МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 534.13

 А.В. СТЕПАНОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. Ч. 2. ГАШЕНИЕ В ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕСКОЛЬКО СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

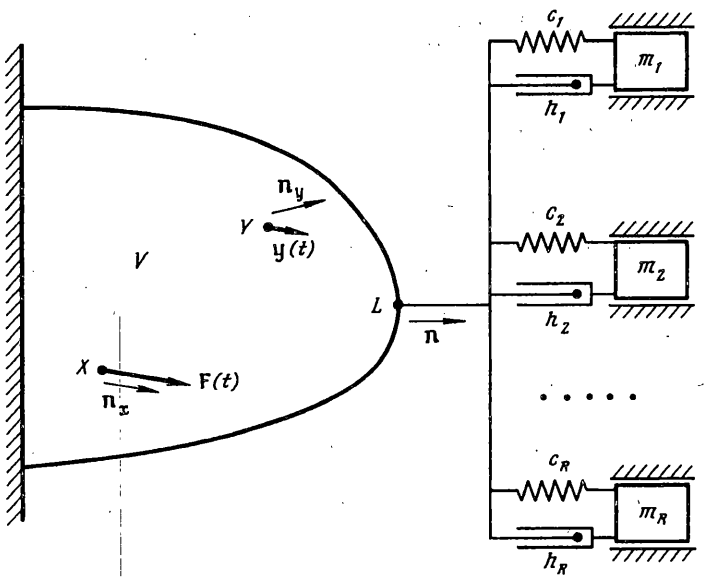
Публикуемая работа является продолжением работы автора [1], в которой речь идет об ограничении одного или нескольких (здесь и далее – обобщенных) заданных коэффициентов передачи гармонической силы для упругой системы общего вида, к которой присоединен линейный упруговязкий гаситель колебаний [2–4]. Требовалось найти параметры гасителя (массу, коэффициенты жесткости и вязкости) так, чтобы все рассматриваемые коэффициенты передачи в окрестности наименьшей собственной частоты упругой системы были не больше заданной величины, а масса гасителя была минимально возможной. Ниже показано, что, если необходимо ограничивать коэффициенты передачи в области, содержащей несколько собственных частот, то эффективность такого простейшего гасителя резко снижается (при малой его массе), и дается способ решения задачи о минимизации суммарной массы гасителя с несколькими степенями свободы, при помощи которого возможно ограничение в такой области одного или нескольких заданных коэффициентов передачи заданной величиной.

Пусть $M < \infty$ – масса упругой системы общего вида, V – занимаемый ею объем, N – число степеней свободы (возможно, $N = \infty$), $\Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_N$ – собственные частоты, $\mathbf{u}_j(X)$ (X – произвольная точка объема V; $j = 1, 2, \ldots, N$) – нормированные на массу M собственные функции. Далее все векторы предполагаются столбцами; буквой ( ) обозначается транспозиция. Пусть к точке L упругой системы присоединены пружинами жесткостей $c_1, c_2, \ldots, c_R$ и демпферами с коэффициентами вязкого трения $h_1, h_2, \ldots, h_R R$ точечных масс $m_1, m_2, \ldots, m_R$, перемещающихся в направлении одного и того же единичного вектора $\mathbf{n}$. Коэффициент передачи является функцией частоты внешней силы Ω, точки ее приложения X, орта направления действия этой силы $\mathbf{n}_x$, точки Y, перемещение которой рассматривается, и орта $\mathbf{n}_y$, в проекции на которой рассматривается это перемещение (фигура). Введем по аналогии с [1] безразмерные параметры:

$$\theta_j = m_j M^{-1}, \quad \sigma_j = c_j (m_j \Omega_1^2)^{-1}$$

$$z_j = h_j (m_j \Omega_1)^{-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, R)$$

$$\upsilon_j = \mathbf{n}^T \mathbf{u}_j(L), \quad \omega_j = \Omega_j \Omega_1^{-1}$$



$$v_{jx} = \mathbf{n}_x^T \mathbf{u}_j(X), \quad v_{jy} = \mathbf{n}_y^T \mathbf{u}_j(Y)$$

$$w_j = v_{jx} v_{jy} \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \quad \nu = \Omega\Omega_1^{-1}$$

Если X, Y, $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ и амплитуда внешней силы F_0 (вообще говоря, размерная) известным непрерывным образом зависят от ν, то коэффициент передачи (умноженный на $M\Omega_1^2$), будет равен [1]:

$$\rho(\nu) = \left|[q(\nu)P_*(\nu) + p(\nu)Q_*(\nu)][q(\nu)Q(\nu) + p(\nu)P(\nu)]^{-1}\right|$$

$$Q(\nu) = \prod_{j=1}^{N}[1 - (\omega_j^{-1}\nu)^2], \quad P(\nu) = Q(\nu)\sum_{j=1}^{N} v_j^2(\omega_j^2 - \nu^2)^{-1}$$

$$P_*(\nu) = F_0(\nu)Q(\nu)\sum_{j=1}^{N} w_j(\omega_j^2 - \nu^2)^{-1}, \quad q(\nu) = \prod_{j=1}^{R}(-\nu^2 + iz_j\nu + \sigma_j)$$

$$p(\nu) = -\nu^2 q(\nu)\sum_{j=1}^{R}\theta_j(iz_j) + \sigma_j)(-\nu^2 + iz_j\nu + \sigma_j)^{-1}$$

$$Q_*(\nu) = F_0(\nu)Q(\nu)$$

$$\Sigma\begin{vmatrix} v_j & v_{jx} \\ v_k & v_{kx} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v_j & v_k \\ v_{jy} & v_{ky} \end{vmatrix}[\omega_j^2 - \nu^2)(\omega_k^2 - \nu^2)]^{-1}$$

где суммирование распространяется на все $1 \leqslant j < k \leqslant N$; v_j, v_k, w_j, v_{jx}, v_{jy}, v_{kx}, v_{ky} предполагаются известными функциями ν:

Задача оптимизации параметров гасителя может быть поставлена следующим образом: в зависимости от параметра α найти количество гасителей и их параметры так, чтобы в некоторой области, содержащей R первых собственных частот упругой системы (R предполагается известным), $\rho(\nu) \leqslant \alpha$, а суммарная масса гасителей была минимальной.

Если $R = 1$, а α велико, то параметры гасителя близки к определяемым формулами (3) и (4), ρ имеет при двух значениях ν, близких к 1, гладкие максимумы, равные α, а вблизи каждой из последующих безразмерных собственных частот – по одному такому максимуму, пропорциональному α^3 (коэффициент пропорциональности зависит от вида функций $P(\nu)$, $Q(\nu)$, $P_*(\nu)$ и $Q_*(\nu)$ и от номера собственной частоты). Таким образом, при $R > 1$ одного простейшего гасителя оказывается недостаточно для гашения колебаний в области, содержащей несколько собственных частот. Можно показать, что в этом случае масса гасителя должна быть обратно пропорциональна α, а не α^2, как это было при гашении в окрестности только первой собственной частоты.

Пусть для достаточно большого α требуется найти параметра R гасителей так, чтобы вблизи R первых собственных частот было $\rho(\nu) \leqslant \alpha$, а суммарная масса гасителей была минимально возможной. Рассматривая $\rho(\nu)$ в окрестности каждой из ω_j $(1 \leqslant j \leqslant R)$, можно прийти к выводу, что необходимым условием минимума $\Theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_R$ является наличие у $\rho(\nu)$ $2R$ гладких максимумов, равных α, т.е. выполнение следующих условий:

$$\rho(\nu_{1j}) = \rho(\nu_{2j}) = \alpha, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\nu}(\nu_{1j}) = \frac{\partial\rho}{\partial\nu}(\nu_{2j}) = 0 \tag{1}$$

для $2R$ частот ν_{1j} и ν_{2j} (j – те же). Эти равенства представляют собой систему $4R$ уравнений относительно $5R$ неизвестных (ими являются все ν_{1j}, ν_{2j}, θ_j, σ_j, z_j). Дополнительные условия, необходимые для минимума Θ, в этом случае сложнее, чем при $R = 1$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_1}(\nu_{11})\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(\nu_{21}) - \frac{\partial\rho}{\partial\sigma_1}(\nu_{21})\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(\nu_{11}) = 0 \tag{2}$$

Асимптотика оптимальных значений параметров гасителей и связанных с частотами ν_{1j} и ν_{2j} вспомогательных параметров ε_j и ν_{0j} при $\alpha \to \infty$ будет такой

$$\theta_j = 2(w_j^{-1} v_j \omega_j^2 \alpha)^{-2}, \quad \sigma_j = \omega_j^2$$

$$z_j = \sqrt{3}\,|w_j|(\omega_j\alpha)^{-1}, \quad \nu_{0j} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\nu_{1j}^2 + \nu_{2j}^2)} = \omega_j$$

$$\varepsilon_j = (\nu_{2j}^2 - \nu_{1j}^2)(\nu_{1j}^2 + \nu_{2j}^2)^{-1} = |w_j|(\omega_j\alpha)^{-1} \tag{3}$$

$$w_j = \omega_j^2 P_*(\omega_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}[1 - (\omega_j\omega_k^{-1})^2]^{-1}, \quad (1 \leqslant j \leqslant R) \tag{4}$$

Если задаться зависимостью всех ε_j от α, то, как и в случае $R = 1$, система (1) станет замкнутой. Найденное таким образом приближенное решение задачи может быть уточнено варьированием всех ε_j [5].

Предположим, что необходимо ограничить $\rho(\nu)$ величиной α в окрестности двух наименьших собственных частот, то к упругой системе присоединен только один гаситель. Тогда, если его параметры таковы, что выполняются условия (1) и (2), а ν_{11} и ν_{21} близки к 1, то $\rho(\nu)$ имеет гладкий максимум при ν, близком к ω_2; но этот максимум может быть больше α, только если α больше некоторого α_1. Аналогичное явление имеет место, если условие (2) заменить зависимостью ε_1 от α. При $\alpha \leqslant \alpha_1$ для того, чтобы $\rho(\nu) \leqslant \alpha$ при ν, близких к 1 и ω_2, достаточно одного гасителя, а если $\alpha > \alpha_1$, то их необходимо два. Если их параметры таковы, что выполняются условия (1) для четырех частот ν_{11}, ν_{12}, ν_{21} и ν_{22}, а Θ минимально, то при $\alpha \to \alpha_1 + 0$ $\theta_2 \to 0$; но

$$\lim_{\alpha\to\alpha_1+0} \varepsilon_2 = 0 \tag{5}$$

Это необходимо иметь в виду при решении задачи, т.е. зависимость $\varepsilon_2(\alpha)$ должна задаваться так, чтобы удовлетворять условиям (3) и (5). С какой скоростью θ_2 и ε_2 стремятся к нулю при $\alpha \to \alpha_1 + 0$, неизвестно.

Если необходимо добиться того, чтобы $\rho(\nu) \leqslant \alpha$ в области, содержащей R безразмерных собственных частот, то также при больших α необходимо использовать R гасителей, но их количество может уменьшаться вместе с α.

Рассмотрим случай ограничения одной и той же величиной α S коэффициентов передачи $\rho_k(\nu)$ $(1 \leqslant k \leqslant S)$. Для каждого из них можно взять соответствующую функцию $P_*(\nu)$ (снабдим ее индексом k) и выключить формулу

$$w_{jk} = \omega_j^2 P_{*k}(\omega_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N} [1-(\omega_j \omega_l^{-1})^2]^{-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant R)$$

Если для каждого j существует такое k_j, что $|w_{jk_j}|$ существенно больше, чем любое $|w_{jk}|$ при $k \neq k_j$, то вблизи ω_j наибольшим коэффициентом передачи будет $\rho_{k_j}(\nu)$. При больших α необходимые условия минимума Θ таковы: должны выполняться условия (1), если $\rho(\nu) = \max\rho_k(\nu)$ (максимум берется по всем $1 \leqslant k \leqslant S$), для $2R$ частот $\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{12}, \nu_{22}, \ldots, \nu_{1R}, \nu_{2R}$; если ν_{1j} и ν_{2j} близки к ω_j, то $\rho(\nu) = \rho_{k_j}(\nu)$; асимптотика параметров гасителей, ν_{0j} и ε_j определяются формулами (3), в которых надо положить $w_j = w_j k_j$. Как и в случае $S = 1$, можно искать приближенное решение задачи, если задать зависимость всех ε_j от α, а затем уточнить его.

Могут существовать такие $j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant R)$ и α_0, что при этом значении $\alpha\rho(\nu)$ в окрестности ω_{j0} имеет три гладких максимума, равных α_0; они не могут соответствовать одному и тому же коэффициенту передачи. Тогда при α, близких к α_0 снизу, $\rho(\nu)$ будет иметь не $2R$, а $2R + 1$ гладкий максимум, равный α, и для того, чтобы получить приближенное решение задачи, не нужно задавать зависимость ε_{j0} от α. При дальнейшем уменьшении α необходимое для минимума Θ количество частот, для которых должны выполняться условия (1), и соответствующие коэффициенты передачи могут меняться; если таких частот $2R + r$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$, то надо задавать зависимость $R - r$ вспомогательных параметров ε_j, соответствующим тем безразмерным собственным частотам упругой системы, вблизи которых $\rho(\nu)$ имеет по два гладких максимума. Наконец, если для некоторого j_0 имеется несколько близких друг к другу и максимальных $|w_{j0k}|$, то даже при больших α в оптимальном случае $\rho(\nu)$ может иметь вблизи ω_{j0} либо три гладких максимума, равных α, либо два, которым соответствуют разные коэффициенты передачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов А.В.* Оптимальное гашение вынужденных колебаний в упругих системах с несколькими степенями свободы. Ч. 1 // Изв. АН МТТ. 1997. № 1. С. 29–33.
2. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
3. *Коренев Б.Г., Резников Л.М.* Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 303 с.
4. *Нагаев Р.Ф., Степанов А.В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
5. *Степанов А.В.* Точное решение задачи об оптимальном гашении вынужденных колебаний // Динамика систем. Ниж. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. С. 106–113.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
26.XII.1994