МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1997

УДК 531.381

© 1997 г. Ю.М. УРМАН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРОВ В ЗАДАЧАХ ОБ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Во многих задачах, имеющих прикладное значение, кинетическая энергия вращения тела существенно больше работы возмущающих сил, поэтому движение тела на ограниченном интервале времени действия таких возмущающих моментов может привести к накоплению возмущений в движении и постепенной его эволюции.

В силу малости внешних моментов для анализа движения тела можно применить аппарат асимптотических методов теории колебаний [1]. С помощью этих методов переменные, описывающие движение, могут быть разделены на быстрые и медленные. Обычно основное значение для анализа возмущенного вращения тела имеет характер изменения медленных переменных, эволюция которых описывается системой дифференциальных уравнений, более простой по сравнению с исходной системой.

Как известно, упрощенная система чаще всего строится по следующему алгоритму: правые части уравнений для медленных переменных усредняются по периодам быстрых переменных. Что касается уравнений для быстрых переменных, то в их правых частях "возмущающие" члены в первом приближении можно просто отбросить. Если ε – порядок малости возмущения, то такой алгоритм обеспечивает точность $O(\varepsilon)$ для медленных переменных на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Уравнения, полученные таким образом, мы в дальнейшем будем называть эволюционными уравнениями.

Эффективность построения этих уравнений во многом определяется, во-первых, рациональным выбором переменных, описывающих эволюцию невозмущенного вращения тела под влиянием возмущающих моментов и, во-вторых, адекватностью вида записи силового взаимодействия сущности исследуемой задачи. Этим условиям удовлетворяют оскулирующие переменные, введенные в [2], и представление силовых взаимодействий с помощью математического аппарата неприводимых тензоров [3].

В настоящей работе уравнения эволюционных движений строятся для двух случаев, имеющих различный тип невозмущенного движения: быстрого вращения тела с произвольными моментами инерции и быстрого движения тела, эллипсоид инерции которого близок к шару. Показывается, что усредненный по свободному движению момент сил, действующих на тело, может быть разложен на консервативную и неконсервативную части. При этом консервативная часть момента порождается с помощью одной скалярной функции V_1, а неконсервативная – с помощью двух скалярных функций V_2 и V_3, зависящих от величины и направления кинетического момента. В качестве примера рассматривается задача Мартыненко Ю.Г. о движении динамически-симметричного несбалансированного ротора в неравножестком неконтактном подвесе, где в отличии от [7] угол нутации считается произвольным.

1. Рассмотрим движения твердого тела, имеющего неподвижную точку и движущегося под действием произвольных моментов сил **M**.

Пусть X_i (i = 1, 2, 3) – опорная система координат, Z_i – прямоугольная система координат, связанная с твердым телом. Вращение тела относительно неподвижной точки можно рассматривать как наложение двух движений относительно кинетического момента и вместе с кинетическим моментом. Поэтому введем дополнительно к системе координат X_i и Z_i еще систему Y_i, связанную с вектром $\mathbf{L}$ кинетического момента тела. Ось Y_3 направим по вектору $\mathbf{L}$, оси системы Z_i – главных центральных осей эллипсоида инерции тела с моментами инерции соответственно I_1, I_2, I_3.

Переход от системы координат X_i к Y_i осуществляется путем двух последовательных поворотов соответственно на сферические углы ρ, σ, характеризующие положение вектора кинетического момента в системе X_i, от Y_i к Z_i – после трех последовательных поворотов на углы Эйлера ψ, ϑ, φ.

Выберем следующие переменные, задающие движение тела относительно неподвижной точки: величину $|\mathbf{L}|$ кинетического момента и углы ρ, σ, ψ, ϑ, φ. Метод вывода уравнений движения твердого тела относительно твердой точки в этих переменных дан в [4]. Они образуют замкнутую систему уравнений шестого порядка:

$$L = M_3, \quad L\dot{\rho} = M_1, \quad L\sin\rho\dot{\sigma} = M_2 \tag{1.1}$$

$$\dot{\vartheta} = L\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) - \frac{M_1\cos\psi + M_2\sin\psi}{L}$$

$$\dot{\varphi} = L\cos\vartheta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{\cos^2\varphi}{I_1} - \frac{\sin^2\varphi}{I_2}\right) = \frac{M_2\cos\psi - M_1\sin\psi}{L\sin\vartheta} \tag{1.2}$$

$$\dot{\psi} = L\left(\frac{\cos^2\varphi}{I_1} + \frac{\sin^2\varphi}{I_2}\right) - \frac{M_2}{L}\operatorname{ctg}\rho + \frac{M_1\sin\psi - M_2\cos\psi}{L}\operatorname{ctg}\vartheta$$

где M_i – проекции момента внешних сил на оси Y_i.

В случае движения твердого тела с произвольными моментами инерции удобно вместо угла ϑ использовать в качестве переменной кинетическую энергию T, так как в невозмущенном движении она постоянна. Первые три уравнения системы описывают изменение вектора кинетического момента по величине и направлению, остальные три – движение тела относительно кинетического момента.

2. Ниже рассмотрим два случая осреднения:

(*a*) случай быстрого движения тела с произвольным моментом инерции. Роль малого параметра играет здесь безразмерное отношение $\max|\mathbf{M}|/T^*$, где T^* – характерное значение кинетической энергии вращающегося тела;

(*b*) случай быстрого движения тела, эллипсоид инерции которого близок к шару. Здесь малыми величинами одного порядка будем считать отношение $\max|\mathbf{M}|/T^*$, $(I_1 - I_2)/I_1$, $(I_1 - I_3)/I_1$.

Изучим сначала случай (*a*). Невозмущенное движение есть движение Эйлера–Пуансо. Медленные переменные – L, ρ, σ, T, быстрые – ψ, ϑ, φ. Величина ψ при свободном движении представляется в виде $\psi = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, причем ϑ, φ и ψ_1-периодичны по T с периодом τ, движения вектора $\mathbf{L}$ по полодиям, охватывающим в зависимости от начальных условий либо ось наименьшего момента инерции, либо ось наибольшего момента инерции. Второе слагаемое в выражении для ψ имеет вид $\psi_1 = 2\pi t/\tau'$. Причем T и τ', зависящие от L, и T, вообще говоря, несоизмеримы. В [4] показано, что в нерезонансном случае, когда частоты свободного движения несоизмеримы, осреднение можно проводить двумя независимыми этапами: по ψ_1, ϑ, φ и по ψ_2 как по функциям времени, т.е.

$$\langle\mathbf{M}(\mathbf{L},\psi,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\tau\tau'}\iint \mathbf{M}\left(\mathbf{L},\psi(t),\vartheta(t),\psi_1(t) + \frac{2\pi t'}{\tau'}\right)dt\,dt' = \frac{1}{2\pi\tau}\iint \mathbf{M}(\mathbf{L},\psi,\vartheta,\varphi)\,d\psi\,dt \tag{2.1}$$

Уравнение первого приближения для медленных движений вектора кинетического момента будут следующими:

$$\dot{\mathbf{L}} = \langle \mathbf{M}(\mathbf{L}, a) \rangle, \quad \dot{T} = f(\mathbf{L}, \alpha) \tag{2.2}$$

Здесь a – совокупность параметров, определяющих моменты инерции тела, начальные условия и параметры, входящие в моменты сил (например, амплитуда величины поля и т.д.); f – функция, характеризующая среднее от правой части уравнения для кинетической энергии.

Если моменты инерции $I_1 = I_2$, то уравнение для кинетической энергии заменяется на

$$(L\cos\vartheta)^{\cdot} = \langle M_\varphi \rangle \tag{2.3}$$

где $\langle M_\varphi \rangle$ – среднее значение проекции момента на ось динамической симметрии тела.

Покажем, что средний момент в первом уравнении (2.2) можно представить в следующей форме:

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{n}} \right] - \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{n}} \right] + \mathbf{n} V_3 \tag{2.4}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор кинетического момента. Векторный оператор $\partial/\partial\mathbf{n}$ в прямоугольной системе X_i равен

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \hat{i}_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} + \hat{i}_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} + \hat{i}_3 \frac{\partial}{\partial \gamma_3} \tag{2.5}$$

где γ_i – проекции вектора кинетического момента на оси системы X_i, орты которой $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$. Функции V_1, V_2, V_3, определяющие момент, зависят от величины и направления кинетического момента: параметров, характеризующих тело, силовое поле и т.д.

Для доказательства представимости момента в форме (2.4) воспользуемся теоремой Гельмгольца [5], на основании которой всякий вектор $\mathbf{N}$, зависящий от углов ρ, σ и удовлетворяющий условию

$$\int |N(\rho,\sigma)|^2 d\Omega < \infty$$

можно в области $0 \leqslant \rho \leqslant \pi$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$ разложить в ряд по шаровым векторам.

Применим эту теорему к осредненному моменту, тогда будем иметь

$$\langle \mathbf{M}(\mathbf{L}, a) \rangle = \sum A^Q_{jm}(L, a)\, Y^Q_{jm}(\mathbf{n}) \tag{2.6}$$

Коэффициенты разложения (2.6) даются формулами

$$A^Q_{jm} = \int \langle \mathbf{M} \rangle\, Y^{Q^*}_{jm}(\mathbf{n})\, d\Omega$$

Шаровой вектор Y^Q_{jm} является неприводимым тензорным произведением ранга j сферической функции и циклическим ковариантным ортом. При заданном j величина L принимает три значения $L = j, j \pm 1$. Три шаровых вектора через сферические функции выражаются по формулам [5]:

$$Y^{j+1}_{jm}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{1}{(j+1)(2j+3)}}\, \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] Y_{jm} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+3}}\, \mathbf{n} Y_{jm}$$

$$Y^{j}_{jm}(\mathbf{n}) = \frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] Y_{jm} \tag{2.7}$$

$$Y_{jm}^{j-1}(\mathbf{n}) = \frac{i}{\sqrt{j(2j-1)}}\,\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right]Y_{jm} + \sqrt{\frac{j}{2j-1}}\,\mathbf{n}Y_{jm}$$

Подставляя эти формулы в разложение (2.6), легко представим момент в форме (2.4), где

$$V_1 = -i\sum \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} A_{jq}^{j} Y_{jq}(\mathbf{n})$$

$$V_2 = \sum\left(A_{jq}^{j+1} - \frac{1}{\sqrt{(j+1)(2j+3)}} + A_{jq}^{j-1} - \frac{1}{\sqrt{j(2j-1)}}\right)Y_{jq}(\mathbf{n}) \tag{2.8}$$

$$V_3 = \sum\left(A_{jq}^{j+1}\frac{1}{\sqrt{2j-1}} - A_{jq}^{j+1}\sqrt{\frac{j+1}{2j+3}}\right)Y_{jq}(\mathbf{n})$$

Уравнения эволюционных движений для случая динамически симметричного тела принимают вид

$$L^{\cdot} = V_3,\quad L\mathbf{n}^{\cdot} = [\mathbf{n}\times\partial V_1/\partial\mathbf{n}] - \mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\partial V_2/\partial\mathbf{n}]$$

$$(L\cos\vartheta)^{\cdot} = \langle M_\varphi\rangle \tag{2.9}$$

Они представляют собой компактную запись уравнения первого приближения метода осреднения системы (1.1). Первое уравнение определяет закон изменения модуля кинетического момента, второе – закон изменения положения вектора кинетического момента в пространстве и, наконец, третье уравнение описывает нутационное движение. Если $\langle M_\varphi\rangle = 0$, то система (2.9) имеет первый интеграл вида $L\cos\vartheta =$ $=\mathrm{const}$, по физическому смыслу отвечающий сохранению проекции кинетического момента на ось тела.

Пусть $V_3 = \langle M_\varphi\rangle = 0$, тогда модуль кинетического момента L и угол нутации постоянны, и движение кинетического момента определяется вторым уравнением. Уравнение подобного вида использовалось в [6], где рассматривался гироскоп с неконтактным осесимметричным подвесом ротора, в котором приложенные к ротору моменты определяются лишь углом между вертикалью и осью прибора. В более общей постановке это уравнение исследовалось в [7].

Рассмотрим два случая, когда второе уравнение (2.9) имеет первые интегралы:

(*1*) $V_2 = 0$. Уравнение принимает вид

$$L\mathbf{n}^{\cdot} = [\mathbf{n}\times\partial V_1/\partial\mathbf{n}] \tag{2.10}$$

Легко видеть, что это уравнение имеет два интеграла: $\mathbf{n}^2 = 1$ и $V_1 = \mathrm{const}$. Для конкретных выражений силовой функции $V_1(\mathbf{n})$ траектории вектора кинетического момента в трехграннике X_i, представляет собой пересечение единичной сферы и семейства поверхностей $V_1(\mathbf{n}) = \mathrm{const}$.

(2) $V_1 = 0$. Уравнение принимает вид

$$L\mathbf{n}^{\cdot} = -\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial V_2}{\partial\mathbf{n}}\right] \tag{2.11}$$

Умножая скалярно (2.11) на вектор $\mathbf{n}$, видим, что интеграл $\mathbf{n}^2 = 1$ сохраняется. Умножим теперь уравнения (2.11) скалярно на вектор $[\mathbf{n}\times\partial V_2/\partial\mathbf{n}]\,dt$, тогда получим

$$([\mathbf{n}\times\partial V_2/\partial\mathbf{n}]\,d\mathbf{n}) = 0 \tag{2.12}$$

Условие представляет пфаффову форму в трехмерном пространстве. Согласно теореме Фробениуса [8], для того чтобы уравнение Пфаффа (2.12) было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы

$$([\mathbf{n}\times\partial V_2 / \partial\mathbf{n}]\cdot \mathrm{rot}[\mathbf{n}\times\partial V_2 / \partial\mathbf{n}])=0 \tag{2.13}$$

В этом случае существует интегрирующий множитель, приводящий форму Пфаффа к полному дифференциалу, и интегральные поверхности уравнений (2.11) задаются уравнениями $\psi(\mathbf{n})=\mathrm{const}$.

Теорема. Если V_2 – однородная функция переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, то уравнение (2.11) интегрируемо.

Доказательство. Условие (2.13) может быть представлено в эквивалентном виде

$$\left(\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial V_2}{\partial\mathbf{n}}\right]\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right)\frac{\partial V}{\partial\mathbf{n}}\right)=0 \tag{2.14}$$

Пусть $V_2(\mathbf{n})$ – однородная функция степени m. Тогда на основании теоремы Эйлера имеем

$$(\mathbf{n}\cdot\partial V_2/\partial\mathbf{n})=mV_2 \tag{2.15}$$

Применяя оператор $\partial/\partial\mathbf{n}$ к левой и правым частям формулы (2.15) получим

$$\left(\mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right)\frac{\partial V_2}{\partial\mathbf{n}}=(m-1)\frac{\partial V_2}{\partial\mathbf{n}} \tag{2.16}$$

Так как вектор $\partial V_2/\partial\mathbf{n}$, ортогонален вектору $[\mathbf{n}\times\partial V_2/\partial\mathbf{n}]$, то условие (2.14) выполняется. Следовательно, если V_2 – однородная функция, то у уравнения (2.11) существует два первых интеграла: $\mathbf{n}^2=1$ и $\psi(\mathbf{n})=\mathrm{const}$, наличие которых позволяет исследовать траектории движения вектора кинетического момента.

При некоторых конкретных формах функции $V_2(\mathbf{n})$ удается найти явный вид интеграла $\psi(\mathbf{n})=\mathrm{const}$. Например, рассмотрим функцию $V_2=a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2+a_3\gamma_3^3$ ($a_i=\mathrm{const}$), которая встречается в теории неконтактного гироскопа [7]. Это однородная функция степени 2. Условие (2.12) имеет вид

$$(a_3-a_2)\,\gamma_2\gamma_3 d\gamma_1+(a_1-a_3)\,\gamma_3\gamma_1 d\gamma_2+(a_2-a_1)\,\gamma_1\gamma_2 d\gamma_3=0$$

Видно, что интегрирующий множитель этой формы есть $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1}$, а первый интеграл $\psi(\mathbf{n})=\gamma_1^{a_3-a_2}\gamma_2^{a_1-a_3}\gamma_3^{a_2-a_1}=\mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь случай (*b*). Здесь осреднение проводится по невозмущенному движению, представляющему собой равномерное вращение вокруг неподвижной оси. Погрешность осредненного решения при этом также порядка ε, но резонансы здесь уже не могут иметь место, так как в системе имеется только одна быстрая переменная.

Медленными переменными здесь будут k, ρ, σ, ϑ, φ, а быстрой – переменная ψ. Проводя осреднение правых частей уравнений (1.1) и (1.2) по ψ получим

$$\mathbf{L}_X^{\cdot}=\langle M_X(L,n_X,n_Z,a)\rangle,\quad \mathbf{L}_Z^{\cdot}=L^2[n_X\times I^{-1}n_Z]+\langle\mathbf{M}_Z\rangle \tag{2.17}$$

Первое уравнение описывает движение вектора кинетического момента в трехграннике X_i, а второе в трехграннике Z_i, что и обозначается соответствующими значками. Через n_x обозначен единичный вектор кинетического момента, имеющего проекции на ось X_i, а через n_z – на ось Z.

Воспользовавшись разложением момента (2.4) можем привести уравнения (2.17) к виду

$$\dot{L}=\tilde{V}_3(L,\gamma_t,\beta_t,a)$$

$$L\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \gamma_2} + (1-\gamma_1^2) \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\gamma_2 \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \gamma_2} - \gamma_1\gamma_3 \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \gamma_3} \qquad (1, 2, 3)$$

$$L\dot{\beta}_1 = L^2\beta_2\beta_3\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) + \beta_2 \frac{\partial \tilde{V}_1^*}{\partial \beta_3} - \beta_3 \frac{\partial \tilde{V}_1^*}{\partial \beta_2} + (1-\beta_1^2) \frac{\partial \tilde{V}_2^*}{\partial \beta_1} - \qquad (2.18)$$

$$-\beta_1\beta_2 \frac{\partial \tilde{V}_2^*}{\partial \beta_2} - \beta_1\beta_3 \frac{\partial \tilde{V}_2^*}{\partial \beta_3} \qquad (1, 2, 3)$$

Здесь учитывается, что разложение $\langle M_X \rangle$ строится по сферическим векторам, зависящим от проекции **n** на оси OX_t, а $\langle \mathbf{M}_Z \rangle$ – от проекции вектора **n** на оси OZ_t, что и отмечается значком тильда и тильда со звездочкой у функции V. Через $\beta_t(1, 2, 3)$ обозначены проекции единичного вектора **n** на оси OZ_t: $\beta_1 = -\sin\vartheta \cos\varphi$, $\beta_2 = \sin\vartheta \sin\varphi$, $\beta_3 = \cos\vartheta$.

Сравнение систем уравнений (2.9) и (2.18) показывает, что размерность системы уравнений, описывающей эволюцию тела с эллипсоидом инерции, близким к шару, увеличивается. Появляются новые уравнения, отвечающие движению тела относительно кинетического момента.

Основная трудность при получении эволюционных уравнений состоит в преобразовании момента либо силовой функции к оскулирующим переменным, описывающим эволюцию движения. Здесь существенную помощь оказывает представление взаимодействия тела с полем в форме тензорных произведений неприводимых тензоров. Такое представление позволяет рассматривать довольно сложные типы взаимодействий, обеспечивая компактную форму их записи и классификацию по типу взаимодействия. Кроме того, обладая свойством инвариантности, оно позволяет единообразно производить преобразования из одной системы координат в другую, повернутую относительно первой, и тем самым легко выражать момент либо силовую функцию через оскулирующие переменные задачи. И, наконец, это представление позволяет эффективно проводить процедуру осреднения не покомпонентно, а сразу всего объекта.

В качестве примера строятся эволюционные уравнения движения несбалансированного ротора в неравножестком неконтактном подвесе для случая динамически симметричного ротора и ротора, у которого моменты инерции близки. В первом случае задача была поставлена Мартыненко Ю.Г. и исследовалась им в [9] при условии малости угла нутации. Снимем это ограничение, что позволит изучать движение ротора при больших углах нутации.

3. *Пример 1*. Введем систему прямоугольных координат O_i ($i = 1, 2, 3$) с началом в центре O подвеса и осями, направленными по осям симметрии трехосного подвеса. Пусть O_1 – центр сферической поверхности ротора, а O_2 – его центр масс. В общем случае будем считать подвес неравножестким, тогда равнодействующая сила подвеса, приложенная к геометрическому центру ротора, будет

$$\mathbf{F} = -\hat{Q}(P)(\mathbf{R} + \mathbf{E}) \qquad (3.1)$$

Здесь **R** – вектор смещения центра масс относительно центра подвеса (или точки O_2 относительно O), вектор **E**, проведенный из точки O_2 в O_1, есть дебаланс ротора, $\hat{Q}(P) = \mathrm{diag}\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ – диагональная матрица, $Q_i(P)$ – передаточная функция i-го канала следящей системы подвеса, обеспечивающей вывешивание ротора вдоль оси X_i ($i = 1, 2, 3$), $P = d/dt$ – оператор дифференцирования по времени.

Уравнения движения центра масс ротора и уравнения движения момента количества движения относительно центра масс имеют вид

$$M\mathbf{R}^{\cdot\cdot} = M\mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{L}^{\cdot} = [\mathbf{E} \times \mathbf{F}] \qquad (3.2)$$

Здесь M и $\mathbf{L}$ – масса и вектор кинетического момента ротора, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Следуя [9], проведем нормализацию уравнений (3.2), тогда будем иметь

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{p} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = -\hat{q}(p')(\mathbf{r} + \mathbf{e}), \quad \mathbf{l}' = \varepsilon[\mathbf{e}x\mathbf{f}] \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{l}$ – безразмерные смещение, вес, сила, вектор дебаланса, кинетический момент. Штрих означает дифференцирование по безразмерному времени, в качестве которого выбрано нутационное время задачи $T = I_1/L^*$, где I_1 – экваториальный момент инерции, L^* – характерное значение модуля количества движения тела. Малый параметр $\varepsilon = ME^2/I$ – квадрат отношения дебаланса ротора к его радиусу инерции. Обычно для неконтактных гироскопов $\varepsilon \sim 10^{-8}$.

Следуя общей схеме получения эволюционных движений видим, порождающая система получается из (3.3) при $\varepsilon = 0$. При этом условии l, δ, σ, ϑ будут постоянными, углы ψ, φ – линейными функциями времени

$$\psi = lt + \psi^\circ, \quad \varphi = -\nu t + \varphi^\circ, \quad \nu = l\varkappa\cos\vartheta / (1 + \varkappa), \quad \varkappa = (I_3 - I_1) / I_1 \tag{3.4}$$

где ψ°, k° – начальные значения углов прецессии и собственного вращения.

Для определения средних значений моментов в (1.3) найдем $\mathbf{f}$, исключая $\mathbf{r}$ из первых двух уравнений (3.3):

$$\mathbf{f} = -\mathbf{p} - \hat{\omega}(p')\,\mathbf{e} + \mathbf{f}_0, \quad \omega_t(p') = \frac{p'^2 q_t(p')}{p'^2 + q_t(p')} \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{f}_0$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, которое считается затухающим ($\mathbf{f}_0 \to 0$ при $t \to \infty$), $\hat{\omega}(p')$ – передаточная функция замкнутой системы регулирования.

Представим силу и момент в форме неприводимого тензора первого ранга

$$f_1 = -P_1 - \hat{O}e_1 + \sqrt{5/2}\{\hat{T}_2 \otimes e_1\}_1 \tag{3.6}$$

$$O = \tfrac{1}{3}(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3), \quad T_{20} = \omega_3 - 0, \quad T_{22} = T_{2-2} = \sqrt{1/6}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)$$

если подвес равножесткий, то $T_2 = 0$, если осесимметричный, то $T_{22} = T_{2-2} = 0$, $O = \tfrac{1}{3}(2\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3)$, $T_{20} = \tfrac{2}{3}(\hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_1)$.

Используя (3.6), запишем момент, действующий на ротор, в форме неприводимого тензора

$$m_1 = -i\sqrt{2}\,\varepsilon\{e_1 \otimes f_1\}_1 = i\sqrt{2}\,\varepsilon(e_1 \otimes P_1\}_1 + i\sqrt{2}\,(e_1 \otimes \hat{O}e_1\}_1 - i\sqrt{5}\,\{e_1 \otimes \{T_2 \otimes e_1\}_1\}_1 \tag{3.7}$$

Не нарушая общности будем считать, что вектор дебаланса $\mathbf{e}$ лежит в плоскости Z_1Z_3 системы координат OZ_i ($i = 1, 2, 3$), связанной с телом ротора. Тогда его циклические компоненты равны

$$e_{10} = \cos\chi, \quad e_{11} = -1/\sqrt{2}\sin\chi, \quad e_{1-1} = 1/\sqrt{2}\sin\chi \tag{3.8}$$

где χ – угол между вектором дебаланса и осью динамической симметрии ротора.

Осредняя момент (3.7) по свободному движению осесимметричного ротора получим

$$\langle\mathbf{m}\rangle = \varepsilon\left[\mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right]\left\{-e_{10}\cos\vartheta(P_1\mathbf{n}_1) + \frac{1}{4}\sum_{qq'}(3q^2 - 2)|\,e_{1q'}|^2|\,d^1_{qq'}(\cos\vartheta)\,|^2 \times\right.$$

$$\times(Y_2(\mathbf{n})\cdot T_2\{-i(ql-q'\nu)\})\}+\varepsilon\frac{i}{4}\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right]\sum_{qq'}q\,|\,d^1_{qq'}|^2\times \tag{3.9}$$

$$\times|\,e_{1q'}|^2(Y_2\cdot T_2)+\varepsilon i\mathbf{n}\sum_{qq'}q\,|\,d^1_{qq'}|^2|\,e_{1q'}|^2\left(-\hat{O}\{-i(ql-q'\nu)\}+\frac{1}{2}(Y_2\cdot T_2)\right)$$

Из выражения (3.9) следует, что средний момент можно представить в виде (2.4), где после расписывания сумм

$$V_1=\varepsilon\left\{-e_{10}\cos\vartheta(\mathbf{Pn})+\frac{1}{4}\sum_{S=1}^{3}\gamma_S^2[-2\sin^2\vartheta\cos^2\chi\operatorname{Re}\hat{\omega}_S\{i\nu\}+\right.$$

$$+\sin^2\vartheta\cos^2\chi\operatorname{Re}\hat{\omega}_S\{il\}+\frac{(1+\cos\vartheta)^2}{4}\sin^2\chi\operatorname{Re}\hat{\omega}_S\{i(l-\nu)\}+ \tag{3.10}$$

$$\left.+\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{4}\sin^2\chi\operatorname{Re}\hat{\omega}_S\{i(l+\nu)\}]\right\}$$

$$V_2=\varepsilon\frac{1}{4}\sum_{S=1}^{3}\gamma_S^2\left[\sin^2\vartheta\cos^2\chi\, Im\hat{\omega}_S\{il\}+\frac{(1+\cos\vartheta)^2}{4}\sin^2\chi\times\right.$$

$$\left.\times Im\hat{\omega}_S\{i(l-\nu)\}+\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{4}\sin^2\chi Im\hat{\omega}_S\{i(l-\nu)\}\right] \tag{3.11}$$

$$V_3=-\varepsilon\frac{1}{2}\sum_{S=1}^{3}(1-\gamma_S^2)\left[\sin^2\vartheta\cos^2\chi\, Im\hat{\omega}_S\{il\}+\frac{(1+\cos\vartheta)^2}{4}\sin^2\chi\times\right.$$

$$\left.\times Im\hat{\omega}_S\{i(l-\nu)\}+\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{4}\sin^2\chi Im\hat{\omega}_S\{i(l+\nu)\}\right] \tag{3.12}$$

Для составления уравнений эволюционных движений остается еще найти момент, действующий вдоль оси динамической симметрии ротора. Проектируя (3.7) на ось динамической симметрии тела и проводя осреднения получим

$$\langle m_\varphi\rangle=\frac{1}{2}\sin^2\chi\left\{\sum_{S=1}^{3}\left[\gamma_S^2\sin^2\vartheta\, Im\hat{\omega}_S\{i\nu\}+\frac{(1+\cos\vartheta)^2}{4}\times\right.\right.$$

$$\left.\times Im\hat{\omega}_S\{i(l-\nu)\}(\gamma_S^2-1)-\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{4}Im\hat{\omega}_S\{i(l+\nu)\}(\gamma_S^2-1)\right] \tag{3.13}$$

Используя формулы (3.10)–(3.13) запишем эволюционные уравнения движения ротора в неравножестком подвесе при произвольных углах нутации ϑ:

$$l'=V_3,\quad l\mathbf{n}'=\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial V_1}{\partial\mathbf{n}}\right]+\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\frac{\partial V_2}{\partial\mathbf{n}}\right] \tag{3.14}$$

$$l\vartheta'=-\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{S=1}^{3}[(1-\gamma_S^2)\cos\vartheta\sin\vartheta\cos^2\chi Im\omega_S\{il\}+$$

$$+\gamma_S^2\sin\vartheta\sin^2\chi Im\omega_S\{i\nu\}-\frac{1}{4}(1-\gamma_S^2)\sin\vartheta\times \tag{3.15}$$

$$\times(1+\cos\vartheta)\sin^2\chi Im\omega_S\{i(l-\nu)\}+\frac{1}{4}(1-\gamma_S^2)\sin\vartheta\times$$

$$\times(1-\cos\vartheta)\sin^2\chi Im\omega_S\{i(l-\nu)\}]$$

Полагая в формулах (3.10)–(3.12) $\vartheta = 0$, а в формуле (3.15) учитывая только первый порядок малости по углу нутации, получаем уравнения работы [9]. Для изотропного подвеса $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_3 = \omega$ уравнения (3.14) и (3.15) переходят в уравнения, полученные в [10].

Пример 2. Будем считать, что моменты инерции ротора I_t близки. Тогда в задаче о движении ротора появится еще один малый параметр μ: относительная разность моментов инерции $(I_1 - I_2)/I_0$, $(I_2 - I_3)/I_0$, $(I_3 - I_1)/I_0$, где I_0 – момент инерции шара.

Введем безразмерное время $T = I_0/L^*$. Проводя нормализацию как и в предыдущем примере, приведем уравнение (3.2) к безразмерному виду (3.3), где малый параметр $\varepsilon = ME^2/I_0$. Будем считать параметры μ и ε одного порядка, тогда порождающее решение при $\mu = \varepsilon = 0$ отвечает вращению $\psi = lt + \psi_0$.

Проводя осреднение моментов (3.7) по времени, получим уравнения эволюционных движений в форме (2.18), где

$$\tilde{V}_1 = -(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})(\mathbf{pn}) + \frac{1}{4}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})]^2 \sum_{S=1}^{3} \gamma_S^2 \operatorname{Re}\omega_S(il) \tag{3.16}$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{4}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})]^2 \sum_{S=1}^{3} \gamma_S^2 Im\omega_S(il) \tag{3.17}$$

$$\tilde{V}_3 = -\frac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})]^2 \sum_{S=1}^{3} (1-\gamma_S^2)\, Im\omega_S(il) \tag{3.18}$$

$$\tilde{V}_1^* = -(\mathbf{pn})(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}) - \frac{1}{4}[(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})]^2 \sum_{S=1}^{3} (1-\gamma_S^2) \operatorname{Re}\omega_S(il) \tag{3.19}$$

$$\tilde{V}_2^* = -\frac{1}{4}[(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})]^2 \sum_{S=1}^{3} (1-\gamma_S^2)\, Im\omega_S(il) \tag{3.20}$$

$$\nabla_\Omega = \mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

где $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – орт кинетического момента в проекциях на оси, связанные с телом.

При использовании выражений (3.16)–(3.20) надо принять во внимание, что

$$(\beta\cdot\mathbf{e}) = \cos\vartheta\cos\chi - \sin\vartheta\sin\chi\cos(\varphi + \lambda) \tag{3.21}$$

$$\gamma_1 = \sin\rho\cos\sigma,\quad \gamma_2 = \sin\rho\sin\sigma,\quad \gamma_3 = \cos\rho$$

где χ, λ – сферические координаты вектора дебаланса в теле.

Рассмотрим угловые движения ротора в случае изотропного подвеса. Принимая $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_3 = \hat{\omega}$, получаем следующие уравнения:

$$l\mathbf{n}' = -(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[\mathbf{n}\times\mathbf{p}] \tag{3.22}$$

$$l\beta' = -l^2[\boldsymbol{\beta}\times I^{-1}\boldsymbol{\beta}] + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] + (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})\operatorname{Re}\omega(il)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] +$$

$$+(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})\, Im\omega(il)[\boldsymbol{\beta}\times[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}]] \tag{3.23}$$

$$l' = -[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2\, Im\omega(il) \tag{3.24}$$

Тело совершает сложное движение вокруг вектора кинетического момента, который сам меняясь по величине прецессирует вокруг вектора силы тяжести. При этом если $Im\omega > 0$, кинетический момент уменьшается, если же $Im\omega < 0$, то увеличивается.

Рассмотрим движение ротора в устойчивом стационарном режиме. Пусть $l = l_0$ – нуль функции $Im\omega(il) = 0$, соответствующий устойчивому стационарному режиму. В стационарном режиме уравнения (3.22), (3.23) принимают вид

$$l_C\mathbf{n}' = -(\boldsymbol{\beta}\mathbf{e})[\mathbf{n}\times\mathbf{p}] \tag{3.25}$$

$$l_C\beta' = -l_C^2[\boldsymbol{\beta}\times I^{-1}\boldsymbol{\beta}] + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] + (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})\operatorname{Re}\omega(il_C)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] \tag{3.26}$$

Эти уравнения имеют следующие первые интегралы:

$$\frac{1}{2}l_C^2\left[\frac{\beta_1^2}{I_1}+\frac{\beta_2^2}{I_2}+\frac{\beta_3^2}{I_3}\right] - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_3 e_3) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\omega(il_C)(\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_3 e_3)^2 = \mathrm{const} \tag{3.27}$$

$$(\gamma_1 p_1+\gamma_2 p_2+\gamma_3 p_3) = \mathrm{const} \tag{3.28}$$

$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1 \tag{3.29}$$

Интегралов (3.27)–(3.29) достаточно для исследования углового движения кинетического момента в пространстве и в теле ротора.

Итак, движение кинетического момента в пространстве происходит по фазовым траекториям, определяемым пересечением сферы $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ и плоскости (3.28), а в теле ротора по фазовым траекториям, определяемым пересечением эллипсоида (3.27), главные оси которого не совпадают с осями OX_i и центр которого смещен относительно начала координат, со сферой $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$.

Выясним влияние неизотропности подвеса на динамику ротора гироскопа. Наиболее простой случай – симметричный подвес. Здесь возможно несколько случаев.

(A) Регулирование есть только по оси OX_3, а по осям $OX_{1,2}$ происходит "пассивное" удержание ротора. Уравнения движения имеют вид (k – орт оси OX_3):

$$l' = -\frac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2[1-(\mathbf{nk})^2]\,Im\omega(il) \tag{3.30}$$

$$l\mathbf{n}' = -(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[\mathbf{n}\times\mathbf{p}] + \tfrac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})[\mathbf{n}\times\mathbf{k}]\operatorname{Re}\omega(il) -$$

$$-\tfrac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2\,Im\omega(il)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})[\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{k}]] \tag{3.31}$$

$$l\beta' = -l^2[\boldsymbol{\beta}\times I^{-1}\boldsymbol{\beta}] + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})^2]\times$$

$$\times\operatorname{Re}\omega(il)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})^2]\,Im\omega(il)[\boldsymbol{\beta}\times[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}]] \tag{3.32}$$

Умножая уравнение (3.30) на ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$), а уравнение (3.31) скалярно на $\mathbf{k}$ и, складывая их, найдем при условии, что $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}$ интеграл движения, отвечающий сохранению проекции вектора l на ось симметрии системы

$$(\mathbf{l}\cdot\mathbf{k}) = \mathrm{const} \tag{3.33}$$

(B) Регулирование есть по осям $OX_{1,2}$ и $\omega_1 = \omega_2$, а по OX_3 регулирования нет, $\omega_3 = 0$. Уравнение движения

$$l' = -\tfrac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2[1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})^2]\,Im\omega(il) \tag{3.34}$$

$$l\mathbf{n}' = -(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[\mathbf{n}\times\mathbf{p}] - \tfrac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})[\mathbf{n}\times\mathbf{k}]\,\mathrm{Re}\,\omega(il) +$$
$$+\tfrac{1}{2}[\nabla_\Omega(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})]^2\, Im\omega(il)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})[\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{k}]] \qquad (3.35)$$
$$l\boldsymbol{\beta}' = -l^2[\boldsymbol{\beta}\times I^{-1}\boldsymbol{\beta}] + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})^2]\times$$
$$\times\mathrm{Re}\,\omega(il)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}] + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e})[1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})^2]\, Im\omega(il)[\boldsymbol{\beta}\times[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{e}]] \qquad (3.36)$$

Эта система имеет интеграл

$$l[\mathbf{n}\times\mathbf{k}]^2/(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) = \mathrm{const} \qquad (3.37)$$

Из приведенных уравнений следует, что разгон, торможение или стационарный режим зависит от знака одной функции $Im\omega(il)$ как и в изотропном подвесе. Однако в отличие от изотропного подвеса одновременно с разгоном (или торможением) ротора происходит уход кинетического момента даже в случае отсутствия силы тяжести.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00612).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.
2. *Булгаков Б.В.* Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 400 с.
3. *Урман Ю.М.* Неприводимые тензоры и их применение в задачах движения твердого тела в силовых полях // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1983. Вып. 15. С. 75–87.
4. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–485.
5. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
6. *Денисов Г.Г., Комаров В.Н.* Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С . 15–23.
7. *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
8. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
9. *Брюшков В.Г., Мартыненко Ю.Г.* Уходы несбалансированного гироскопа в неравножестком электростатическом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 33–40.

Н.-Новгород

Поступила в редакцию
13.XII.1995