МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 531.133.1

© 1997 г. В.А. ЯРОЩУК

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КАЧЕНИЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуется кинематика качения без скольжения твердого тела по неподвижной поверхности, когда подвижная и неподвижная поверхности двумерны, а точка контакта единственна. В предположении, что в области движения градиенты обеих поверхностей ненулевые и при указанных в настоящей работе ограничениях на главные кривизны подвижной и неподвижной поверхностей в точке контакта кинематические уравнения движения [1], [2] записаны в следующей форме: производная по времени от вектора, соединяющего центр масс движущегося тела и точку контакта, выражена через угловую скорость движущегося тела. Для твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности [3] под действием сил, зависящих только от положений обеих поверхностей в [4] с целью отыскания множителя Якоби, или интегрального инварианта, выполнено преобразование дивергенции уравнений, описывающих динамику рассматриваемой задачи. При этом предполагалось, что кинематические уравнения движения обладают рядом свойств. Целью настоящей статьи является достижение следующего результата: доказать, что кинематические уравнения в полученной здесь форме при всех указанных ограничениях на подвижную и неподвижную поверхности действительно обладают этими свойствами.

Рассмотрим качение без скольжения твердого тела, ограниченного двумерной поверхностью, по неподвижной двумерной поверхности. Введем следующие обозначения: $O\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ – неподвижная система координат; G – центр масс движущегося тела; $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ – оси, жестко связанные с движущимся телом; L – матрица направляющих косинусов с элементами L_{ij}, определяющая ориентацию осей $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в неподвижном пространстве: $\mathbf{e}_i = \Sigma L_{ij}\mathbf{r}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$; Q – единственная точка контакта; $\mathbf{a} = \mathbf{GQ} = \Sigma a_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $O\mathbf{Q} = \Sigma u_i\mathbf{r}_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $\boldsymbol{\omega} = \Sigma\omega_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ – угловая скорость движущегося тела.

Уравнение подвижной поверхности в осях $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ записывается в форме $F(a_1, a_2, a_3) = 0$.

Уравнение неподвижной поверхности в системе $O\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ имеет вид $\rho(u_1, u_2, u_3) = 0$. Обозначим через

$$\mathbf{n} = |\mathbf{grad}F_Q|^{-1}\mathbf{grad}F_Q = \Sigma n_i\mathbf{e}_i \ (i = 1, 2, 3) \quad \mathbf{m} = |\mathbf{grad}g_Q|^{-1}\mathbf{grad}g_Q = \Sigma m_i\mathbf{r}_i \ (i = 1, 2, 3)$$

единичные векторы нормалей к поверхностям F и ρ в точке Q. Потребуем, чтобы во все время движения выполнялись условия

$$|\mathbf{grad}F_Q| \neq 0, \quad |\mathbf{grad}\rho_Q| \neq 0$$

Геометрическое условие касания поверхностей имеет вид $n_i = \pm\,\Sigma L_{ij}m_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$, где в правой части равенства ставится знак (+), если векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ сонаправлены и знак (–) – в противоположном случае. Для определенности всюду ниже будем рассматривать случай, когда векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ сонаправлены:

$$n_i = \Sigma L_{ij}m_j \ (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Условие качения без скольжения имеет вид $\mathbf{W} + [\omega, \mathbf{a}] = 0$, где $\mathbf{W}$ – скорость точки в неподвижном пространстве. С использованием связи производной по времени в подвижной и неподвижной системах координат от векторов $\mathbf{a}$, $O\mathbf{Q}$, условие качения без скольжения приводится к виду

$$\dot{a}_i = \sum L_{ij}\dot{u}_j \quad (i, j = 1,2,3) \tag{2}$$

Дифференцируем условие (1) по времени:

$$\dot{n}_i = \sum L_{ij}\dot{m}_j + \sum \dot{L}_{ij} L_{kj} n_k \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{3}$$

Объединяя равенства (2) и (3), получим уравнения качения без скольжения в проекциях на оси $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$(N - LML_1)\dot{\mathbf{a}} = \dot{L}L_1\mathbf{n} \tag{4}$$

где N, M – матрицы (3×3). Их элементы с индексами (i, j) равны $\partial n_i / \partial a_j$ и $\partial m_i / \partial u_j$. Матрица L_1 – транспонированная к L, $\dot{\mathbf{a}} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Обозначим через V, Λ матрицы $N - LML_1$, $\dot{L}L_1$. Уравнения (4) примут вид

$$V\dot{\mathbf{a}} = \Lambda\mathbf{n} \tag{5}$$

Очевидно, что матрица вырождена, так как $\mathbf{n}V = 0$. Ненулевой правый аннулятор матрицы обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$. Через $h(A)$ будем обозначать сумму главных миноров второго порядка матрицы A(3×3), а через $\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}$ - матрицу, полученную в результате умножения вектора-столбца $\mathbf{b}$ слева на вектор-строку $\mathbf{c}$ справа.

Теорема 1. При условии $h(V) \neq 0$ уравнения (5) преобразуются к виду

$$h(V)\dot{\mathbf{a}} = (V - E(TrV))[\omega, \mathbf{n}] \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим через $P(V)$ матричную функцию $P(V) = V - E(TrV)$. В [4] доказано следующее утверждение: для матрицы V (3×3) со свойствами $\mathbf{n}V = 0$, $V\boldsymbol{\gamma} = 0$, $\mathbf{n} \neq 0$, $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$, $h(V) \neq 0$ справедливы формулы:

$$(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) \neq 0$$

$$(P(V))V = -(h(V))E + (h(V))(\mathbf{n}, \boldsymbol{\gamma})^{-1}\boldsymbol{\gamma} \oplus \mathbf{n} \tag{7}$$

Умножим уравнения (5) на матрицу $P(V)$ слева. Используя формулу (7), получим:

$$-(h(V))\dot{\mathbf{a}} + (h(V))(\mathbf{n}, \gamma)^{-1}(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{a}}) = P(V)[\mathbf{n}, \omega] \tag{8}$$

Учитывая, что $(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{a}}) = 0$, преобразуем уравнения (8) к виду

$$(h(V))\dot{\mathbf{a}} = P(V)[\omega, \mathbf{n}] = -P(V)\Omega\omega \tag{9}$$

где Ω – кососимметрическая матрица (3×3): $\Omega\mathbf{n} = 0$, $\Omega\omega = [\mathbf{n}, \omega]$. Равенства (6) и (9) равносильны. Теорема доказана.

Обозначим через B_1 матрицу $(h(V))^{-1}P(V)\Omega$, а через B – матрицу, транспонированную к ней. Изучим свойства матрицы B. Из явного вида матрицы B следует, что $B\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{n}B = 0$. Заметим, что матрица V имеет следующий вид

$$V = |\mathbf{grad}F_Q|^{-1}(E - \mathbf{n} \oplus \mathbf{n})\Gamma_1 - L|\mathbf{grad}g_Q|^{-1}(E - \mathbf{m} \oplus \mathbf{m})\Gamma_2 L_1$$

где Γ_1, Γ_2 – гессианы функций f и g в точке Q, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$. Используя свойства матричной операции Tr [5], получим

$$TrB = TrB_1 = -(h(V))^{-1}TrV\Omega \tag{10}$$

Покажем, что $TrV\Omega = 0$,т.е.

$$TrV\Omega = |\mathbf{grad}FQ|^{-1}(Tr\Gamma_1\Omega - (\mathbf{n}, \Gamma_1\Omega\mathbf{n})) - |\mathbf{grad}g_Q|^{-1}(Tr\Gamma_2 L_1\Omega L - (\mathbf{m}, \Gamma_2 L_1\Omega L\mathbf{m})) \tag{11}$$

Так как Γ_1, Γ_2 – симметричные, а Ω, $L_1\Omega L$ – кососимметричные матрицы, $\Omega\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{n} = L\mathbf{m}$, из (11) получаем $TrV\Omega = 0$. Из (10) следует, что $TrB = 0$.

Вычислим $h(B)$. Заметим, что для матрицы B, как и для любой матрицы (3×3), верна формула

$$2h(B) = -Tr(B^2) + (TrB)^2 \tag{12}$$

Так как $TrB = 0$, из формулы (12) следует

$$2h(B) = -Tr(B^2) = -(Tr(B_1^2))$$

По определению матрицы B_1 имеем

$$(h(V))^2 Tr(B_1^2) = Tr((V-(TrV)E)^2\Omega^2) \tag{13}$$

Поскольку $\Omega^2 = \mathbf{n} \oplus \mathbf{n} - E$, $\mathbf{n}V = 0$, равенство (13) равносильно следующему: $-Tr(V^2) = (h(V))^2 Tr(B_1^2)$. Следовательно

$$h(B) = \tfrac{1}{2}(h(V))^{-2}Tr(V^2) \tag{14}$$

Найдем значение $h(V)$, воспользовавшись формулой (12) для матрицы V и ее явным видом

$$2h(V) = -Tr(N^2) - Tr(M^2) + 2TrNLML_1 + (TrN - TrM)^2 \tag{15}$$

По условию задачи $|\mathbf{grad}F_Q| \neq 0$ в области движения. Пусть, например, $\partial F/\partial a_3 \neq 0$ и $a_3 = a_3(a_1, a_2)$ – это функция, заданная неявно уравнением $F(a_1, a_2, a_3) = 0$. Введем функции $\theta_i(a_1, a_2) = n_i\,(a_1, a_2, a_3(a_1, a_2))$ $(i = 1, 2)$ и матрицы N_1, N_2, размером (3×3), и (2×2). В матрице N_1 элемент с индексами (i, j) равен $\partial\theta_i / \partial a_j$, если $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, и равен $\partial n_i / \partial a_j$, если $i = 1, 2$, $j = 3$. Третья строка матрицы N_1 нулевая. Элемент матрицы N_2 с индексами (i, j) равен $\partial\theta_i / \partial a_j$. Легко проверить, что матрицы N и N_1 связаны соотношением

$$N_1 = PNP^{-1} \tag{16}$$

где p – матрица (3×3), первая, вторая и третья строки которой равны соответственно (1, 0, 0), (0, 1, 0) и $(-\partial a_3/\partial a_1, -\partial a_3/\partial a_2, 1)$. Явный вид матриц N_1, N_2 позволяет написать равенство

$$\det(N_1 - \lambda E) = -\lambda\det(N_2 - \lambda E_2) \tag{17}$$

в котором E, E_2 – единичные матрицы (3×3) и (2×2), а λ – параметр.

Из формул (16), (17) следует

$$\det(N - \lambda E) = \det(PNP^{-1} - \lambda E) = \det(N_1 - \lambda E) = -\lambda\det(N_2 - \lambda E_2) \tag{18}$$

Собственные значения матрицы N_2 обозначим через k_1, k_2. Из (18) можно сделать вывод: собственные значения матрицы N равны 0, k_1, k_2. Поэтому справедливы равенства $k_1 + k_2 = TrN$, $k_1k_2 = h(N)$.

Матрица N_2 представима в виде $N_2 = \pm\,\Phi_1^{-1}\Phi_2$ [6], где Φ_1, Φ_2 – матрицы (2×2) первой и второй квадратичных форм, заданных на поверхности f в точке Q. Элемент матрицы Φ_1 с индексами (i, j) равен $\delta_{ij} + (\partial a_3 / \partial a_i)(\partial a_3 / \partial a_j)$. Следовательно, k_1, k_2 – это главные кривизны поверхности f [6] в точке Q. Напомним, что они определены с точностью до знака.

Аналогичные вычисления можно провести и для поверхности ρ. Обозначив через q_1, q_2 те собственные значения вырожденной матрицы M, для которых справедливы равенства $TrM = q_1 + q_2$, $h(M) = q_1q_2$, придем к выводу, что q_1, q_2 – главные кривизны поверхности ρ в точке Q.

В принятых обозначениях найдем

$$TrV = k_1 + k_2 - (q_1 + q_2)$$

$$Tr(V^2) = k_1^2 + k_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - 2TrNLML_1$$

В силу (15) имеем

$$2h(V) = k_1k_2 + q_1q_2 - (k_1 + k_2)(q_1 + q_2) + TrNLML_1 \tag{19}$$

Для вычисления значения $TrNLML_1$ введем матрицы N_3, N_4 (3×3). В матрице N_3 элемент с индексами (i, j) равен $\partial\theta_i / \partial a_j$, если $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ и равен 0, если $j = 3$. Элемент матрицы N_4 с индексами (i, j) равен $(\partial n_i / \partial a_3)$ $(\partial a_3 / \partial a_j)$, если $j = 1, 2$ и равен $-(\partial n_i / \partial a_3)$, если $j = 3$.

Вычислением проверяется равенство

$$N_3 = N + N_4 \tag{20}$$

Обозначим через r матрицу (3×2), элемент которой с индексами (i, j) равен δ_{ij}, если $i = 1,2$, $j = 1, 2$ и равен $\partial a_3 / \partial a_j$, если $i = 3$, $j = 1, 2$. Пусть τ – матрица, транспонированная к r. Заметим, что $\Phi_1 = \tau r$. Используя формулу $N_2 = \pm\, \Phi_1^{-1}\Phi_2$, запишем первые два столбца матрицы N_3 в виде

$$\pm\, r\Phi_1^{-1}\Phi_2 \tag{21}$$

Через $\mathbf{\tau}_1, \mathbf{\tau}_2$ обозначим векторы $\mathbf{\tau}_i = \mathbf{e}_i + (\partial a_3 / \partial a_i)\mathbf{e}_3$ $(i = 1, 2)$, лежащие в касательной плоскости.

Лемма. Справедлива следующая формула:

$$\Phi_1^{-1}\Phi_2 = \varkappa_1\mathbf{l}^1 \oplus \mathbf{l}^1\Phi_1 + \varkappa_2\mathbf{l}^2 \otimes \mathbf{l}^2\Phi_1 \tag{22}$$

в которой $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$ – векторы главных направлений поверхности f в точке Q, записанные в базисе $\mathbf{\tau}_1, \mathbf{\tau}_2$ и единичные в метрике Φ_1, а $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – собственные значения матрицы $\Phi_1^{-1}\Phi_2$, т.е. $\varkappa_i = \pm\, k_i$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. По определению векторов $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$ имеем

$$(\Phi_2 - \varkappa_i\Phi_1)\mathbf{l}^i = 0, \quad \mathbf{l}^i(\Phi_2 - \varkappa_i\Phi_1) = 0, \quad (\mathbf{l}^i, \Phi_1\mathbf{l}^j) = \delta_{ij} \tag{23}$$

Из равенств (23) следует, что $\mathbf{l}^i\Phi_1$ и $\mathbf{l}^i$ – левые и правые собственные векторы матрицы $\Phi_1^{-1}\Phi_2$ с собственными значениями $\varkappa_i$. Формула (22) очевидна. Лемма доказана.

Из (21) и (22) следует, что первые два столбца матрицы N_3 можно записать в виде

$$\pm r(\varkappa_1\mathbf{l}^1 \oplus \mathbf{l}^1\Phi_1 = \varkappa_2\mathbf{l}^2 \oplus \mathbf{l}^2\Phi_1) = \pm(\varkappa_1\mathbf{l}_1 \oplus \mathbf{l}^1\Phi_1 + \varkappa_2\mathbf{l}_2 \oplus \mathbf{l}^2\Phi_1) \tag{24}$$

где $\mathbf{l}_i = r\mathbf{l}^i$ $(i = 1, 2)$ – вектор $\mathbf{l}^i$, записанный в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Введем векторы $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ по правилу $\boldsymbol{\beta}_i = (b_1, b_2, 0)$, если $\mathbf{l}^i\Phi_1 = (b_1, b_2)$ $(i = 1, 2)$. Из формулы (24) для матрицы N_3 получаем следующее представление:

$$N_3 = \pm(\varkappa_1\mathbf{l}_1 \oplus \beta_1 + \varkappa_2\mathbf{l}_2 \oplus \beta_2) \tag{25}$$

Из (20) и (25) следует, что матрица N представима в виде

$$N = \pm(\varkappa_1\mathbf{l}_1 \oplus \beta_1 + \varkappa_2\mathbf{l}_2 \oplus \beta_2) - N_4 \tag{26}$$

Заметим, что $N_4\mathbf{x} = 0$, если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и вектор $\mathbf{x} = \Sigma x_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ лежит в касательной плоскости к поверхности f в точке Q.

Покажем, что $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ – правые собственные векторы матрицы N. Пусть $\mathbf{l}_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$, $\mathbf{l}^i = (l^{i1}, l^{i2})$ $(i = 1, 2)$. Так как $\mathbf{l}_i = r\mathbf{l}^i$ $(i = 1, 2)$, из явного вида матрицы r получим, что $l^{ij} = l_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$. Это означает выполнение следующих равенств:

$$(\beta_i, \mathbf{l}_j) = (\mathbf{l}^i, \Phi_1 \mathbf{l}^j) = \delta_{ij} \quad (i = 1,2, \quad j = 1,2) \tag{27}$$

Так как $N_4\mathbf{l}_i = 0$ $(i = 1, 2)$, из (26), (27) получаем, что $N\mathbf{l}_i = \pm\, \varkappa_i \mathbf{l}_i$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (или $-\varkappa_1$, $-\varkappa_2$) – есть собственные значения матрицы N. Используя равенства (26), (27), указанное свойство матрицы N_4 и справедливую для любых двух матриц A_1, A_2 размером (3×3) формулу $h(A_1 + A_2) = h(A_1) + h(A_2) + (TrA_1)(TrA_2) - Tr(A_1A_2)$, можно доказать, что выполняются равенства

$$\varkappa_1 \varkappa_2 = h(N)$$

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = TrN \quad (-\varkappa_1 - \varkappa_2 = TrN)$$

Так как по определению величин k_1, k_2 для них также справедливо, что $TrN = k_1 + k_2$, $h(N) = k_1k_2$, то выполняются равенства $N\mathbf{l}_i = k_i\mathbf{l}_i$ $(i = 1, 2)$. Сравнивая их с равенствами $N\mathbf{l}_i = \pm\, \varkappa_i\mathbf{l}_i$ $(i = 1, 2)$, придем к выводу, что матрица N представима в виде

$$N = k_1\mathbf{l}_1 \oplus \beta_1 + k_2\mathbf{l}_2 \oplus \beta_2 - N_4 \tag{28}$$

Для неподвижной поверхности ρ можно сделать аналогичные вычисления. Пусть Ψ – матрица (2×2) первой квадратичной формы, заданной на поверхности ρ в точке Q (элемент матрицы Ψ с индексами (i, j) в предположении, что $\partial\rho / \partial u_3 \neq 0$, равен $\delta_{ij} + (\partial u_3 / \partial u_i)(\partial u_3 / \partial u_j))$; $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ – векторы, лежащие в касательной плоскости к поверхности ρ в точке Q, причем $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i + (\partial u_3 / \partial u_i)\mathbf{r}_3$ $(i = 1, 2)$; $\mathbf{z}^1$, $\mathbf{z}^2$ – векторы главных направлений поверхности ρ в точке Q, записанные в базисе $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ и единичные в метрике Ψ; $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ – это векторы $\mathbf{z}^1$, $\mathbf{z}^2$, записанные в базисе $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$; $\varepsilon_i = (c_1, c_2, 0)$, если $\mathbf{z}^i\Psi = (c_1, c_2)$ $(i = 1, 2)$; M_4 – матрица (3×3), элемент которой с индексами (i, j) равен $(\partial m_i / \partial u_3)(\partial u_3 / \partial u_j)$, если $j = 1, 2$ и равен $-(\partial m_i / \partial u_3)$, если $j = 3$.

После вычислений получим следующее представление матрицы M:

$$M = q_1\mathbf{z}_1 \oplus \epsilon_1 + q_2\mathbf{z}_2 \oplus \epsilon_2 - M_4 \tag{29}$$

Вычисление значения $TrNLML_1$ сводится к вычислению скалярных произведений. С учетом легко проверяемых равенств $TrN_4LM_4L_1 = 0$, $M_4L_1\mathbf{l}_i = 0$, $N_4L\mathbf{z}_i = 0$ $(i = 1, 2)$, из (28), (29) получаем

$$TrNLML_1 = \Sigma k_i q_j Tr(L\mathbf{z}_j \oplus \epsilon_j L_1\mathbf{l}_i \oplus \boldsymbol{\beta}_i) = \Sigma k_i q_j (\boldsymbol{\beta}_i, L\mathbf{z}_j(\epsilon_j, L_1\mathbf{l}_i) \quad (i, j = 1,2) \tag{30}$$

Найдем значение $(\boldsymbol{\beta}_i, L\mathbf{z}_j)$. Так как $(\mathbf{n}, L\mathbf{z}_j) = 0$ и вектор $(\partial a_3 / \partial a_1)\mathbf{e}_1 + (\partial a_3 / \partial a_2)\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ параллелен вектору $\mathbf{n}$, то, представив вектор $L\mathbf{z}_j$ в виде $L\mathbf{z}_j = \Sigma z_{ji}\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2)$, получим

$$z_{j3} = (\partial a_3 / \partial a_1)z_{j1} + (\partial a_3 / \partial a_2)z_{j2}$$

Это означает, что $L\mathbf{z}_j = r\boldsymbol{\mu}^j$, где $\boldsymbol{\mu}^j = (z_{j1}, z_{j2})$. Построенный вектор $\boldsymbol{\mu}^j$ представляет собой вектор $L\mathbf{z}_j$, записанный в базисе $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$. С учетом всего сказанного и по определению вектора $\boldsymbol{\beta}_i$, получим

$$(\boldsymbol{\beta}_i, L\mathbf{z}_j) = (\mathbf{l}^i, \Phi_1\boldsymbol{\mu}^j) = (\mathbf{l}^i, \tau r\boldsymbol{\mu}^j) = (\mathbf{l}_i, L\mathbf{z}_j) \tag{31}$$

Обозначим через φ угол в касательной плоскости между векторами $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{z}_1$. Из (31) получим

$$(\boldsymbol{\beta}_1, L\mathbf{z}_1) = \cos\varphi \tag{32}$$

Аналогично получаются равенства

$$(\boldsymbol\beta_1, L\mathbf{z}_2) = -\sin\varphi,\quad (\boldsymbol\beta_2, L\mathbf{z}_1) = \sin\varphi$$

$$(\boldsymbol\beta_2, L\mathbf{z}_2) = \cos\varphi,\quad (\boldsymbol\epsilon_1, L_1\mathbf{l}_1) = \cos\varphi$$

$$(\boldsymbol\epsilon_2, L_1\mathbf{l}_1) = -\sin\varphi,\quad (\boldsymbol\epsilon_1, L_1\mathbf{l}_2) = \sin\varphi$$

$$(\boldsymbol\epsilon_2, L_1\mathbf{l}_2) = \cos\varphi \tag{33}$$

Подставив значения скалярных произведений, вычисленные в (32), (33) в формулу (30), получим

$$TrNLML_1 = (k_1q_1 + k_2q_2)\cos^2\varphi + (k_1q_2 + k_2q_1)\sin^2\varphi \tag{34}$$

Из формул (19) и (34) найдем

$$2h(V) = (k_1 - q_1)(k_2 - q_2)\cos^2\varphi + (k_1 - q_2)(k_2 - q_1)\sin^2\varphi \tag{35}$$

Из равенств (14) и (35) определим

$$2h(B)(h(V))^2 = \cos^2\varphi((k_1 - q_1)^2 + (k_2 - q_2)^2) + \sin^2\varphi((k_1 - q_2)^2 + (k_2 - q_1)^2) \tag{36}$$

На главные кривизны поверхностей f и ρ в точке контакта наложим следующие ограничения: во все время движения должны выполняться либо условия

$$k_i - q_j > 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{37}$$

либо условия

$$k_i - q_j < 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{38}$$

Согласно формулам (35), (36) выполнение условий (37) или (38) обеспечит выполнение неравенств $h(V) \neq 0$, $h(B) \neq 0$.

Для случая, когда векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ противонаправлены, все вычисления проводятся аналогично. Уравнения движения при условии $h(V_1) \neq 0$ преобразуются к виду

$$h(V_1)\dot{\mathbf{a}} = (V_1 - E(TrV_1))[\boldsymbol\omega, \mathbf{n}],\quad V_1 = N + LML_1$$

Для матриц V_1 и $B_{10} = -(h(V_1))^{-1}P(V_1)\Omega$ получаются формулы

$$2h(V_1) = (k_1 + q_1)(k_2 + q_2)\cos^2\varphi + (k_1 + q_2)(k_2 + q_1)\sin^2\varphi$$

$$2h(B_{10})(h(V_1))^2 = \cos^2\varphi((k_1 + q_1)^2 + (k_2 + q_2)^2) + \sin^2\varphi((k_1 + q_2)^2 + (k_2 + q_1)^2)$$

Если во все время движения будут выполняться либо условия

$$k_i + q_j > 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{39}$$

либо условия

$$k_i + q_j < 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{40}$$

это обеспечит выполнение следующих неравенств:

$$h(V_1) \neq 0,\quad h(B_{10}) \neq 0$$

Свойства матрицы B_{10}: $\mathbf{n}B_{10} = 0$, $B_{10}\mathbf{n} = 0$, $TrB_{10} = 0$ проверяются аналогично.

Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 2. При качении без проскальзывания твердого тела, ограниченного двумерной поверхностью, по неподвижной двумерной поверхности, в случае, когда точка контакта единственна, а градиенты обеих поверхностей в области движения ненулевые, при выполнении во все время движения для главных кривизн подвижной и неподвижной поверхностей в точке контакта либо условий (37), либо условий (38), если векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ сонаправлены и при выполнении либо условий (39), либо условий (40), если векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ противонаправлены, матрица b из уравнений $\dot{\mathbf{a}} = \omega B$ обладает следующими свойствами: $\mathbf{n}B = 0$, $B\mathbf{n} = 0$, $TrB = 0$, $h(B) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронец П.В.* К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил. Киев: Тип. Университета Св. Владимира, 1909. 11 с.
2. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
3. *Татаринов Я.В.* Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 25–33.
4. *Ярощук В.А.* Интегральный инвариант в задаче о качении без скольжения эллипсоида со специальным распределением масс по неподвижной плоскости // Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 54–57.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.

Воткинск

Поступила в редакцию
20.IX.1995