ и шириной $2L$ нагружена нормальным к S равномерно распределенным поперечным усилием $q = 1$ на верхней лицевой поверхности S^+.

Аналитические выражения для $w_z^{(0)}, w_y^{(1)}$ и $\sigma_{yy}^{(1)}$ имеют вид

$$w_z^{(0)} = qy^2(y - 2L)^2/(24D') - qy(y - 2L)/(2\mu 2h)$$

$$w_y^{(1)} = -qyh(y - L)(y - 2L)/(6D')$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = -(\lambda + 2\mu)qh\left(3y^2 - 6Ly + 2L^2\right)/(6D')$$

Результаты решения для различных толщин и различного количества четырехугольных ГЭ вдоль оси y представлены в табл. 3 ($h_* = 2h/L$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паймушин В.Н., Сидоров И.Н.* Вариант метода граничных интегральных уравнений для решения задач статики изотропных оболочек произвольной геометрии // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 160–169.
2. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
3. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. 296 с.

Казань

Поступила в редакцию
27.XII.1995