

УДК 539.3

© 1997 г. И.О. ОСИПОВ

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ПЛОСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

В анизотропных средах с четырьмя упругими постоянными в плоских задачах качественная картина волновых процессов имеет принципиальное различие в зависимости от выполнения для упругих постоянных различных условий. В [1] изучена задача распространения плоских волн в анизотропных средах контактирующих с жидкостью. В данной статье продолжается изучение этой задачи для сред с другими условиями. В таких средах волновые процессы подчиняются более сложным закономерностям и остаются неизученными. Определение решений задачами на римановой поверхности позволило провести детальное аналитическое исследование кинематических закономерностей волновых процессов при различных соотношениях упругих постоянных контактирующих сред.

1. Введение. Волновые процессы в анизотропных средах сложны и многообразны, качественно зависят от соотношений упругих постоянных. Особый теоретический и практический интерес представляет изучение закономерностей волновых процессов, связанных с распространением плоских волн, и этим вопросам уделяется значительное внимание [1]. Однако из-за сложности и многообразия волновых процессов исследования выполняются либо при определенных ограничениях, накладываемых на упругие постоянные, либо ограничиваются численным анализом.

В [1], используя метод В.И. Смирнова и С.Л. Соболева [2, 3], изучена плоская задача отражения и преломления квазипродольных и квазипоперечных волн типа SV на границе раздела жидкости и анизотропного полупространства с четырьмя упругими постоянными, удовлетворяющими условию

$$(a-d)b - c^2 > 0 \quad (1.1)$$

В таких средах квазипродольные и квазипоперечные волны выражаются через функции λ_1 и λ_2 , представляющие собой ветви алгебраических функций λ , каждая из которых имеет две точки разветвления: $\theta = \pm a^{-1/2}$ при $k = 1$ и $\theta = \pm d^{-1/2}$ при $k = 2$ [1].

В данной работе продолжается изучение этих вопросов для анизотропных сред, удовлетворяющих условию

$$(a-d)b - c^2 < 0 \quad (1.2)$$

В этом случае в отличие от (1.1) функция λ_1 имеет четыре точки разветвления: $\theta = \pm a^{-1/2}$ и $\theta = \pm d^{-1/2}$, функция λ_2 не имеет точек разветвления; волновые процессы подчиняются более сложным закономерностям, изучение их требует особого подхода.

Выражение решений поставленной задачи через обратные кажущиеся скорости волн в направлениях границы раздела сред и нормали к ней, однозначное определение полученных решений на римановой поверхности позволили провести детальное аналитическое исследование всех возможных комбинаций в распределении нормальных

скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн в зависимости от углов падения первичных волн и упругих постоянных контактирующих сред.

2. Плоские волны в анизотропных средах при условии (1.2). Упругие постоянные для реальных анизотропных сред удовлетворяют условиям [1] $a > b, b > d, d > 0, ab - (c - d)^2 > 0$. Прямоугольная система координат совпадает с осями упругой симметрии, колебания не зависят от z .

Дифференциальные уравнения свободных упругих колебаний в анизотропной среде имеют вид [2]:

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$c \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Плоские волны в анизотропной среде выражаются функциями [1]:

$$U_k = U(t - \theta x + \lambda_k y), \quad V_k = V(t + \theta x + \lambda_k y) \quad (2.2)$$

$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H - (ab)(a^{-1} - \theta^2)(d^{-1} - \theta^2)]^{1/2}\}^{1/2} \quad (2.3)$$

$$H = [(b + d) - (ab + d^2 - c^2)\theta^2] / (2bd) \quad (2.4)$$

Нормальные скорости волн (2.2) и углы, образованные нормальными к фронтам волн с осью y , определяются выражениями

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \theta / \lambda_k \quad (k = 1, 2) \quad (2.5)$$

Функции λ_1 и λ_2 , представленные выражениями (2.3), есть ветви алгебраической функции λ , однозначной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных.

Точками разветвления для внутренних радикалов (2.3) являются точки [4]:

$$\theta_i^0 = \pm \left\{ \left[M \pm \sqrt{4bdc^2 [c^2 - (a-d)(b-d)]} \right] / K_1 K_2 \right\}^{1/2} \quad (2.6)$$

$$K_1 = ab - (c - d)^2, \quad K_2 = ab - (c + d)^2$$

$$M = (b + d)[(a - d)(b - d) - c^2] - (b - d)(a - d)d$$

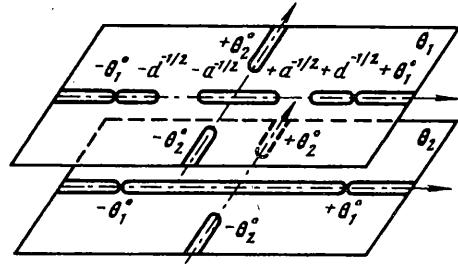
которые могут быть комплексными, мнимыми и вещественными в зависимости от соотношений упругих постоянных. Анализ точек разветвления был сделан ранее в работе автора [5] при значении $\vartheta = 1/\theta$.

При выполнении условия (1.1) точками разветвления для внешних радикалов (2.3) будут: точки $\theta = \pm a^{-1/2}$ при $k = 1$ и точки $\theta = \pm d^{-1/2}$ при $k = 2$. В этом случае ветви λ_1 и λ_2 алгебраической функции λ однозначно определены на римановой поверхности, составленной из плоскостей θ_1 и θ_2 соответственно с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$. Плоскости склеены крест-накрест вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления (2.6). Если точки разветвления – две мнимые, две вещественные, риманова поверхность имеет вид, изображенный на фиг. 1 в [6].

На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$ плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (2.2) выражают вещественные плоские волны: квазипродольные при $k = 1$, квазипоперечные при $k = 2$, распространяющиеся в любых направлениях. На участках $(\pm a^{-1/2}, \pm \infty)$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm \infty)$ вещественных осей

плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 принимают комплексные значения, функции (2.2) выражают комплексные квазипродольные и квазипоперечные волны.

Таким образом, при условии (1.1) квазипродольные и квазипоперечные плоские волны определяются на вещественных осях плоскостей θ_1 и θ_2 соответственно. Поэтому в [1] при изучении поставленной задачи не было необходимости определения полученных решений на римановой поверхности.



Фиг. 1

Сложнее обстоит дело при условии (1.2). Внешний радикал функции λ_1 имеет четыре точки разветвления: $\theta = \pm a^{-1/2}$, $\theta = \pm d^{-1/2}$; внешний радикал функции λ_2 не имеет точек разветвления. Из точек разветвления (2.6) внутреннего радикала (2.3) — две вещественные, две мнимые, причем $\theta_1^0 > d^{-1/2}$. Функция λ_1 однозначна на плоскости θ_1 с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$, $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ и $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ вдоль вещественной оси и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Функция λ_2 однозначна на плоскости θ_2 с разрезами $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ и $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ вдоль вещественной оси и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 , склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ (фиг. 1).

На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1 и $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 принимают вещественные значения, функции (2.2) выражают вещественные волны. На участках $(\pm a^{-1/2}, \pm d^{-1/2})$ плоскости θ_1 функция λ_1 имеет мнимые значения, на участках $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют комплексные значения; функции (2.2) выражают комплексные волны.

Фиксируем функции λ_1 и λ_2 на плоскостях θ_1 и θ_2 так, чтобы они были положительными при $\theta = i\beta$, где β — достаточно малая положительная величина. Так как оси x и y совпадают с осями упругой симметрии среды, то распространение волн достаточно изучить при положительных вещественных значениях θ . На участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1^0 \quad (2.7)$$

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 — положительные, правые части вторых формул (2.5) монотонно возрастают от нуля до значений

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \theta_1^0 / \lambda_2(\theta_1^0) \quad (2.8)$$

Функции (2.2) выражают вещественные квазипродольные и квазипоперечные волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^0 \quad (\alpha_2^0 < 90^\circ) \quad (2.9)$$

Нормальные скорости волн, определенных на участках (2.7), есть непрерывные функции со значениями на границах участков

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = d^{1/2}, \quad b_2(\theta_1^0) < d^{1/2} \quad (2.10)$$

Характер изменения скоростей (2.5) зависит от значений величин [4, 6]:

$$N_1 = a - b - c, \quad N_2 = b - d - c, \quad N_3 = (a - d)(b - d) - c^2 \quad (2.11)$$

Так как $N_1 < 0$ при (1.2), то при $N_2 > 0$ скорость квазипродольной волны на первом участке (2.7) непрерывно убывает при $b > a$. Если $N_2 < 0$, скорость квазипродольной волны внутри этого участка имеет максимум. Скорость квазипоперечной волны внутри второго участка (2.7) имеет минимум, так как $N_3 < 0$ при (1.2).

Экстремальные точки и скорости и направления распространения волн с этими скоростями имеют значения

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= [(b-n)/(ab-n^2)]^{1/2}, \quad \theta_2^* = [(b+m)/(ab-m^2)]^{1/2} \\ b_1(\theta_1^*) &= [(ab-n^2)/(a+b-2n)]^{1/2}, \quad b_2(\theta_2^*) = [(ab-m^2)/(a+b+2m)]^{1/2} \\ \operatorname{tg} \alpha_1^* &= [(b-n)/(a-n)]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2^* = [(b+m)/(a+m)]^{1/2} \\ m &= c-d, \quad n = c+d\end{aligned}\quad (2.12)$$

При обходе точки разветвления θ_1° с верхнего берега разреза $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 римановой поверхности на нижний берег разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 внутренний радикал функции λ_2 изменяет знак с плюса на минус, функция λ_2 принимает значение λ_1 . Решения (2.2)–(2.5), выражающие при $k=2$ квазипоперечные волны, переходят в решения при $k=1$, представляющие собой вещественные плоские волны, определенные на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 . В точке разветвления θ_1° эти решения имеют одинаковые значения.

На участке

$$d^{-1/2} \leq \theta \leq \theta_1^\circ \quad (2.13)$$

нижнего берега разреза плоскости θ_1 правые части выражений (2.5) при $k=1$ монотонно убывают при значениях на границах

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha_1 &= \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \theta_1^\circ / \lambda_1(\theta_1^\circ) = \theta_1^\circ / \lambda_2(\theta_1^\circ) \\ b_1(d^{-1/2}) &= d^{1/2}, \quad b_1(\theta_1^\circ) = b_2(\theta_1^\circ)\end{aligned}$$

Следовательно, функции (2.2)–(2.5) при $k=1$ на участке (2.13) нижнего берега разреза плоскости θ_1 выражают вещественные квазипоперечные волны, распространяющиеся в направлениях

$$90^\circ \geq \alpha_1 \geq \alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_2(\theta_1^\circ) \quad (2.14)$$

с нормальными скоростями

$$d^{1/2} \geq b_1 \geq b_1(\theta_1^\circ) = b_2(\theta_1^\circ) \quad (2.15)$$

Графики изменения нормальных скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн от направления движения изображены на фиг. 2, 3 сплошными линиями.

Плоские продольные волны в жидкости и направления их нормальная скорость и направления распространения имеют выражения [1]:

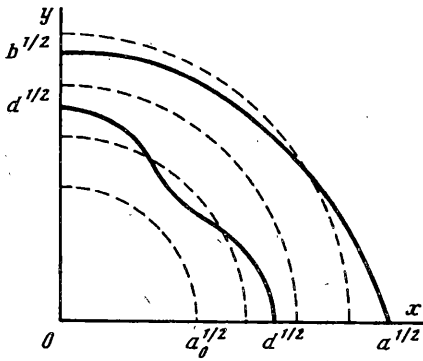
$$U_0 = U(t + \theta x + \lambda_0 y), \quad V_0 = V(t + \theta x + \lambda_0 y) \quad (2.16)$$

$$\lambda_0 = (U a_0 - \theta^2)^{1/2} \quad (2.17)$$

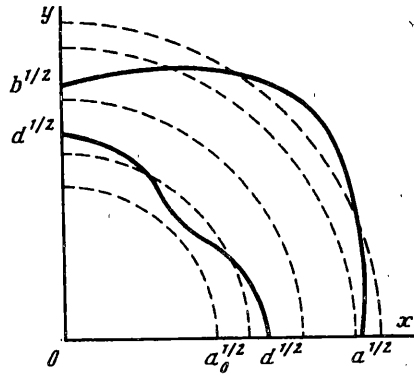
$$b_0 = a_0^{1/2} = (\mu_0 / \rho_0)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \theta / \lambda_0 \quad (2.18)$$

На участке

$$0 \leq \theta \leq \alpha_0^{-1/2} \quad (2.19)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

волны (2.16) вещественные с направлениями движения $0 \leq \alpha_0 \leq 90^\circ$.

В анизотропных средах направления распространения упругих волн определяются векторами потоков энергии, совпадающими с векторами лучевых скоростей и не совпадающими с векторами фазовых скоростей. В дальнейшем при решении поставленной задачи за падающие волны принимаются волны с векторами потоков энергии, направленными к границе раздела сред; за отраженные – волны с векторами потоков энергии, направленными от границы раздела [8].

3. Отражение и преломление квазипродольных волн. При падении из анизотропного полупространства $y < 0$ на границу раздела $y = 0$ с жидким сжимаемым полупространством квазипродольной волны

$$U_1 = U(t + \theta x - \lambda_1 y), \quad V_1 = V(t + \theta x - \lambda_1 y) \quad (3.1)$$

определенной в первом интервале (2.7), квазипродольная и квазипоперечная отраженные волны и продольная преломленная волна имеют выражения [1]:

$$\begin{aligned} U_{11} &= -(r_{11}/R)U(t + \theta x + \lambda_1 y) \\ V_{11} &= -(r_{11}/R)V(t + \theta x + \lambda_1 y) \\ U_{21} &= -(\lambda_2 r_{21}/\lambda_1 R)U(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ V_{21} &= (p_2 r_{21}/p_1 R)V(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ U_{01} &= (r_{01}/c\lambda_1 R)U(t + \theta x + \lambda_0 y) \\ V_{01} &= (\lambda_0 r_{01}/p_1 R)V(t + \theta x + \lambda_0 y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= c(ab)^{1/2}(\lambda_1 + \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} \{ \rho[(ab)^{1/2}(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} - \\ &- (c-d)^2 \theta^2 (d^{-1} - \theta^2)^{1/2} - ab(a^{-1} - \theta^2)(d^{-1} - \theta^2)^{1/2} [\lambda_0 - \rho_0(ab)^{1/2} \times \\ &\times (\lambda_1 - \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2}] \} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} r_{21} &= 2\rho\lambda_0\lambda_1(p_1 - c\lambda_2^2)[bp_1 - c(c-d)\theta^2] \\ r_{01} &= -2\rho ac\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(a^{-1} - \theta^2)[bp_1 - c(c-d)\theta^2] \\ R &= c(ab)^{1/2}(\lambda_1 - \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} \{ \rho[(ab)^{1/2}(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} + \\ &+ (c-d)^2 \theta^2 (d^{-1} - \theta^2)^{1/2} + ab(a^{-1} - \theta^2)(d^{-1} - \theta^2)^{1/2}] \lambda_0 + \\ &+ \rho_0(ab)^{1/2}(\lambda_1 + \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} \} \end{aligned}$$

Так как правые границы участков (2.7) на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности удовлетворяют условию $a^{-1/2} < \theta_1^\circ$, то квазипоперечная отраженная волна на первом участке (2.7) выражается функцией (2.2) при $k = 2$.

Нормальные скорости отраженных и преломленных волн и углы отражения и преломления определяются формулами (2.5) и (2.18) и удовлетворяют закону синусов

$$\sin \alpha_1/b_1 = \sin \alpha_{11}/b_{11} = \sin \alpha_{21}/b_{21} = \sin \alpha_{01}/b_{01} = \theta \quad (3.4)$$

На фиг. 2, 3 штриховые линии изображают возможные характерные значения нормальных скоростей продольных волн в жидкости.

Функции (3.2) при $a > a_0$ выражают вещественные волны при углах падения квазипродольной волны, определенных в первом интервале (2.7). При возрастании угла падения квазипродольной волны (3.1) углы отражения и преломления волн (3.1) непрерывно возрастают независимо от характера изменения нормальных скоростей от направления движения, т.к. на участках (2.7) и (2.19) правые части вторых выражений (2.5) и (2.18) непрерывно возрастают.

При $a_0 > a$ функции (3.2) выражают вещественные волны в интервале (2.19). На участке

$$a_0^{-1/2} < \theta < a^{-1/2} \quad (3.5)$$

первого интервала (2.7) углы падения превышают критический угол по отношению к преломленной продольной волне, отвечающий значению $\theta = a_0^{-1/2}$, функция (2.17) принимает мнимое значение. Решение задачи выражается с помощью функций комплексного переменного

$$U_1 = \text{Re}[U_1(t + \theta x - \lambda_1 y)], \quad V_1 = \text{Re}[V_1(t + \theta x - \lambda_1 y)] \quad (3.6)$$

$$U_{11} = \text{Re}[-(r_{11}^*/R^*)U_1(t + \theta x + \lambda_1 y)] \quad (3.7)$$

$$V_{11} = \text{Re}[-(r_{11}^*/R^*)V_1(t + \theta x + \lambda_1 y)]$$

$$U_{21} = \text{Re}[-(\lambda_2 r_{21}^*/\lambda_1 R^*)U_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$V_{21} = \text{Re}[(p_2 r_{21}^*/p_1 R^*)V_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$U_{01} = \text{Re}[(r_{01}^*/c\lambda_1 R^*)U_1(t + \theta x + i\lambda_0 y)]$$

$$V_{01} = \text{Re}[(i\lambda_0^* r_{01}^*/p_1 R^*)V_1(t + \theta x + i\lambda_0 y)]$$

Здесь U_1 и V_1 – регулярные функции в верхней полуплоскости комплексного переменного, r_{i1}^* и R^* определяются (3.3) при

$$\lambda_0 = -i\lambda_0^* = -i(\theta^2 - a_0^{-1})^{1/2} \quad (3.8)$$

Преломленная продольная волна – комплексная волна с мнимой фазовой скоростью в направлении оси y , остальные волны вещественные.

Процесс возбуждения комплексных вторичных волн зависит от значений a , d , a_0 . Характер изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропной среде от направления движения оказывает влияние на качественную картину процесса отражения и преломления, вызывая многообразие комбинаций в распределении скоростей первичных и вторичных волн и углов падения, отражения и преломления в зависимости от угла падения, изучение которых сводится к рассмотрению трех основных случаев.

Случай 1. При выполнении условия

$$a > b > a_0(a^{-1/2} < d^{-1/2} < a_0^{-1/2}) \quad (3.9)$$

решение задачи выражается функциями (3.1) и (3.2), определенными в первом интервале (2.7).

Если $\min b_2 = b_2(\theta_2^*) > a_0^{1/2}$ (фиг. 2, 3), то из (3.4) следует, что при любых углах падения, определенных в первом интервале (2.7), скорости первичных и вторичных волн и углы падения, отражения и преломления удовлетворяют условиям:

$$b_1 = b_{11} > b_{21} > b_{01}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} > \alpha_{01} \quad (3.10)$$

При $\min b_2 = b_2(\theta_2^*) < a_0^{1/2} < \max b_2 = d^{1/2}$ скорости квазипоперечной и продольной волн равны в точках θ_{21} и θ_{22} , определяемых уравнением $b_2(\theta) = a_0^{1/2}$, причем

$$0 < \theta_{21} < \theta_2^*, \quad \theta_2^* < \theta_{22} < \theta_1^0 \quad (a^{-1/2} < \theta_1^0)$$

Если точки θ_{21} и θ_{22} принадлежат первому интервалу (2.7), то из (3.4) и фиг. 2, 3 следует, что для волн (3.1) и (3.2) на участках $(0, \theta_{21})$ и $(\theta_{22}, a^{-1/2})$ выполняются условия (3.10), на участке $(\theta_{21}, \theta_{22})$ – условия

$$b_1 = b_{11} > b_{01} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{01} > \alpha_{21} \quad (3.11)$$

В точках θ_{21} и θ_{22} имеем $\alpha_{21} = \alpha_{01}$ и $\alpha_{22} = \alpha_{01}$.

Если точка $\theta = a^{-1/2}$ находится на участках $(0, \theta_{21})$ или $(\theta_{21}, \theta_{22})$, картина очевидна: в первом случае, на участке $(0, a^{-1/2})$ выполняются условия (3.10); во втором, на участках $(0, \theta_{21})$ и $(\theta_{21}, a^{-1/2})$ – условия (3.10) и (3.11) соответственно.

Случай 2. Выполняется условие

$$a > a_0 > d \quad (a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (3.12)$$

решение задачи выражается функциями (3.1) и (3.2).

При $\min b_1 > a_0^{1/2} > \max b_2 = d^{1/2}$ скорости и направления волн (3.1) и (3.2) удовлетворяют условиям (3.11).

Если при $b < a$ (фиг. 2) имеет место условие $\max b_1 = a^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2}$, скорости квазипродольной и продольной волн равны в точке θ_{11} , определяемой уравнением $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$. В этом случае скорости и направления распространения волн на участке $(0, \theta_{11})$ удовлетворяют условиям

$$b_{01} > b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_{01} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (3.13)$$

на участке $(\theta_{11}, a^{-1/2})$ – условиям (3.11). В точке θ_{11} имеем $\alpha_{01} = \alpha_1 = \alpha_{11}$.

Случай 3. Имеет место условие

$$a_0 > a > d \quad (a_0^{-1/2} < a^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (3.14)$$

решение задачи на участке (2.19) выражается вещественными функциями (3.1) и (3.2), на участке (3.5) – функциями комплексного переменного (3.6) и (3.7).

При выполнении одного из условий

$$\max b_1 = b^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (3.15)$$

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > b^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (3.16)$$

соответствующих фиг. 2, 3 при $b > a$, скорости квазипродольной и продольной волн равны в точке θ_{11} , причем $0 < \theta_{11} < a^{-1/2}$.

При $\theta_{11} < a_0^{-1/2}$ для первичных и вторичных волн в интервале (2.19) выполняются условия: на участке $(0, \theta_{11})$ – условия (3.11), на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (3.13). Если же $\theta_{11} > a_0^{-1/2}$, то в интервале (2.19) выполняются условия (3.11).

Если имеет место одно из условий

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > a_0^{1/2} > b^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (3.17)$$

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > a_0^{1/2} > a^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2} \quad (3.18)$$

отвечающих фиг. 3 соответственно при $b > a$ и $a > b$, то скорости квазипродольной и продольной волн равны в точках θ_{11} и θ_{12} , определяемых уравнением $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$, причем $0 < \theta_{11} < \theta_1^*$, $\theta_1^* < \theta_{12} < a^{-1/2}$.

Если точки θ_{11} и θ_{12} находятся в интервале (2.19), то в этом интервале для первичных и вторичных волн выполняются условия: на участках $(0, \theta_{11})$ и $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия (3.13); на участке $(\theta_{11}, \theta_{12})$ – условия (3.11). Если в интервале (2.19) находится одна точка θ_{11} , то в интервале (2.19) выполняются условия: на участке $(0, \theta_{11})$ – условия (3.13); на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (3.11). Если же точки θ_{11} и θ_{12} находятся за пределами интервала (2.19), то в этом интервале выполняются условия (3.13).

При $a_0^{1/2} > \max b_1$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия (3.13).

При выполнении условия (3.14) на участке $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$ во всех случаях выполняются условия

$$b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (3.19)$$

Скорости и углы преломления продольной волны имеют комплексные значения.

4. Отражение и преломление квазипоперечной волны. При падении из анизотропного полупространства на границу раздела с жидкостью квазипоперечной волны

$$U_2 = U(t + \theta x - \lambda_2 y), \quad V_2 = V(t + \theta x - \lambda_2 y) \quad (4.1)$$

определенной во втором интервале (2.7) и имеющей нормальную скорость и угол падения, выражаемые (2.5) при $k = 2$, отраженные квазипродольная и квазипоперечная волны и преломленная продольная волна выражаются функциями [1]:

$$\begin{aligned} U_{12} &= -(\lambda_1 r_{12} / \lambda_2 R) U(t + \theta x + \lambda_1 y) \\ V_{12} &= (p_1 r_{12} / p_2 R) V(t + \theta x + \lambda_1 y) \\ U_{22} &= -(r_{22} / R) U(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ V_{22} &= (r_{22} / R) V(t + \theta x + \lambda_2 y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} U_{02} &= (r_{02} / c \lambda_2 R) U(t + \theta x - \lambda_0 y) \\ V_{02} &= -(\lambda_0 r_{02} / p_2 R) V(t + \theta x - \lambda_0 y) \\ r_{12} &= 2\rho \lambda_0 \lambda_2 (p_2 - c \lambda_2^2) [b p_2 - c(c-d)\theta^2] \\ r_{22} &= -c(ab)^{1/2} (\lambda_1 + \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} \{ \rho [(ab)^{1/2} (a^{-1} - \theta^2)^{1/2} - \\ & - (c-d)^2 \theta^2 (d^{-1} - \theta^2)^{1/2} - ab(a^{-1} - \theta^2)(d^{-1} - \theta^2)^{1/2}] \lambda_0 + \\ & + \rho_0 (ab)^{1/2} (\lambda_1 - \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$r_{02} = -2\rho a c \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(a^{-1} - \theta^2) [b p_2 - c(c-d)\theta^2]$$

Функция R имеет значение (3.3). Нормальные скорости, углы падения, отражения и преломления определяются формулами (2.5) и (2.18). Закон синусов имеет выражение

$$\sin \alpha_2 / b_2 = \sin \alpha_{22} / b_{22} = \sin \alpha_{12} / b_{12} = \sin \alpha_{02} / b_{02} = \theta \quad (4.4)$$

Изучим полученные решения задачи в зависимости от угла падения квазипоперечной волны (4.1) при различных соотношениях постоянных a, d, a_0 с учетом характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропной среде от направления движения (фиг. 2, 3).

Случай 1. Если выполняется условие (3.9), то при углах падения квазипоперечной волны (4.1), определенных на участке $(0, a^{-1/2})$ второго интервала (2.7), решение задачи выражается функциями (4.2), представляющими собой вещественные волны, для которых при

$$\min b_2 = b_2(\theta_2^*) > a_0^{1/2}$$

выполняются условия

$$b_{12} > b_2 = b_{22} > b_{02}, \quad \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} > \alpha_{02} \quad (4.5)$$

Если

$$\min b_2 = b_2(\theta_2^*) < a_0^{1/2} < \max b_2 = d^{1/2}$$

скорости квазипоперечной и продольной волн равны в точках θ_{21} и θ_{22} на участках

$$0 < \theta_{21} < \theta_2^*, \quad \theta_2^* < \theta_{22} < \theta_1^0$$

Когда точки θ_{21} и θ_{22} принадлежат участку $(0, a^{-1/2})$, для волн (4.1) и (4.2) выполняются условия: на участках $(0, \theta_{21})$ и $(\theta_{22}, a^{-1/2})$ – условия (4.5); на участке $(\theta_{21}, \theta_{22})$ – условия

$$b_{12} > b_{02} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{11} > \alpha_{02} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.6)$$

Если точка $\theta = a^{-1/2}$ находится на участках $(0, \theta_{21})$ или $(\theta_{21}, \theta_{22})$, для волн (4.1) и (4.2) выполняются условия: в первом случае, на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (4.5); во втором, на участках $(0, \theta_{21})$ и $(\theta_{21}, a^{-1/2})$ – условия (4.5) и (4.6). На участке

$$a^{-1/2} < \theta < d^{-1/2} \quad (d^{-1/2} < \theta_1^0) \quad (4.7)$$

второго интервала (2.7) углы падения квазипоперечной волны (4.1) превышают критический угол падения по отношению к отраженной квазипродольной волне, функция λ_1 принимает мнимые значения.

Решение задачи выражается функциями комплексного переменного

$$U_2 = \text{Re}[U_1(t + \theta x - \lambda_2 y)], \quad V_2 = \text{Re}[V_1(t + \theta x - \lambda_2 y)] \quad (4.8)$$

$$U_{12} = \text{Re}[(i\lambda_1^* r_{12}^* / \lambda_2 R^*) U_1(t + \theta x - i\lambda_1^* y)]$$

$$V_{12} = \text{Re}[(p_1 r_{12}^* / p_2 R^*) V_1(t + \theta x - i\lambda_1^* y)] \quad (4.9)$$

$$U_{22} = \text{Re}[-(r_{22}^* / R^*) U_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$V_{22} = \text{Re}[(r_{22}^* / R^*) V_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$U_{02} = \text{Re}[(r_{02}^* / c\lambda_2 R^*) U_1(t + \theta x - \lambda_0 y)]$$

$$V_{02} = \text{Re}[-(\lambda_0 r_{02}^* / p_2 R^*) V_1(t + \theta x - \lambda_0 y)]$$

Коэффициенты r_{i2}^* и R^* определяются выражениями (4.3) при

$$\lambda_1 = -i\lambda_1^*, \quad (a^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - a^{-1})^{1/2} \quad (4.10)$$

Отраженная квазипродольная волна представляет собой комплексную волну с мнимой фазовой скоростью вдоль оси y , остальные волны вещественные.

При $\min b_2 = b_2(\theta_2^*) > a_0^{1/2}$ на участке (4.7) для вещественных волн (4.8) и (4.9) выполняются условия

$$b_2 = b_{22} > b_{02}, \quad \alpha_2 = \alpha_{22} > \alpha_{02} \quad (4.11)$$

При условии $\max b_2 = d^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_2 = b_2(\theta_2^*)$, если точка $\theta = a^{-1/2}$ принадлежит участку $(0, \theta_{21})$, имеем: на участках $(a^{-1/2}, \theta_{21})$ и $(\theta_{22}, d^{-1/2})$ – условия (4.11); на участке $(\theta_{21}, \theta_{22})$ – условия

$$b_{02} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{02} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.12)$$

Если точка $\theta = a^{-1/2}$ принадлежит участкам $(\theta_{21}, \theta_{22})$ или $(\theta_{22}, d^{-1/2})$, в первом случае, на участках $(a^{-1/2}, \theta_{22})$ и $(\theta_{22}, d^{-1/2})$ выполняются условия (4.12) и (4.11); во втором, на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ имеют место условия (4.11).

При переходе на участки

$$d^{-1/2} \leq \theta \leq \theta_1^{\circ} \quad (4.13)$$

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 1) функции (4.9) принимают вещественные значения. При $a_0^{-1/2} > \theta_1^{\circ}$ падающая квазипоперечная волна (4.1) возбуждает отраженные и преломленные волны, выражаемые вещественными функциями

$$\begin{aligned} U_{12} &= (\lambda_1 r_{12}^{\circ} / \lambda_2 R^{\circ}) U(t + \theta x - \lambda_1 y) \\ V_{12} &= (p_1 r_{12}^{\circ} / p_2 R^{\circ}) V(t + \theta x - \lambda_1 y) \\ U_{22} &= -(r_{22}^{\circ} / R^{\circ}) U(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ V_{22} &= (r_{22}^{\circ} / R^{\circ}) V(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ U_{02} &= (r_{02}^{\circ} / c \lambda_2 R^{\circ}) U(t + \theta x - \lambda_0 y) \\ V_{02} &= -(\lambda_0 r_{02}^{\circ} / p_2 R^{\circ}) V(t + \theta x - \lambda_0 y) \end{aligned} \quad (4.14)$$

где r_{i2}° и R° определяются выражениями (4.3) и (3.3) при замене λ_1 на $-\lambda_1$ и

$$(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - a^{-1})^{1/2}, \quad (d^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - d^{-1})^{1/2}$$

и имеют вещественные значения.

Функции U_{k2} и V_{k2} ($k = 1, 2$) выражают вещественные отраженные квазипоперечные волны, имеющие разные нормальные скорости и углы отражения. Полученное решение на участке (4.3) удовлетворяет принципу излучения.

Нормальные скорости и углы входа и выхода волн определяются формулами (2.5) и (2.18), закон синусов (4.4) выполняется.

На участке (4.13) скорости и углы входа и выхода падающей волны и отраженной при $k = 2$ непрерывно возрастают и имеют значения на границах участка

$$b_2(d^{-1/2}) = b_{22}(d^{-1/2}) \leq b_2 = b_{22} \leq b_2(\theta_1^{\circ}) = b_{22}(\theta_1^{\circ})$$

$$\alpha_2(d^{-1/2}) = \alpha_{22}(d^{-1/2}) \leq \alpha_2 = \alpha_{22} \leq \alpha_2(\theta_1^\circ) = \alpha_{22}(\theta_1^\circ) \quad (4.15)$$

Скорость и угол отражения квазипоперечной волны при $k = 1$ непрерывно убывают, имея граничные значения

$$\begin{aligned} b_{12}(d^{-1/2}) &= d^{1/2} \geq b_{12} \geq b_{12}(\theta_1^\circ) \\ \alpha_{12}(d^{-1/2}) &= 90^\circ \geq \alpha_{12} \geq \alpha_{12}(\theta_1^\circ) \end{aligned} \quad (4.16)$$

причем в точке разветвления θ_1° :

$$b_2(\theta_1^\circ) = b_{12}(\theta_1^\circ) = b_{22}(\theta_1^\circ), \quad \alpha_2(\theta_1^\circ) = \alpha_{12}(\theta_1^\circ) = \alpha_{22}(\theta_1^\circ) \quad (4.17)$$

Из (4.15)–(4.17) следует, что при $b_2(d^{-1/2}) > a_0^{1/2}$ для волн (4.1) и (4.14) на участке (4.13) выполняются условия (4.5). При условии

$$b_2(d^{-1/2}) < a_0^{1/2} < b_2(\theta_1^\circ) \quad (4.18)$$

точка θ_{22} находится на участке (4.13). В этом случае выполняются условия: на участке $(d^{-1/2}, \theta_{22})$ – условия (4.6); на участке $(\theta_{22}, \theta_1^\circ)$ – условия (4.5).

При условии

$$d^{-1/2} < a_0^{-1/2} < \theta_1^\circ \quad (4.19)$$

решения задачи выражаются вещественными функциями (4.1) и (4.14) на отрезке

$$d^{-1/2} \leq \theta \leq a_0^{-1/2} \quad (4.20)$$

участка (4.13). Если θ_{22} находится на отрезке (4.20), для волн (4.1) и (4.14) выполняются условия: на участке $(d^{-1/2}, \theta_{22})$ – условия (4.6); на участке $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$ – условия (4.5). В противном случае, на участке (4.20) выполняются условия (4.6).

На участке $a_0^{-1/2} < \theta < \theta_1^\circ$ углы падения квазипоперечной волны (4.1) превышают критический угол по отношению к преломленной продольной волне, функция (2.17) принимает мнимые значения.

Решения задачи выражаются функциями комплексного переменного

$$U_2 = \text{Re}[U_1(t + \theta x - \lambda_2 y)], \quad V_2 = \text{Re}[V_1(t + \theta x - \lambda_2 y)] \quad (4.21)$$

$$U_{12} = \text{Re}[(\lambda_1 r_{12}^* / \lambda_2 R^*) U_1(t + \theta x - \lambda_1 y)]$$

$$V_{12} = \text{Re}[(p_1 r_{12}^* / p_2 R^*) V_1(t + \theta x - \lambda_1 y)]$$

$$U_{22} = \text{Re}[-(r_{22}^* / R^*) U_1(t + \theta x + \lambda_2 y)] \quad (4.22)$$

$$V_{22} = \text{Re}[(r_{22}^* / R^*) V_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$U_{02} = \text{Re}[(r_{02}^* / c \lambda_2 R^*) U_1(t + \theta x + i \lambda_0 y)]$$

$$V_{02} = \text{Re}[(i \lambda_0 r_{02}^* / p_2 R^*) V_1(t + \theta x + i \lambda_0 y)]$$

Коэффициенты r_{12}^* и R^* определяются выражениями r_{12}° и R° при

$$\lambda_0 = -i \lambda_0^*, \quad (a_0^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - a_0^{-1})^{1/2} \quad (4.23)$$

При (4.19) на участке $a_0^{-1/2} < \theta < \theta_1^\circ$ преломленная продольная волна – комплексная,

отраженные квазипоперечные волны U_{k2}, V_{k2} ($k = 1, 2$) – вещественные и удовлетворяют условиям

$$b_{12} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.24)$$

Выше изучалась задача отражения и преломления квазипоперечных волн при углах падения $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2(\theta_1^\circ) < 90^\circ$, определенных в интервале $(0, \theta_1^\circ)$ верхнего берега разреза плоскости θ_2 .

Квазипоперечные волны с углами падения $\alpha_2(\theta_1^\circ) = \alpha_1(\theta_1^\circ) \leq \alpha_1 \leq 90^\circ$ выражаются функциями

$$U_1 = U(t + \theta x + \lambda_1 y), \quad V_1 = V(t + \theta x + \lambda_1 y) \quad (4.25)$$

определенными на участке

$$\theta_1^\circ \geq \theta \geq d^{-1/2} \quad (4.26)$$

нижнего берега разреза плоскости θ_1 римановой поверхности (фиг. 1).

При $a_0^{-1/2} > \theta_1^\circ$ на участке (4.26) отраженные и преломленные волны имеют вещественные выражения

$$\begin{aligned} U_{11} &= -(r_{11}^\circ / R^\circ)U(t + \theta x - \lambda_1 y) \\ V_{11} &= (r_{11}^\circ / R^\circ)V(t + \theta x - \lambda_1 y) \\ U_{21} &= -(\lambda_2 r_{21}^\circ / \lambda_1 R^\circ)U(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ V_{21} &= (p_2 r_{21}^\circ / p_1 R^\circ)V(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ U_{01} &= -(r_{01}^\circ / c \lambda_1 R^\circ)U(t + \theta x - \lambda_0 y) \\ V_{01} &= -(\lambda_0 r_{01}^\circ / p_1 R^\circ)V(t + \theta x - \lambda_0 y) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Коэффициенты r_{i1}° и R° определяются (3.3) при замене λ_1 на $-\lambda_1$. Функции U_{k1}, V_{k1} ($k = 1, 2$) выражают отраженные квазипоперечные волны. Скорости и направления движения волн определяются (2.5) и (2.18), закон синусов (3.4) и принцип излучения выполняются.

На участке (4.26) скорости и углы входа и выхода квазипоперечных волн, падающей и отраженной при $k = 1$, при уменьшении θ непрерывно возрастают в пределах

$$\begin{aligned} b_1(\theta_1^\circ) &= b_{11}(\theta_1^\circ) \leq b_1 = b_{11} \leq b_1(d^{-1/2}) = b_{11}(d^{-1/2}) = d^{1/2} \\ \alpha_1(\theta_1^\circ) &= \alpha_{11}(\theta_1^\circ) \leq \alpha_1 = \alpha_{11} \leq \alpha_1(d^{-1/2}) = \alpha_{11}(d^{-1/2}) = 90^\circ \end{aligned} \quad (4.28)$$

Скорость и угол отражения квазипоперечной волны при $k = 2$ непрерывно уменьшаются в пределах

$$b_{21}(\theta_1^\circ) \geq b_{21} \geq b_{21}(d^{-1/2}), \quad \alpha_{21}(\theta_1^\circ) \geq \alpha_{21} \geq \alpha_{21}(d^{-1/2}) \quad (4.29)$$

причем

$$b_1(\theta_1^\circ) = b_{11}(\theta_1^\circ) = b_{21}(\theta_1^\circ), \quad \alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_{11}(\theta_1^\circ) = \alpha_{21}(\theta_1^\circ) \quad (4.30)$$

Из (4.28)–(4.30) следует, что на участке (4.26) для волн (4.25) и (4.27) при $b_2 = b_{21}(d^{-1/2}) > a_0^{1/2}$ выполняются условия

$$b_1 = b_{11} > b_{21} > b_{01}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} > \alpha_{01} \quad (4.31)$$

При (4.18) выполняются условия: на участке $(\theta_1^0, \theta_{22})$ – условия (4.31); на участке $(\theta_{22}, d^{-1/2})$ – условия

$$b_1 = b_{11} > b_{01} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{01} > \alpha_{21} \quad (4.32)$$

При условии (4.19) решения задачи выражаются вещественными функциями (4.25) и (4.27) в интервале (4.20) участка (4.26). Если точка θ_{22} принадлежит участку (4.20), для волн (4.25) и (4.27) выполняются условия: на участке $(d^{-1/2}, \theta_{22})$ – условия (4.32); на участке $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$ – условия (4.31). В противном случае на участке $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ выполняются условия (4.32).

На участке $a_0^{-1/2} < \theta < \theta_1^0$ функция (2.17) принимает мнимые значения, решение задачи выражается функциями комплексного переменного

$$U_1 = \text{Re}[U_1(t + \theta x + \lambda_1 y)], \quad V_1 = \text{Re}[V_1(t + \theta x + \lambda_1 y)] \quad (4.33)$$

$$U_{11} = \text{Re}[-(r_{11}^* / R^*)U_1(t + \theta x - \lambda_1 y)]$$

$$V_{11} = \text{Re}[(r_{11}^* / R^*)V_1(t + \theta x - \lambda_1 y)]$$

$$U_{21} = \text{Re}[(\lambda_2 r_{21}^* / \lambda_1 R^*)U_1(t + \theta x + \lambda_2 y)] \quad (4.34)$$

$$V_{21} = \text{Re}[(p_2 r_{21}^* / p_1 R^*)V_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$U_{01} = \text{Re}[(-r_{01}^* / c \lambda_1 R^*)U_1(t + \theta x + i \lambda_0^* y)]$$

$$V_{01} = \text{Re}[i \lambda_0^* r_{01}^* / p_2 R^*)V_1(t + \theta x + i \lambda_0^* y)]$$

Коэффициенты r_{kl}^* и R^* определяются (3.3) при (4.23) и замене λ_1 на $-\lambda_1$. Отраженные квазипоперечные волны U_{kl}, V_{kl} ($k = 1, 2$) удовлетворяют условиям

$$b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (4.35)$$

Случай 2. Если выполняется условие (3.12), при углах падения квазипоперечной волны (4.1), определенных на участке $(0, a^{-1/2})$ второго интервала (2.7), вторичные волны выражаются вещественными функциями (4.2), для которых при $b > a$ выполняются условия (4.6). При $b < a$, если $a^{1/2} > a_0^{1/2} > b^{1/2}$, имеем: на участке $(0, \theta_{11})$ – условия

$$b_{02} > b_{12} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{02} > \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.36)$$

На участке $(\theta_{11}, a^{-1/2})$ – условия (4.6), где θ_{11} определяется уравнением $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$.

При углах падения волны (4.1), определенных на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$, решение задачи выражается функциями комплексного переменного (4.8) и (4.9). На этом участке для вещественных волн выполняются условия (4.12).

Значениям θ на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ второго интервала (2.7) отвечают углы падения волны (4.8), превышающие критический угол и по отношению к преломленной волне; вторичные волны принимают выражения

$$U_{12} = \text{Re}[(i \lambda_1^* r_{12}^* / \lambda_2 R^*)U_1(t + \theta x - i \lambda_1^* y)]$$

$$V_{12} = \text{Re}[(p_1 r_{12}^* / p_2 R^*)V_1(t + \theta x - i \lambda_1^* y)]$$

$$U_{22} = \text{Re}[-(r_{22}^* / R^*)U_1(t + \theta x + \lambda_2 y)] \quad (4.37)$$

$$V_{22} = \text{Re}[(r_{22}^* / R^*) V_1(t + \theta x + \lambda_2 y)]$$

$$U_{02} = \text{Re}[(r_{02}^* / c \lambda_2 R^*) U_1(t + \theta x + i \lambda_0 y)]$$

$$V_{02} = \text{Re}[(i \lambda_0 r_{02}^* / p_2 R^*) V_1(t + \theta x + i \lambda_0 y)]$$

Коэффициенты r_{i2}^* и R^* определяются выражениями (4.3) при (4.10) и (4.23). Падающая и отраженная квазипоперечные волны – вещественные волны, для которых $b_2 = b_{22}$, $\alpha_2 = \alpha_{22}$.

Квазипоперечная волна (4.8) при углах падения, определенных на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ второго интервала (2.7), возбуждает две вещественных отраженных квазипоперечных волны U_{k2}, V_{k2} ($k = 1, 2$) и комплексную преломленную продольную волну, которые выражаются функциями (4.22) и удовлетворяют условиям (4.24).

Квазипоперечная волна (4.33), определенная на нижнем берегу разреза $(\theta_1^\circ, d^{-1/2})$ плоскости θ_1 римановой поверхности, возбуждает так же две вещественных отраженных квазипоперечных волны и комплексную преломленную продольную волну, выражаемых функциями (4.34) и удовлетворяющих условиям (4.35).

Случай 3. Имеет место условие (3.14). На участке $(0, a_0^{-1/2})$ второго интервала (2.7) решение задачи выражается вещественными функциями (4.1) и (4.2).

Если выполняется одно из условий (3.15) или (3.16), отвечающих соответственно фиг. 2, 3 при $b > a$, для волн (4.1) и (4.2) при $\theta_{11} < a_0^{-1/2}$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \theta_{11})$ – условия (4.6); на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия

$$b_{02} > b_{12} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{02} > \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.38)$$

При $\theta_{11} > a_0^{-1/2}$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия (4.6).

Если имеет место одно из условий (3.17) или (3.18), отвечающих фиг. 3, то в интервале $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участках $(0, \theta_{11})$ и $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия (4.38); на участке $(\theta_{11}, \theta_{12})$ – условия (4.6), где θ_{11} и θ_{12} определяются уравнением $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$.

Если в интервале $(0, a_0^{-1/2})$ находится одна точка θ_{11} , то в этом интервале выполняются условия: на участке $(0, \theta_{11})$ – условия (4.38); на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (4.6).

Если же точки θ_{11} и θ_{12} находятся за пределами интервала $(0, a_0^{-1/2})$, то в этом интервале выполняются условия (4.38). Эти же условия выполняются, если $a_0^{1/2} > \max b_1$.

На участке $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$ второго интервала (2.7) решения задачи выражаются функциями (4.21) и (4.22), для которых выполняются условия (4.24).

При углах падения квазипоперечной волны (4.21), определенной на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$, вторичные волны выражаются функциями (4.37), для которых $b_2 = b_{22}$, $\alpha_2 = \alpha_{22}$.

Квазипоперечные волны (4.22) и (4.33), определенные на участках $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ верхнего берега разреза $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 и нижнего берега разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 римановой поверхности (фиг. 1), возбуждают по две вещественных отраженных квазипоперечных волны и по одной комплексной преломленной волне, выражаемых функциями (4.22) и (4.34) и удовлетворяющих условиям (4.24) и (4.35).

Поставленная задача для анизотропных сред, удовлетворяющих условию (1.2), по-

лучила полное изучение. Полученные решения принципиально отличаются от случая (1.1), рассмотренного в работе [1]. Установлено, что квазипоперечные волны, распространяющиеся по направлениям $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2(\theta_1^\circ)$, выражаются функциями (2.2) при $k = 2$, определенными на участке $(0, \theta_1^\circ)$ верхнего берега разреза $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 ; квазипоперечные волны, распространяющиеся по направлениям $\alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_2(\theta_1^\circ) \leq \alpha_2 \leq 90^\circ$, выражаются функциями (2.2) при $k = 1$, определенными на участке $(\theta_1^\circ, d^{-1/2})$ нижнего берега разреза $(+\theta_1^\circ, +d^{-1/2})$ плоскости θ_1 (фиг. 1). Квазипоперечные волны, определенные на участках $(\theta_1^\circ, d^{-1/2})$ указанных разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 , при падении на границу раздела сред возбуждают по две вещественных квазипоперечных волны с разными скоростями и углами отражения. Квазипродольные отраженные волны в этих случаях не возбуждаются.

Эта особенность, очевидно, имеет прямую связь с вопросом существования остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн в безграничных анизотропных средах от точечного источника, так как условие (1.2) есть условие существования остроугольных кромок у оси упругой симметрии x [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов И.О. Распространение плоских волн в анизотропной среде, контактирующей с жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 144–154.
2. Свекло В.А. Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. С. 28–71.
3. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885–896.
4. Осипов И.О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
5. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 3. С. 391–396.
6. Осипов И.О. О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
7. Осипов И.О. Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.
8. Петрешень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. С. 118–130.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
8.VI.1995