МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 539.374

© 1997 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ В ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ?

В теории течения идеального жесткопластического материала крайне редко (исключая одномерный случай и однородное напряженно-деформированное состояние) встречаются точные решения, описывающие единым аналитическим выражением каждую функцию во всем объеме пластически деформируемого материала. Это связано с тем, что структура уравнений теории пластического течения допускает решения со слабыми и сильными разрывами искомых функций, а также возникновение жестких областей. Отметим, что даже простые в постановочном плане задачи о пластическом течении в бесконечных конических и плоских каналах [1–3] и о внедрении бесконечного жесткого конуса в бесконечную пластическую среду [4] не имеют, несмотря на формальное удовлетворение всех уравнений и краевых условий, решений с содержательной физической интерпретацией [5, 6]. Конечно, в настоящее время развиты численные методы, ориентированные на решение задач теории плоского течения, например [7, 8]. Однако аналитические точные решения, особенно физически нелинейных задач, имеют большое фундаментальное и прикладное значения.

Известно, что решение задачи теории плоского пластического течения может быть представлено с помощью функций Бесселя или в интегральном виде, как это предложено в [9] или в виде бесконечных рядов [10, 11]. Однако определенный интерес представляют решения в элементарных функциях. Таким образом могут быть получены приближенные решения, которые удовлетворяют всем уравнениям, но не удовлетворяют некоторым краевым условиям. Причем во многих случаях краевые условия выполняются на значительной части границы. Сюда, при известных ограничениях могут быть отнесены отмеченные выше решения задач о течении в каналах и внедрении конуса, решение Прандтля о сжатии полосы между шероховатыми плитами, например, [1, 12], и решение задачи о выдавливании пластической массы из втулки [1] и его модификации [13]. Эти решения могут быть использованы для приближенного анализа многих технологических процессов и дают хорошую точность, если рассматривается область, достаточно удаленная от границ, на которых не выполняются краевые условия. Они также позволяют быстро получить оценки предельной нагрузки при применении вариационных принципов.

Другим важным классом решений в элементарных функциях являются решения, полученные в ограниченной области очага деформации, обычно вблизи особой точки (кончик трещины или выреза, угол штампа и так далее). При этом, естественно, выполнения всех краевых условий не требуется и решение вблизи особой точки должно быть сшито с решением в основном объеме деформируемого материала. Наиболее распространенным и удобным способом получения таких решений для плоского течения и осесимметричного течения при использовании условия текучести Треска является метод характеристик. В этом случае необходимо конструировать поле характеристик во всем объеме материала с учетом поля характеристик вблизи особой точки. Часто конструкция поля характеристик вблизи особенности определяет весь очаг деформации, отметим здесь известные монографии [1, 14], а также оригинальные решения [15–17]. В [8] поле характеристик вблизи особой точки сшито с глобальным полем. (Отметим, что в случае плоской деформации решение для напряжений в упругопластической постановке является и решением для жесткопластического тела). Эти решения построены путем комбинирования различных простейших характеристических полей:

поле с прямолинейным семейством характеристик, центрированный веер характеристик. В связи с этим интересно получить в элементарных функциях другие поля характеристик в полярной системе координат, которая наиболее удобна при исследовании напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов. Кроме того, как показано в работе [19], которая является обзором упругопластических решений вблизи кончика трещины, различные комбинации упругих и пластических областей около особенности могут иметь место в зависимости от внешних воздействий на тело. Таким образом необходимо сшить упругое и пластическое решение вдоль некоторой линии, исходящей из кончика трещины. Поскольку асимптотическое поведение решения для упругих материалов хорошо известно в полярных координатах, например [20], то и пластическое решение желательно получить в этой же координатной системе. Некоторые поля характеристик получены в полярных координатах в [21]. Определение других полей характеристик позволит расширить возможности применения метода сращиваемых асимптотических разложений в теории пластического течения, а также строить решения, комбинируя элементарные решения и решения, основанные на методах, предложенных в [9–11]. В частности, последним способом в [22] построено в аналитическом виде решение задачи о сжатии пластической массы между шероховатыми плитами. Кроме того, известно, что разрушение в пластичных материалах во многом определяется уровнем среднего напряжения, например [23, 24]. Поэтому, для приложения результатов к проблемам механики разрушения желательно также получить аналитические выражения для среднего напряжения, соответствующего характеристическим полям.

В публикуемой работе рассмотрены три вида простых полей характеристик в полярных координатах, которые при некоторых значениях параметров совпадают с ранее найденными полями. Для каждого поля характеристик получены аналитические выражения, описывающие распределение среднего напряжения.

1. Система уравнений. Система уравнений теории пластического течения в полярной системе координат r, φ в условиях плоской деформации имеет вид

$$\partial\sigma_0 / \partial r + \partial S_{rr} / \partial r + r^{-1}(S_{rr} - S_{\varphi\varphi}) + r^{-1}\partial S_{r\varphi} / \partial\varphi = 0 \tag{1.1}$$

$$\partial S_{r\varphi} / \partial r + r^{-1}\partial\sigma_0 / \partial\varphi + r^{-1}\partial S_{\varphi\varphi} / \partial\varphi + 2r^{-1}S_{r\varphi} = 0 \tag{1.2}$$

$$(S_{rr} - S_{\varphi\varphi})^2 + 4S_{r\varphi}^2 = 4K^2 \tag{1.3}$$

$$\xi_{rr} = \lambda S_{rr}, \quad \xi_{\varphi\varphi} = \lambda S_{\varphi\varphi}, \quad \xi_{r\varphi} = \lambda S_{r\varphi} \tag{1.4}$$

Здесь (1.1), (1.2) – уравнения равновесия; (1.3) – условие текучести; (1.4) – уравнения ассоциированного закона течения; σ_0 – среднее напряжение; S_{rr}, $S_{\varphi\varphi}$, $S_{r\varphi}$ – компоненты тензора-девиатора напряжений; ξ_{rr}, $\xi_{\varphi\varphi}$, $\xi_{r\varphi}$ – компоненты тензора скоростей деформаций; K – предел текучести при чистом сдвиге; λ – скалярный неотрицательный параметр.

Система уравнений (1.1) – (1.4) при соответствующих краевых условиях является статически определимой и поле характеристик определяется системой статических уравнений (1.1) – (1.3). Введем обозначения

$$S_{rr} = K\sin 2\theta, \quad S_{\varphi\varphi} = -K\sin 2\theta \tag{1.5}$$

$$S_{r\varphi} = -K\cos 2\theta, \quad \sigma_0 = 2K\sigma$$

Здесь θ – угол между касательной к характеристике семейства α и осью r, отсчитываемый от оси r против хода часовой стрелки.

Условие текучести (1.3) при использовании представления (1.5) выполняется тождественно.

Подставим (1.5) в уравнения равновесия (1.1) и (1.2), тогда

$$\begin{gathered}\partial\sigma / \partial r + (\cos 2\theta)\partial\theta / \partial r + r^{-1}(\sin 2\theta)(\partial\theta / \partial\varphi + 1) = 0 \\ \partial\sigma / \partial\varphi + r(\sin 2\theta)\partial\theta / \partial r - (\cos 2\theta)(\partial\theta / \partial\varphi + 1) = 0\end{gathered} \tag{1.6}$$

Исключим в этих уравнениях σ, в результате получим

$$r^{-1}(\sin 2\theta)(\partial^2\theta / \partial\varphi^2) - r(\sin 2\theta)(\partial^2\theta / \partial r^2) + 2(\cos 2\theta)(\partial^2\theta / \partial r\partial\varphi) +$$
$$+2r^{-1}(\cos 2\theta)(\partial\theta / \partial\varphi)^2 - 2r(\cos 2\theta)(\partial\theta / \partial r)^2 - 4(\sin 2\theta)(\partial\theta / \partial\varphi)(\partial\theta / \partial r) +$$
$$+2r^{-1}(\cos 2\theta)(\partial\theta / \partial\varphi) - 3(\sin 2\theta)(\partial\theta / \partial r) = 0 \qquad (1.7)$$

Решение этого уравнения определяет два семейства характеристик в соответствии с уравнениями

$$r^{-1}\partial r/\partial\varphi = \mathrm{ctg}\,\theta \qquad (1.8)$$

для α-линии

$$r^{-1}\partial r/\partial\varphi = -\mathrm{tg}\,\theta \qquad (1.9)$$

для β-линии.

2. Поля характеристик. Рассмотрим решения уравнения (1.7) в элементарных функциях, которые определяют простейшие поля характеристик.

Легко видеть, что уравнение (1.7) допускает решение $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$. В этом случае из (1.8) и (1.9) следует, что α-линии определяются уравнением

$$r = r_\alpha \exp\,(\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta_0) \qquad (2.1)$$

а β-линии – уравнением

$$r = r_\beta \exp\,(-\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta_0) \qquad (2.2)$$

Величины r_α и r_β постоянны для каждой из линий α и β соответственно.

Другим способом такое решение было получено в [25] в декартовых координатах.

Если $\theta_0 = 0$, то система (1.8), (1.9) имеет решения

$$\varphi = \mathrm{const} \qquad (2.3)$$

α-линия;

$$r = \mathrm{const} \qquad (2.4)$$

β-линия.

Если $\theta_0 = \pi/2$, то линии α и β меняются ролями в (2.3) и (2.4).

Эти решения определяют хорошо известное поле: веер характеристик.

Теперь положим $\theta = \theta(r)$. Тогда уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$r(\sin 2\theta)\theta'' + 2r(\cos 2\theta)\theta'^2 + 3(\sin 2\theta)\theta' = 0 \qquad (2.5)$$

Здесь штрихами обозначены соответствующие производные по r.

Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\theta = \pm \arccos[Y_0(Z_0 + r^{-2})] / 2 \qquad (2.6)$$

Уравнения α и β-линий определяются из (1.8) и (1.9)

$$\frac{dr}{rd\varphi} = \pm\left[\frac{1+Y_0(Z_0+r^{-2})}{1-Y_0(Z_0+r^{-2})}\right]^{1/2}$$
$$\frac{dr}{rd\varphi} = \pm\left[\frac{1-Y_0(Z_0+r^{-2})}{1+Y_0(Z_0+r^{-2})}\right]^{1/2} \qquad (2.7)$$

Здесь знак (+) соответствует значению $\theta > 0$, а знак (–) значению $\theta < 0$.

Переходя в (2.7) к переменной θ с помощью (2.6), получим

$$d\varphi = -\frac{2\cos^2\theta d\theta}{2\cos^2\theta - (1 + Y_0 Z_0)}$$

для α-линии;

$$d\varphi = \frac{2\sin^2\theta d\theta}{(1-Y_0Z_0)-2\sin^2\theta}$$

для β-линии.

Интегрирование этих выражений дает

$$\varphi = -\theta + \phi_\alpha(\theta, Y_0Z_0) + \varphi_\alpha$$

$$\phi_\alpha = \begin{cases} \left(\dfrac{Y_0Z_0-1}{Y_0Z_0+1}\right)^{1/2} \operatorname{arctg}\left[\left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{Y_0Z_0-1}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\theta\right], & |Y_0Z_0|>1 \\ \left(\dfrac{1-Y_0Z_0}{1+Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{Arth}\left[\left(\dfrac{1+Y_0Z_0}{1-Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\theta\right], & |Y_0Z_0|<1 \\ & \sin^2\theta<(1-Y_0Z_0)/2 \\ \left(\dfrac{1-Y_0Z_0}{1+Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{Arcth}\left[\left(\dfrac{1+Y_0Z_0}{1-Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\theta\right], & |Y_0Z_0|<1 \\ & \sin^2\theta>(1-Y_0Z_0)/2 \end{cases} \tag{2.8}$$

для α-линии.

$$\varphi = -\theta + \phi_\beta(\theta, Y_0Z_0) + \varphi_\beta$$

$$\phi_\beta = \begin{cases} \left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{Y_0Z_0-1}\right)^{1/2} \operatorname{arctg}\left[\left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{Y_0Z_0-1}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\theta\right], & |Y_0Z_0|>1 \\ -\left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{1-Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{Arth}\left[\left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{1-Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\theta\right], & |Y_0Z_0|<1 \\ & \sin^2\theta<(1-Y_0Z_0)/2 \\ -\left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{1-Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{Arcth}\left[\left(\dfrac{Y_0Z_0+1}{1-Y_0Z_0}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\theta\right], & |Y_0Z_0|<1 \\ & \sin^2\theta>(1-Y_0Z_0)/2 \end{cases} \tag{2.9}$$

для β-линии.

Уравнения (2.8) и (2.9) совместно с (2.6) определяют характеристические линии в параметрическом виде. Частный случай этого решения рассмотрен в [21].

Теперь положим $\theta = \theta(\varphi)$. Тогда уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$(\sin 2\theta)\theta'' + 2(\cos 2\theta)\theta'^2 + 2(\cos 2\theta)\theta' = 0 \tag{2.10}$$

Здесь штрихами обозначены соответствующие производные по φ.

Решение уравнения (2.10) имеет вид

$$\varphi = -\theta + \begin{cases} (1-c_0^2)^{-1/2} \operatorname{arctg}[(\operatorname{tg}\theta - c_0)(1-c_0^2)^{-1/2}] + \varphi_0, & |c_0|<1 \\ \dfrac{1}{2}(c_0^2-1)^{-1/2} \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\theta - c_0 - (c_0^2-1)^{1/2}}{\operatorname{tg}\theta - c_0 + (c_0^2-1)^{1/2}}\right| + \varphi_0, & |c_0|>1 \end{cases} \tag{2.11}$$

$c_0 = \text{const}, \quad \varphi_0 = \text{const}.$

Перейдем в (1.8) и (1.9) от независимой переменной φ к переменной θ. Тогда решения (1.8) и (1.9), совместно с (2.11) определяют уравнения характеристик в параметрическом виде

$$r = R_{0\alpha}\,|1-c_0\sin 2\theta|^{-1/2}\exp\left\{\frac{c_0}{(1-c_0^2)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\theta-c_0}{(1-c_0^2)^{1/2}}\right]\right\},\quad 1>c_0^2$$

$$r = R_{0\alpha}\,|1-c_0\sin 2\theta|^{-1/2}\left|\frac{\operatorname{tg}\theta-c_0-(c_0^2-1)^{1/2}}{\operatorname{tg}\theta-c_0+(c_0^2-1)^{1/2}}\right|^{s},\quad 1<c_0^2 \tag{2.12}$$

$$s = 1/2c_0(c_0^2-1)^{1/2}$$

для α-линии;

$$r = R_{0\beta}\,|1-c_0\sin 2\theta|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{c_0}{(1-c_0^2)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\theta-c_0}{(1-c_0^2)^{1/2}}\right]\right\},\quad 1>c_0^2$$

$$r = R_{0\beta}\,|1-c_0\sin 2\theta|^{-1/2}\left|\frac{\operatorname{tg}\theta-c_0-(c_0^2-1)^{1/2}}{\operatorname{tg}\theta-c_0+(c_0^2-1)^{1/2}}\right|^{-s},\quad 1<c_0^2 \tag{2.13}$$

для β-линии.

Частный случай этого решения рассмотрен в [21].

3. Поля напряжений. При известном поле характеристик для определения поля напряжений достаточно определить среднее напряжение и затем воспользоваться формулами (1.5) и определением девиатора напряжений.

Пусть $\theta = \theta_0 = \text{const}$. Тогда из (1.6) получаем

$$r(\partial\sigma/\partial r)+\sin 2\theta_0 = 0,\quad (\partial\sigma/\partial\varphi)-\cos 2\theta_0 = 0 \tag{3.1}$$

Из первого уравнения (3.1) следует

$$\sigma = -(\sin 2\theta_0)\ln r + \sigma_1(\varphi)$$

Из второго уравнения (3.1) находим

$$d\sigma_1/d\varphi = \cos 2\theta_0 \;\text{ или }\; \sigma_1 = \cos(2\theta_0)\varphi + p_0,\quad p_0 = \text{const}.$$

Окончательно при $\theta = \theta_0$ имеем

$$\sigma = -(\sin(2\theta_0))\ln r + (\cos(2\theta_0))\varphi + p_0 \tag{3.2}$$

Пусть $\theta = \theta(r)$. Тогда из (1.6) получаем

$$(\partial\sigma/\partial r)+(\cos 2\theta)(d\theta/dr)+r^{-1}(\sin 2\theta) = 0$$

$$(\partial\sigma/\partial\varphi)+r(\sin 2\theta)(d\theta/dr)-\cos 2\theta = 0 \tag{3.3}$$

Из (2.6) следует

$$d\theta/dr = Y_0(\sin^{-1}(2\theta))r^{-3} \tag{3.4}$$

Второе уравнение (3.3) в этом случае и с учетом (2.6) преобразуется к виду $\partial\sigma/\partial\varphi = Y_0Z_0$. Отсюда

$$\sigma = Y_0Z_0\varphi + \sigma_1(r) \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в первое уравнение (3.3), получаем

$$(d\sigma_1/dr)+(\cos 2\theta)(d\theta/dr)+r^{-1}(\sin 2\theta) = 0 \tag{3.6}$$

После замены независимой переменной $(d\sigma_1/dr) = (d\sigma_1/d\theta)(d\theta/dr)$ и использования (2.6) и (3.4) уравнение (3.6) примет вид

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{1 - Y_0 Z_0 \cos 2\theta}{Y_0 Z_0 - \cos 2\theta}$$

Отсюда, после интегрирования и подстановки в (3.5), следует выражение для среднего напряжения

$$\sigma = Y_0 Z_0 (\varphi - \theta) + \Psi(\theta, Y_0 Z_0) + p_0$$

$$\psi = \begin{cases} (Y_0^2 Z_0^2 - 1)^{1/2} \operatorname{arctg}\left[\dfrac{(Y_0^2 Z_0^2 - 1)\operatorname{tg}\theta}{Y_0 Z_0 + 1}\right], & Y_0^2 Z_0^2 > 1 \\ -\dfrac{1}{2}(1 - Y_0^2 Z_0^2)^{1/2} \ln\left|\dfrac{(1 - Y_0^2 Z_0^2)^{1/2}\operatorname{tg}\theta + 1 + Y_0 Z_0}{(1 - Y_0^2 Z_0^2)^{1/2}\operatorname{tg}\theta - 1 - Y_0 Z_0}\right|, & Y_0^2 Z_0^2 < 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Пусть $\theta = \theta(\varphi)$. Тогда из (1.6) следует

$$r(\partial\sigma / \partial r) + (\sin 2\theta)(d\theta / d\varphi + 1) = 0 \tag{3.8}$$

$$(\partial\sigma / \partial\varphi) - (\cos 2\theta)(d\theta / d\varphi + 1) = 0 \tag{3.9}$$

Из (2.11) и (3.8) получаем

$$\sigma = -c_0 \ln r + \sigma_2(\varphi) \tag{3.10}$$

Подставляя это выражение в (3.9), имеем

$$(d\sigma_2 / d\varphi) - (\cos 2\theta)(d\theta / d\varphi + 1) = 0 \tag{3.11}$$

Из (2.11) и (3.11) следует

$$\sigma_2 = -1/2c_0 \ln |c - \sin 2\theta|$$

Тогда среднее напряжение определяется из (3.10)

$$\sigma = -c_0 \ln r - 1/2c_0 \ln |c - \sin 2\theta|. \tag{3.12}$$

4. Поле скоростей. Поле скоростей определяется из уравнений (1.4), которые могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} (\partial u_r / \partial r) + r^{-1}(\partial u_\varphi / \partial\varphi) + (u_r / r) = 0 \\ (\partial u_r / \partial r) - r^{-1}(\partial u_\varphi / \partial\varphi) - (u_r / r) = -[(\partial u_\varphi / \partial r) + r^{-1}(\partial u_r / \partial\varphi) - (u_\varphi / r)]\operatorname{tg} 2\theta \end{gathered} \tag{4.1}$$

Так как в рассматриваемых случаях θ является известной функцией координат, то (4.1) представляет собой систему линейных однородных уравнений. Ее решение может быть построено, например, в виде бесконечного ряда методом разделения переменных. Однако при известном поле характеристик целесообразнее для каждой конкретной задачи воспользоваться для определения поля скоростей уравнениями Гейрингер или методами, предложенными в [9–11].

Замечание. Рецензент статьи обратил внимание авторов на упоминаемую в книге [21] неопубликованную докторскую диссертацию Гартмана[1]. В частности, в [21] отмечается (стр. 574, 578), что Гартман построил поля линий скольжения в декартовой

[1] *Hartmann W.* Über die Integration der Differential Gleichungen des ebenen Gleichengewichts-Zustandes für den allgemein-plastischen Korper, докторская диссертация, представленная в Геттингенский университет в 1925 г.

системе координат, считая $\theta = \theta(y)$, а также "рассчитал разнообразные случаи, когда естственными границами служит окружность или две концентрические окружности", пользуясь полярными координатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФ-93-013-16492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 396 с.
3. *Brovman M.J.* Steady forming processes of plastic materials with their rotation // Intern. J. Mech. Sci. 1987. V. 29. No. 7. P. 483–489.
4. *Durban D., Fleck N.A.* Singular plastic fields in steady penetration of a rigid cone // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. No. 4. P. 706–710.
5. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Течение пластической массы в сходящемся канале: особенности решения // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 3. С. 314–316.
6. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Об отрывных течениях в теории пластичности // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 144–149.
7. *Dewhurst P., Collins I.F.* A matrix technique for constructing slipline field solutions to a class of plane strain plasticity problems // Intern. J. Numer. Meth. Engng. 1973. V. 7. No 3. P. 357–378.
8. *Johnson W., Sowerby R., Venter R.D.* Plane strain slip line fields for metal deformation processes. Oxford: Pergamon Press, 1982. 364 p.
9. *Друянов Б.А., Непершин Р.И.* Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 271 с.
10. *Chakrabarty J.* Exact solutions for certain slipline fields // Intern. J. Mech. Sci. 1979. V. 21. No. 8. P. 477–488.
11. *Chakrabarty J.* Theory of plasticity. N.Y.: Mc Graw-Hill, 1987. 791 p.
12. *Григорян С.С.* Об одной задаче Л. Прандтля и теории пластического течения вещества по поверхностям // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 5. С. 1075–1077.
13. *Добровольский В.Л.* Об одной осесимметричной задаче для идеально пластического тела // Вопросы исследования прочности деталей машин. М.: Моск. Ин-т Приборостроения. 1993. Вып. 1. С. 29–32.
14. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
15. *Ивлев Д.Д.* Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 10. С. 89–93.
16. *Neimark J.E.* The fully plastic, plane-strain tension of a notched bar // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. No. 1. P. 111–116.
17. *Richmond O.* Plane strain necking of V-notched and un-notched tensile bars // J. Mech. Phys. Solids. 1969. V. 17. No. 2. P. 83–90.
18. *Rice J.* Mathematical analysis in the mechanics of fracture. // Fracture. N.Y.: Acad. Press, 1968. V. 2. P. 191–311.
19. *Rice J.R.* Elastic-plastic crack growth // Mechanics of Solids. The Rodney Hill 60th Anniversary Volume / Eds H.G. Hopkins and M.J. Sewell. Oxford: Pergamon Press, 1982. P. 539–562.
20. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение. 1981. 295 с.
21. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.
22. *Chakrabarty J.* The analytical solution of some boundary value problems in plaen plastic strain // Intern. J. Mech. Sci. 1991. V. 33. No. 2. P. 89–99.
23. *Bridgman P.W.* Studies in Large Plastic Flow and Fracture. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1964. 362 p.
24. *Knott J.F.* Effects of triaxial stress-states on deformation and fracture // Constitutive relations and their physical basis. Proc. 8th Riso Intern. Symp. on Metallurgy and Material Science / Eds. S.I. Andersen et all. Roskilde: Riso National Laboratory, 1987. P. 107–121.
25. *Geiringer H.* Ideal plasticity // Handbuch der Physik / Ed. C. Truesdell. Berlin: Springer, 1973. Bd. VIa/3. P. 403–533.

Москва

Поступила в редакцию
13.I.1995