

УДК 534.014

© 1997 г. М.Я. ИЗРАИЛОВИЧ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Рассматривается задача параметрического возбуждения автоколебаний в механической системе с одной степенью свободы, содержащей малую нелинейность. Управляющее воздействие предполагается ограниченной по амплитуде функцией координаты и скорости. Решение получено на основе построения программного управления с использованием процедуры, включающей применение метода Ван-дер-Поля и метода моментов и последующим построением синтезирующей функции. Показано, что в силу существенной неоднозначности решения задачи синтеза возможно построение таких кривых переключения релейного оптимального управления, которые обеспечивают адаптивные свойства синтезированных систем, а именно – сохранение оптимальных режимов их функционирования и обеспечение постоянства заданной частоты автоколебаний при медленном дрейфе какого-либо из параметров.

Введение. Задачи синтеза автоколебательных систем в настоящее время являются одним из важных направлений теории управления механическими свойствами [1]. Относящиеся к этому направлению работы [1–6] касаются синтеза систем с силовой схемой возбуждения. Вместе с тем, системы с параметрической схемой возбуждения автоколебаний имеют определенные преимущества [7]. Задачи параметрического управления периодическими режимами нелинейных систем рассматривались, в частности, в [8, 9] применительно к задачам виброгашения с использованием сочетания приближенных методов нелинейной механики и теории оптимального управления.

В публикуемой работе рассматривается задача синтеза закона параметрического возбуждения автоколебаний в механической системе с одной степенью свободы при наличии малой нелинейности. Решение получено на основе построения оптимального по критерию максимума амплитуды установившихся колебаний программного управления с использованием процедуры, включающей применение метода Ван-дер-Поля и метода моментов, примененной в [10] для задач силового управления, и последующего построения синтезирующих функций, определяющих структуру закона управления с обратной связью. Показано, что в силу существенной неоднозначности решения задачи синтеза оказывается возможным построение таких кривых переключения, при которых синтезированная автоколебательная система обладает адаптивными свойствами, а именно обеспечивается сохранение оптимального режима функционирования и заданной частоты автоколебаний при медленной вариации какого-либо из параметров системы.

1. Рассмотрим квазилинейную механическую систему с одной степенью свободы, уравнение которой, при введении параметрического управления в упругий элемент, имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \varepsilon p_0 u x \quad (1.1)$$

где ω_0, p_0 – постоянные параметры, ε – малый параметр, $f(x, \dot{x})$ – нелинейная сила, $u(x, \dot{x})$ – подлежащее определению управляющее воздействие, ограниченное по

амплитуде $|u| \leq U$. В (1.1) нелинейная сила может иметь характер нелинейной упругости, либо чисто диссипативной характеристики, либо характеристики автоколебательного (при $p_0 = 0$) типа.

Требуется найти такой закон параметрического управления $u^*(x, \dot{x})$, который обеспечивает в системе (1.1) автоколебательный режим с максимальной амплитудой и заданной частотой ω_0 . Определим оптимальный закон программного управления $u^*(t)$, используя процедуру, аналогичную приведенной в [10] для случая силового управления. Аппроксимируя динамику системы (1.1) в гармоническом приближении

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \psi, \quad \psi = \omega_0 t - \varphi \quad (1.2)$$

где A и φ в соответствии с методом Ван-дер-Поля удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} [\Phi(A) - p_0 A \int_0^{2\pi} u(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi] \quad (1.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 A} [\Psi(A) + p_0 A \int_0^{2\pi} u(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \cos^2 \psi d\psi] \quad (1.4)$$

$$\Phi(A) = - \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

$$\Psi(A) = \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

Из (1.4) получим следующее выражение для квадрата частоты (отбрасывая член порядка ε^2):

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\varepsilon}{\pi A} [\Psi(A) + p_0 A \int_0^{2\pi} u(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \cos^2 \psi d\psi] \quad (1.5)$$

Из (1.3), (1.5) для установившегося режима $dA/dt = 0$, $d\varphi/dt = 0$ получаем моментные соотношения, которым должна удовлетворять u :

$$\int_0^{2\pi} u \sin 2\psi d\psi = \beta_1(A), \quad \int_0^{2\pi} u \cos 2\psi d\psi = \beta_2(A) \quad (1.6)$$

$$\beta_1(A) = 2\Phi(A) / p_0 A$$

$$\beta_2(A) = 2 \frac{\pi(\omega_0^2 - \omega^2)A - \varepsilon\Psi(A)}{\varepsilon p_0 A} \quad (1.7)$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Допустим, что в (1.6) задана как величина ω , так и A и требуется найти такую функцию $u_0(\psi)$, которая удовлетворяет (1.6) и при этом имеет минимальную амплитуду $U_0 = \max |u_0(\psi)|$. В соответствии с [11], решение этой задачи имеет вид

$$u_0(\psi) = U_0 \operatorname{sign}[\beta_1(A) \sin 2\psi + \beta_2(A) \cos 2\psi] \quad (1.8)$$

$$16U_0^2 = \beta_1^2(A) + \beta_2^2(A) \quad (1.9)$$

Возвращаясь к исходной постановке задачи, на основе зависимости A от U_0 , задаваемой уравнением (1.9), найдем максимальную амплитуду A^* при заданной величине $U_0 = U$. При этом, с учетом (1.7), уравнение (1.9) в развернутой форме будет:

$$\frac{4\varepsilon^2 p_0^2}{\pi^2} U^2 A^2 = \varepsilon^2 \frac{\Phi^2(A)}{\pi^2} + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)A - \varepsilon \frac{\Psi(A)}{\pi} \right]^2 \quad (1.10)$$

Таблица 1

i	$\sin \psi_i$	$\cos \psi_i$
1	$\lambda_1 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta_1^*}{ \beta^* } \right) \right]^{1/2}$	$\lambda_2 = - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta_1^*}{ \beta^* } \right) \right]^{1/2} \operatorname{sign}(\beta_1^* \beta_2^*)$
2	λ_2	$-\lambda_1$
3	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
4	$-\lambda_2$	$-\lambda_1$

Из (1.10) следует, что поставленная задача имеет смысл в предположении одинакового порядка малости величин ϵ и $|\omega_0^2 - \omega^2|$. Заметим, что в том случае, когда $f(x, \dot{x})$ при $u = 0$ соответствует автоколебательной характеристике, наряду с задачей максимизации амплитуды автоколебаний путем введения дополнительной параметрической обратной связи представляет интерес также задача о минимизации амплитуды, если автоколебания являются нежелательными.

После того, как из (1.10) определена оптимальная амплитуда A^* , оптимальный закон программного управления u^* , в соответствии с (1.8) имеет вид:

$$u^*(\psi) = U \operatorname{sign}(\beta_1^* \sin 2\psi + \beta_2^* \cos 2\psi) \quad (1.11)$$

$$\beta_1^* = \beta_1(A^*), \quad \beta_2^* = \beta_2(A^*)$$

2. На основе (1.11), с учетом гармонического представления решения (1.2), строится синтезирующая функция $u^*(x, \dot{x})$. Следует отметить, что при $\omega = \omega_0$, $\Psi(A) = 0$ из (1.11), (1.2) при $\beta_1^* > 0$ найдем:

$$u^*(x, \dot{x}) = -U \operatorname{sign} x \dot{x} \quad (2.1)$$

Однако в общем случае при $\omega \neq \omega_0$, $\Psi(A) \neq 0$ имеет более сложную структуру. Закон (2.1) использовался в [7] для параметрического возбуждения автоколебаний, а в [8] – с противоположным знаком – для параметрического виброгашения. В [9] в случае задачи параметрического виброгашения получен закон программного управления в виде (1.11) и на его основе получена синтезирующая функция:

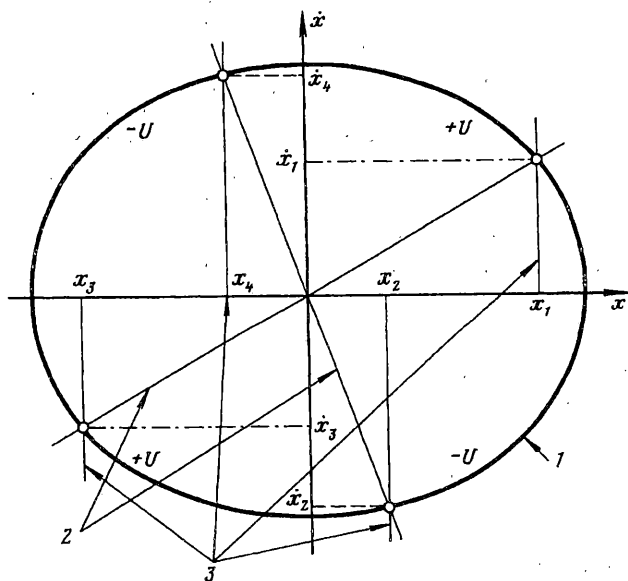
$$x^*(x, \dot{x}) = U \operatorname{sign} \left[\frac{2\beta_1^*}{\omega} x \dot{x} + \beta_2^* \left(x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (2.2)$$

Важной специфической особенностью решения задачи синтеза релейного закона управления периодическим режимом является ее существенная неоднозначность, как это показано в 4 на примере простейшей виброударной системы. Действительно, оптимальный закон программного управления задает только точки переключения на замкнутой фазовой траектории, соответствующие моменты переключения. В данном случае эти точки переключения определяются следующим образом. В соответствии с (1.11) моменты переключения являются лежащими на отрезке $[0; 2\pi]$ нулями функции

$$z(\psi) = \beta_1^* \sin 2\psi + \beta_2^* \cos 2\psi \quad (2.3)$$

Анализ z (2.3) показывает, что она имеет четыре нуля ψ_i ($i = 1 \div 4$). Нули функции $z(\psi)$ представлены в табл. 1 ($|\beta^*| = |\beta_1^2 + \beta_2^2|^{1/2}$). Координаты точек переключения

$$x_i = A^* \cos \psi_i, \quad \dot{x}_i = -\omega_0 A^* \sin \psi_i \quad (2.4)$$



Фиг. 1

лежат на фазовой плоскости $x, \dot{x}$ попарно симметрично относительно начала координат (фиг. 1). Отсюда следует, что для решения задачи синтеза закона управления с обратной связью

$$u^*(x, \dot{x}) = U \operatorname{sign} s(x, \dot{x}) = u^*(\psi) \quad (2.5)$$

следует построить такую функцию переключения $s(x, \dot{x})$, которая удовлетворяет двум условиям: точки переключения $x_i, \dot{x}_i$ (2.4) лежат на кривой переключения, т.е. $s(x_i, \dot{x}_i) = 0$; в интервалах между моментами переключений ψ_i должны совпадать знаки функций $s(x, \dot{x})$ и $z(\psi)$. Поскольку существует бесконечное множество функций $s(x, \dot{x})$, удовлетворяющих этим двум условиям, то соответственно решение задачи синтеза $u^*(x, \dot{x})$ (2.5) имеет бесконечное множество решений.

Поскольку $z(\psi) = 2\beta_1^* \sin \psi \cos \psi + \beta_2^* (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)$, то отсюда, с учетом (1.2) получаем

$$s(x, \dot{x}) = -2 \frac{\beta_1^*}{\omega_0} x \dot{x} + \beta_2^* \left(x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} \right) \quad (2.6)$$

Закон $u^*(x, \dot{x})$ (2.5) с функцией переключения (2.6) аналогичен закону (2.2). Функцию переключения $s(x, \dot{x})$ (2.6) удобно представить в следующем эквивалентном виде:

$$s(x, \dot{x}) = (\dot{x} - \gamma + \omega_0 x)(\dot{x} - \gamma - \omega_0 x) \quad (2.7)$$

$$\gamma_{\pm} = (\beta_1^* \pm \beta_2^*) / \beta_2^*$$

Функция переключения (2.7) соответствует двум прямым, проходящим через начало координат (фиг. 1).

Другой простейший вариант функции переключения, зависящей только от координаты x , получим, выражая z (2.3) через $\cos \psi$: $z(\psi) = 2\beta_1^* \cos \psi \sqrt{1 - \cos^2 \psi} + \beta_2^* (2 \cos^2 \psi - 1)$. Отсюда получим

$$s(x) = 2\beta_1^* x \sqrt{A^{*2} - x^2} + \beta_2^* (2x^2 - A^{*2}) \quad (2.8)$$

Функция $s(x)$ (2.8) имеет четыре нуля x_i (2.4). Поэтому на фазовой плоскости ей соответствуют четыре вертикальные прямые (фиг. 1).

Допустим теперь, что уравнение (1.1) зависит от некоторого параметра η , относительно которого либо отсутствует точная информация, например, известно только, что он лежит на некотором отрезке $[\eta_-, \eta_+]$, либо подвержен медленному временному дрейфу на этом отрезке. Таким параметром может являться какой-либо параметр функции $f(x, \dot{x})$, либо собственная частота ω_0 .

Пользуясь неоднозначностью построения $s(x, \dot{x})$, поставим задачу о таком ее определении, при котором обеспечивается оптимальность функционирования системы (1.1), (2.5) и заданная частота автоколебаний ω для любого $\eta \in [\eta_-, \eta_+]$.

Параметры β_1^* , β_2^* , а следовательно и координаты x_i , $\dot{x}_i$ (2.4) в общем случае зависят от η , а также от ω . При изменении η каждая точка переключения x_i , $\dot{x}_i$ будет описывать на фазовой плоскости некоторую кривую $x_i(\eta)$, $\dot{x}_i(\eta)$. Если в качестве функции переключения сконструировать такую функцию, в силу которой каждая из этих кривых будет лежать на кривой переключения, т.е.

$$s[x_i(\eta), \dot{x}_i(\eta), \omega] = 0, \quad \eta \in [\eta_-, \eta_+]$$

то закон $u^*(x, \dot{x})$ будет обеспечивать вышеуказанные свойства системы (1.1), (2.5).

Если, в частности, параметры β_1^* , β_2^* оказываются не зависящими от η , то такими свойствами будет обладать закон u^* с функцией переключения (2.7), за исключением того случая, когда в качестве η выступает ω_0 . Функция переключения $s(x)$ (2.8) не позволяет осуществить эти свойства, поскольку она зависит от величины A^* , которая является функцией η .

3. Проанализируем устойчивость оптимальных режимов, предполагая, что закон управления (2.5) имеет произвольную функцию переключения $s(x, \dot{x})$. Устойчивость стационарных режимов, в соответствии с [12], определяется исходя из анализа уравнения (1.3), которое для системы (1.1), (2.5) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} [\Phi(A) - \frac{1}{2} p_0 A \tilde{u}_1(A)] \quad (3.1)$$

$$\tilde{u}_1(A) = U \int_0^{2\pi} \text{sign } s(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \sin 2\psi d\psi$$

В общем случае $\tilde{u}_1(A)$ является функцией переменной величины A , при этом $\tilde{u}_1(A^*) = \beta_1^*$ в силу (1.6). В частных случаях, например при $s(x, \dot{x})$ (2.7) $\tilde{u}_1 = \beta_1^*$.

Поскольку величина A^* является корнем уравнения

$$\Phi(A) - \frac{1}{2} p_0 \tilde{u}_1(A) = 0 \quad (3.2)$$

то условие устойчивости оптимального режима в силу (3.1), (3.2) имеет вид

$$\Phi'(A^*) - \frac{1}{2} p_0 A^* \tilde{u}_1'(A^*) - \frac{1}{2} p_0 \beta_1^* < 0 \quad (3.3)$$

Если уравнение (3.2) имеет, кроме A^* , также другие положительные корни A_i , при выполнении условий устойчивости этих амплитуд в системе (1.1), (2.5) возможно возникновение режимов, отличных от расчетного оптимального режима A^* , ω . В этом случае, пользуясь неоднозначностью построения $s(x, \dot{x})$, следует сконструировать ее таким образом, чтобы эти режимы оказались неустойчивыми.

4. Рассмотрим случай, когда $\Psi(A) = 0$, что соответствует отсутствию упругой составляющей в нелинейной силе $f(x, \dot{x})$. Предполагая при этом, что

$|\omega_0^2 - \omega^2| \leq 2\varepsilon p_0 U / \pi$ (условие параметрического захватывания), из (1.10) получаем

$$\Phi(A) / (\pi A) = \pm V_1 / \varepsilon \quad (4.1)$$

$$V_1 = \sqrt{(2\varepsilon p_0 U / \pi)^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Если нелинейность f является чисто диссипативной, например $f = -\mu |\dot{x}|^{n-1} \dot{x}$, то $\Phi(A) < 0$, что соответствует знаку $(-)$ в уравнении (4.1). При этом в силу (4.1) из (1.7) следует

$$\beta_1^* = -\frac{2\pi}{p_0 \varepsilon} V_1, \quad \beta_2^* = \frac{2\pi}{p_0 \varepsilon} (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (4.2)$$

Поскольку β_1^*, β_2^* входят в (1.11) под знак sign , то полагая $p_0 > 0$ при расчете закона управления вместо (4.2) полагаем

$$\beta_1^* = -V_1, \quad \beta_2^* = \omega_0^2 - \omega^2, \quad |\beta^*| = 2\varepsilon p_0 U / \pi \quad (4.3)$$

В данном случае закон $u^*(\psi)$ (1.11) в силу (4.3) оказывается независимым от конкретного вида $f(\dot{x})$. Не зависящим от f оказывается также и закон $u^*(x, \dot{x})$ (2.5; 2.7).

Таким образом, для любой $f(\dot{x})$ указанного класса закон $u^*(x, \dot{x})$ (2.5), (2.7) с параметрами β_1^*, β_2^* (4.3) обеспечивает режим с максимальной амплитудой A^* и заданной частотой ω . Из этого следует, в частности, что если для какой-либо конкретной характеристики $f(\dot{x})$ входящий в нее параметр подвержен медленному временному дрейфу, то в системе будет сохраняться режим с максимальной амплитудой A^* и неизменной частотой ω .

Для закона управления (2.5, 2.7) $\tilde{u}_1(A) = \beta_1^*$, поэтому условие устойчивости (3.3) имеет вид

$$\Phi'(A^*) + \pi V_1 / \varepsilon < 0 \quad (4.4)$$

Рассмотрим в качестве случая турбулентного трения $f(\dot{x}) = -\mu |\dot{x}| \dot{x}$, $\Phi(A) = -\frac{8}{3} \mu \omega_0^2 A^2$. Из (4.1) найдем выражение для A^* :

$$A^* = 3\pi V_1 / (8\varepsilon \mu \omega_0^2) \quad (4.5)$$

Условие устойчивости (4.4) в данном случае имеет вид $-\frac{16}{3} \mu \omega_0^2 A^* + (\pi / \varepsilon) V_1 < 0$ откуда, в силу (4.5) получим $-(\pi / \varepsilon) V_1 < 0$, т.е. оптимальный режим устойчив.

Уравнение (3.2) имеет два решения $A = A^*$ и $A = 0$. Как следует из (4.4), состояние равновесия $A = 0$ неустойчиво, поэтому в системе реализуется только оптимальный режим.

5. Допустим теперь, что $f(x, \dot{x})$ соответствует характеристике автоколебательного типа. Для широкого класса таких характеристик $\Phi(A) \neq 0$, $\Psi(A) = 0$. Поэтому оптимальная амплитуда также определяется из уравнения (4.1). В качестве первого примера рассмотрим характеристику вида (в режиме безостановочного движения): $f(\dot{x}) = -2k\dot{x} + \mu \text{sign } \dot{x}$, $\Phi(A) = -2k\pi \omega_0 A + 4\mu$. Из (4.1) определяется амплитуда

$$A_{\pm}^* = 4\mu / \pi(2k\omega_0 \pm V_1 / \varepsilon)^{-1} \quad (5.1)$$

В (5.1) знаку $(-)$ соответствует максимальная амплитуда автоколебаний. Этот режим реализуется при условии

$$2k\omega_0 > V_1 / \varepsilon \quad (5.2)$$

Из (4.4) следует, что в силу (5.2) режим A_-^* устойчив. A_-^* является единственным корнем уравнения (3.2). Параметры закона управления (2.5), (2.7) определяются по формулам (4.3).

Знаку (+) в (5.1) соответствует минимальная амплитуда A_+^* . При этом в (4.3) следует изменить знак параметра β_1^* . Этот режим также устойчив, а уравнение (3.2) имеет единственное решение A_+^* (5.1).

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда описывает характеристику осциллятора Ван-дер-Поля:

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}, \quad \Phi(A) = \pi\omega_0(1 - \frac{1}{4}A^2)A \quad (5.3)$$

Решение уравнения (4.1) имеет вид

$$A^* = 2\sqrt{1 \pm V_1 / (\epsilon\omega_0)} \quad (5.4)$$

В (5.4) знаку (+) соответствует знак (-) в (4.1) и наоборот. Поэтому, также как и в предыдущем примере и в случае диссипативной нелинейности, задаче максимизации амплитуды соответствует $\beta_1^* = -V_1$, а задаче минимизации $-\beta_1^* = V_1$. Этот факт имеет очевидную физическую интерпретацию. Действительно, в соответствии с (1.3) β_1^* играет роль коэффициента вязкого трения. Отсюда также следует, во первых, что в случае характеристики $f(x, \dot{x})$ автоколебательного типа, вне зависимости от ее конкретного вида, параметры закона управления β_1^* , β_2^* (4.3) обеспечивают максимальное значение A^* , во-вторых, что минимальное значение A^* достигается для любой $f(x, \dot{x})$ указанного класса при $\beta_1^* = V_1$, и в-третьих, что в обоих случаях закон управления $u(x, \dot{x})$ (2.5), (2.7) обеспечивает адаптивные свойства, о которых говорилось выше.

Условие устойчивости режима A_+^* в силу (4.4), (5.3), (5.4) имеет вид

$$\pi\omega_0\{1 - 3[1 + V_1 / (\epsilon\omega_0)]\} + \pi V_1 / \epsilon = -2(\pi\omega_0 + \pi V_1 / \epsilon) < 0$$

т.е. режим устойчив.

Режим A_-^* существует, если $V_1 < \epsilon\omega_0$. Условие устойчивости (3.3) в этом случае будет $\pi\{1 - 3[1 - V_1 / (\epsilon\omega_0)]\} - \pi V_1 / \epsilon = -2\pi\omega_0 + 2\pi V_1 / \epsilon < 0$, т.е. режим устойчив.

Уравнение (3.2) при $\bar{u}_1(A) = \beta_1^* = -2\pi V_1 / p_0\epsilon$ имеет единственное решение A_+^* (5.4), а при $\bar{u}_1(A) = 2\pi V_1 / p_0\epsilon$ единственное решение A_-^* (5.4) (решение $A = 0$ в обоих случаях неустойчиво). Поэтому в системе возможна реализация только оптимальных режимов.

6. Рассмотрим систему (1.1) с нелинейностью вида

$$f(x, \dot{x}) = -2k\dot{x} - g(x), \quad g(x) > 0, \quad g'(x) > 0 \quad (6.1)$$

где $g(x)$ описывает нелинейность жесткого типа. В этом случае

$$\Phi(A) = -2k\pi\omega_0 A, \quad \Psi(A) = -\int_0^{2\pi} g(A \cos \psi) \cos \psi d\psi < 0$$

Предполагая, что $2p_0U / \pi > [4k^2\omega_0^2 + (1/\epsilon^2)(\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{1/2}$ из (1.10) получим

$$-\frac{\Psi(A)}{\pi A} = V_2 - \frac{1}{\epsilon}(\omega_0^2 - \omega^2) \quad (6.2)$$

$$V_2 = 2(p_0^2 U^2 / \pi^2 - k^2 \omega_0^2)^{1/2}$$

Таблица 2

i	$x_i(\omega_0)$	$\dot{x}_i(\omega_0)$
1	$A^*(\omega_0) \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{V_1(\omega_0)\pi}{2\epsilon p_0 U} \right] \right\}^{1/2}$	$A^*(\omega_0) \omega_0 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{V_1(\omega_0)\pi}{2\epsilon p_0 U} \right] \right\}^{1/2}$
2	$\frac{1}{\omega_0} \dot{x}_1(\omega_0)$	$-\omega_0 x_1(\omega_0)$
3	$-x_1(\omega_0)$	$-\dot{x}_1(\omega_0)$
4	$-\frac{1}{\omega_0} \dot{x}_1(\omega_0)$	$\omega_0 x_1(\omega_0)$

Параметры β_1^* , β_2^* в соответствии с (1.7), (6.2) определяются по формулам

$$\beta_1^* = -4k\pi\omega_0 / p_0, \quad \beta_2^* = 2\pi V_2 / p_0 \quad (6.3)$$

для любой $g(x)$ указанного класса.

При использовании закона управления $u^*(x, \dot{x})$ (2.5), (2.7) $\tilde{u}_1(A) = \beta_1^* = -4k\pi\omega_0 / p_0$. В силу этого уравнения (3.1) принимает вид $dA/dt = 0$ и, таким образом, оптимальный режим не удовлетворяет условию устойчивости. В силу этого, пользуясь неоднозначностью построения $s(x, \dot{x})$, используем другую функцию переключения, а именно $s(x, \dot{x})$ (2.8). При этом $\tilde{u}_1(A) = (A^* / A)^2 \beta_1^*$, а уравнение (3.2) имеет вид

$$-2k\pi\omega_0 A + 2k\pi\omega_0 A^{*2} / A = 0$$

Его единственное решение $A = A^*$. Условие устойчивости (3.3) $-2k\pi\omega_0 - 2k\pi\omega_0 < 0$ т.е. в этом случае оптимальный режим устойчив и другие режимы отсутствуют.

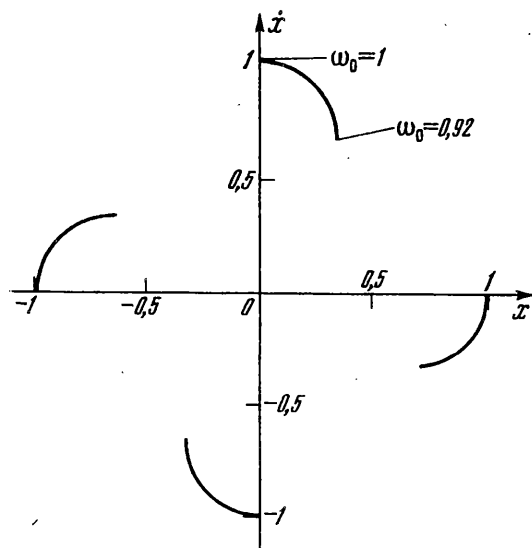
Таким образом, в случае нелинейности $f(x, \dot{x})$ (6.1) закон управления (2.5), (2.8) позволяет реализовать устойчивый оптимальный режим автоколебаний для любой $g(x)$ указанного класса. Однако в данном случае закон управления u^* зависит от конкретного вида $g(x)$, поскольку входящая в (2.8) величина A^* определяется из уравнений (6.2).

7. Допустим теперь, что в системе (1.1) с нелинейностью $f(x, \dot{x})$ диссипативного типа собственная частота ω_0 подвержена медленному временному дрейфу в некотором интервале (ω_0^-, ω_0^+) , а параметры β_1^* , β_2^* (4.2) рассчитаны для фиксированного номинального значения $\omega_0 = \omega_{00}$, $\omega_{00} \in [\omega_0^-, \omega_0^+]$. В этом случае закон управления (2.5), (2.7) не будет обеспечивать оптимальное значение амплитуды $A^*(\omega_0)$ и заданное значение частоты автоколебаний. В случае, когда $f = -\mu \dot{x} \dot{x}$ (в режиме безостановочных движений), примененные значения амплитуды и частоты автоколебаний в системе (1.1), (2.5), (2.7) определяются по формулам

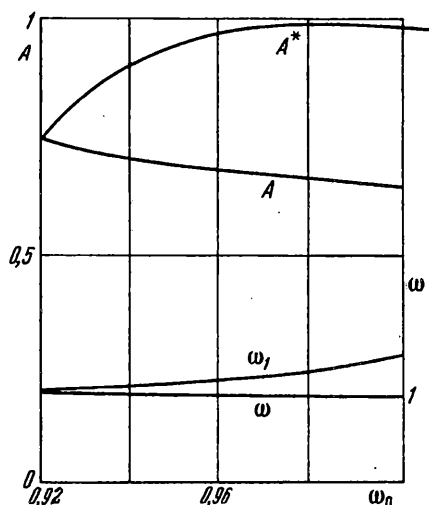
$$A(\omega_0) = \frac{3\pi}{8\epsilon\mu\omega_0^2} V_1(\omega_{00}) \quad (7.1)$$

$$\omega_1^2(\omega_0) = \omega_0^2 - \omega_{00}^2 + \omega^2 \quad (7.2)$$

Для обеспечения оптимального для любого $\omega_0 \in (\omega_0^-, \omega_0^+)$ режима с максимальной амплитудой $A^*(\omega_0)$ и заданной постоянной частотой ω следует построить такую кривую переключений $s(x, \dot{x}) = 0$, на которой лежат траектории, образуемые точками переключения $x_i(\omega_0)$, $\dot{x}_i(\omega_0)$ ($i = 1-4$) (при изменении ω_0). В данном случае, в



Фиг. 2



Фиг. 3

соответствии с формулами для $\cos \psi_i$, $\sin \psi_i$ табл. 1, (2.4), (4.2) значения $x_i(\omega_0)$, $\dot{x}_i(\omega_0)$ определяются по формулам, приведенным в табл. 2, где $A^*(\omega_0)$ определяется по соотношению (4.5).

Используя в качестве функции переключения

$$s(x, \dot{x}) = [\dot{x} - y_1(x)][\dot{x} - y_2(x)] \quad (7.3)$$

где $\dot{x} = y_1(x)$, $\dot{x} = y_2(x)$ – функции $\dot{x}$ от x , задаваемые в параметрическом виде с соответственно строкой табл. 2 с нечетным и четным номером, получим закон управления (2.5), (7.3) при использовании которого система (1.1) обладает вышеуказанными свойствами.

При этом для $s(x, \dot{x})$ (7.3), также как и для $s(x, \dot{x})$ (2.7) $\tilde{y}_1(A) = \beta_1^*$, в силу чего оптимальный режим $A^*(\omega_0)$, ω при изменении ω_0 удовлетворяет условию устойчивости (4.4).

На фиг. 2 построены кривые $\dot{x}_i$, x_i , рассчитанные по формулам табл. 2 при $\epsilon = 0.2$; $\mu = \frac{3}{8}\pi$; $p_0 = 1$; $U = \pi/2$; $\omega_0^- = 0.92$; $\omega_0^+ = 1$; $\omega = 1$. На фиг. 3 построены зависимости $A(\omega_0)$ (7.1), $\omega_1(\omega_0)$ (7.2), а также $A^*(\omega_0)$ (4.5) при этих значениях параметров и $\omega_{00} = 0.92$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский А.А. Синтез автоколебательных систем с приложениями к ветроэнергетической установке нового класса // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 6. С. 5–15.
2. Уланов Г.М. Об одном обобщении теории накопления отклонений и ее приложении к определению автоколебаний в генераторе // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 1. С. 54–57.
3. Репников А.В. Колебания в оптимальных системах автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1968. 239 с.
4. Бабицкий В.И., Израйлович М.Я. К синтезу автоколебательных виброударных систем // Машиноведение. 1971. № 3. С. 11–18.
5. Бабицкий В.И., Израйлович М.Я. Синтез автоколебательной виброударной системы с заданным рабочим циклом // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 5. С. 28–33.

6. *Израилович М.Я.* Оптимальное управление периодическими режимами гармонически линеаризируемых механических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 6. С. 76–83.
7. *Герц М.Е.* Возбуждение колебаний механической системы с управляемым параметром // Машиноведение. 1982. № 5. С. 10–19.
8. *Акуленко Л.Д.* Гашение колебаний системы, содержащей несбалансированный ротор // Изв. РАН МТТ. 1993. № 3. С. 110–118.
9. *Израилович М.Я.* Параметрическое управление вынужденными периодическими режимами гармонически линеаризируемых механических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 4. С. 15–22.
10. *Израилович М.Я., Морозова Н.И.* Оптимальное управление периодическими движениями нелинейных механических систем с одной степенью свободы // Машиноведение. 1981. № 2. С. 39–46.
11. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
12. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1995