МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 531.391

© 1997 г. В.Г. ВИЛЬКЕ, В.А. СИНИЦЫН

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ КАЧЕНИЯ КОЛЕСА С ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЕРИФЕРИЕЙ

Исследуется процесс качения колеса, состоящего из жесткого диска и деформируемой периферии. Принятая модель динамики детализирует схему пневматика, предложенную ранее в [1]. Дополнительно учтены перемещения периферийного кольца "как целого" относительно диска и негладкость кольца на границе зоны его контакта с основанием, что позволяет оценить влияние инерционных свойств периферии на характеристики движения колеса. Принята во внимание сила тяжести, действующая на материальные точки кольца. В стационарном режиме качения найдены деформации и сопротивление движению.

1. Постановка задачи. Литература по проблеме качения колеса имеется в [1]. Здесь в качестве модели колеса возьмем жесткий динамически симметричный круглый диск и деформируемую периферию. Инерционные свойства периферии представляет однородное тонкое абсолютно гибкое нерастяжимое кольцо, которое в недеформированном состоянии располагается концентрично диску, образуя окружность радиуса r. К периферии относим кольцо и безынерционные соединения, создающие вязкоупругие силы при смещении точек кольца от их положений в недеформированном состоянии системы (в плоскости диска).

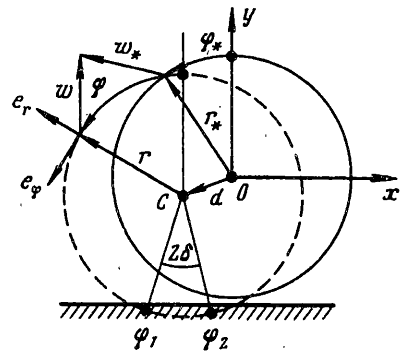
Колесо совершает плоское движение в однородном поле силы тяжести, контактируя без проскальзывания с прямолинейной горизонтальной направляющей. В стационарном движении центр масс колеса движется равномерно и прямолинейно.

Известно, что перемещение элементов деформируемой системы в общем случае можно представить в виде перемещения ее как целого (поступательное перемещение и поворот недеформированной конфигурации) и деформационных перемещений относительно жесткой системы, связанной с недеформированной конфигурацией. Недеформированную конфигурацию кольца, определяющую положение его как целого, далее для сокращения записей будем называть "контуром" (это окружность радиуса r). Для описания движения контура используем средние оси кольца (далее просто средние оси), в которых [2, 3]:

$$\int \mathbf{w}\, dm = 0, \quad \int \mathbf{r}\times\mathbf{w}\, dm = 0 \tag{1.1}$$

Интегрирование в (1.1) ведется по материальным точкам массы dm недеформированного кольца, совмещенного с контуром; $\mathbf{r}$ – радиусы-векторы этих материальных точек относительно центра масс C кольца; $\mathbf{w}$ – векторы деформационных перемещений (фигура). Центр масс C деформированного кольца совпадает с центром контура (см. первое равенство в (1.1)). В общем случае точка C не совпадает ни с центром масс O диска, ни с центром масс колеса. Рассматривая перемещения материальных точек кольца относительно средних осей и осей, жестко связанных с диском, имеем равенство (фигура):

$$\mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{w} = \mathbf{r}_* + \mathbf{w}_* \tag{1.2}$$



Здесь **d** – вектор поступательного перемещения средних осей относительно центра O диска; $\mathbf{r}_*$ – радиусы-векторы материальных точек недеформированного кольца в осях, связанных с диском; $\mathbf{w}_*$ – перемещения материальных точек кольца относительно диска.

Положение материальных точек кольца относительно средних осей зададим вектором **R** в переменных Эйлера с помощью полярной системы координат с полюсом в точке C:

$$\mathbf{R}(\varphi) = (r + u(\varphi))\mathbf{e}_r + v(\varphi)\mathbf{e}_\varphi \tag{1.3}$$

$$\mathbf{r} = (r, \varphi), \quad \mathbf{w} = (u, v)$$

где φ – полярный угол (отсчитываемый от вертикали), u и v – радиальное и поперечное деформационные перемещения, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ – орты полярной системы координат.

Кинематические соотношения, приведенные в [1], сохраняются для координат векторов, входящих в (1.3). С точностью до малых второго порядка по u, v и u', v' (штрих означает дифференцирование по φ) имеем следующие выражения:

условие нерастяжимости кольца

$$u + v' = 0 \tag{1.4}$$

формулы единичного вектора касательной $\boldsymbol{\tau}$ к кривой, совпадающей с деформированным кольцом, и его производной

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} \approx \frac{u' - v}{r}\,\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \tag{1.5}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\mathbf{n} \approx \left(\frac{u'' - v'}{r^2} - \frac{1}{r}\right)\mathbf{e}_r + \frac{u' - v}{r^2}\,\mathbf{e}_\varphi$$

где s – длина дуги кривой, k – кривизна кривой, **n** – единичный вектор главной нормали.

При движении колеса с постоянной скоростью **V** частицы кольца перемещаются вдоль стационарной формы кольца с постоянной по величине скоростью V и их ускорение **W** равно [1]:

$$\mathbf{W}(\varphi) = kV^2\mathbf{n} \approx \frac{V^2}{r}\left[\left(\frac{u'' - v'}{r} - 1\right)\mathbf{e}_r + \frac{u' - v}{r}\,\mathbf{e}_\varphi\right] \tag{1.6}$$

Упругая сила, отнесенная к единице длины кольца, **F** определяется перемещениями $\mathbf{w}_*$ по отношению к диску и в переменных Эйлера с помощью полярных координат с полюсом O представляется в виде

$$\mathbf{F} = -c_1 v_* \mathbf{e}_\varphi^* + c_2(a - u_*)\mathbf{e}_r^*, \quad \mathbf{w}_* = (u_*, v_*) \tag{1.7}$$

где c_1, c_2, a – постоянные (сила $c_2 a\mathbf{e}_r^*$ определяется давлением в пневматике); $\mathbf{e}_r^*, \mathbf{e}_\varphi^*$ – орты полярной системы координат (начало в точке O, полярный угол φ_* отсчитывается от вертикали).

Обозначив через $T(\varphi)\,\boldsymbol{\tau}$ силу натяжения в кольце, имеем уравнение движения элементарного участка кольца при стационарном движении в отсутствие диссипативных сил

$$\rho\mathbf{W} = \mathbf{F}(\varphi) + \frac{1}{r}\left(T(\varphi)\boldsymbol{\tau}(\varphi)\right) + \rho\mathbf{g} \tag{1.8}$$

где ρ – массовая линейная плотность кольца, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения в однородном поле силы тяжести.

Уравнение (1.8) справедливо для точек кольца, находящихся вне зоны его контакта с плоскостью качения. В зоне контакта кольцо имеет участок прямолинейной формы, ускорения точек которого равны нулю. На границе зоны контакта при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ выполняется условие [1]:

$$\mathbf{R}(\varphi_2) - \mathbf{R}(\varphi_1) = (2\pi - \varphi_1 + \varphi_2)\, r\mathbf{e}_x \tag{1.9}$$

где $\mathbf{e}_x$ – орт горизонтальной оси.

Годограф вектора $\mathbf{R}(\varphi)$ непрерывен и на границах $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ может иметь угловые точки. Внутри зоны контакта

$$\boldsymbol{\tau}(\varphi) = \mathbf{e}_x, \qquad d\boldsymbol{\tau} / ds = 0 \tag{1.10}$$

Из выражения для $\boldsymbol{\tau}$ (1.5) следует, что при непрерывности u и v на границе зоны контакта может происходить разрыв функции $u'(\varphi)$.

На точки кольца, находящиеся в зоне контакта действуют силы реакции со стороны плоскости качения. Считаем, что на диск действуют вертикальные силы, имеющие равнодействующую $\mathbf{P} = -P\mathbf{e}_y$, приложенную к оси диска ($P > 0$, $\mathbf{e}_y$ – орт вертикальной оси, направленной вверх).

2. Деформация периферии в стационарном режиме движения. Составляем уравнения движения элементарного участка кольца в проекциях на оси полярной системы координат с ортами $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$. Обозначив через F_r и F_φ проекции вектора $\mathbf{F}(\varphi)$ на оси $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ с учетом выражений (1.5), (1.6) из (1.8) получаем уравнения

$$\rho\frac{V^2}{r}\left(\frac{u'' - v'}{r} - 1\right) = F_r + \frac{T}{r}\left(\frac{u'' - v'}{r} - 1\right) + T'\frac{u' - v}{r^2} - \rho g\cos\varphi, \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{V^2}{r}(u' - v) = F_\varphi + T\frac{u' - v}{r^2} + \frac{T'}{r} + \rho g\sin\varphi$$

Переменные u и v в уравнениях (2.1) согласно (1.1) должны удовлетворять равенствам

$$\int u\cos\varphi\,\mathrm{dm} = \int v\,\sin\varphi\,\mathrm{dm} \tag{2.2}$$

$$\int u\sin\varphi\,\mathrm{dm} = -\int v\,\cos\varphi\,\mathrm{dm}, \qquad \int v\,\mathrm{dm} = 0$$

С учетом равенств (2.2) и вида внешних сил, приложенных к колесу, будем искать решение задачи о деформациях кольца симметричное относительно вертикали ($u(\varphi) = u(-\varphi)$, $v(\varphi) = -v(-\varphi)$). При этом точка C лежит на оси Oy ($\mathbf{d} = d\mathbf{e}_y$); центральный угол, опирающийся на зону контакта делится осью пополам $\delta = \pi - \varphi_1$; поворот средних осей относительно диска равен нулю ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_*$) и проекции упругих сил в (2.1) имеют вид (см. формулы (1.7), (1.2)):

$$F_r = c_2(a - u - d\cos\varphi), \quad F_\varphi = -c_1(v - d\sin\varphi) \tag{2.3}$$

Пусть вертикальная нагрузка и параметры колеса обеспечивают малость угла δ ($\delta \ll 1$). Тогда для симметричного решения $\varphi_2 = -\varphi_1$ из условий (1.9), (1.10) на границе зоны контакта с точностью до членов второго порядка малости имеем

$$(r + u(\varphi_1))\delta - v(\varphi_1) = r\delta$$

$$r^{-1}(u'(\varphi_1 + 0) - v(\varphi_1)) + \delta = 0$$

$$u'(\varphi_1 + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} u'(\varphi_1 + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$$

таким образом

$$v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 0, \quad u'(\varphi_1 + 0) = -u'(\varphi_2 - 0) = -r\delta \tag{2.4}$$

Найдем проекцию d вектора $\mathbf{d}$ на ось Oy. Для этого используем равенство нулю главного вектора внешних сил на диске. К диску приложена внешняя нагрузка $\mathbf{P}$ и силы упругого взаимодействия с кольцом. Соответственно

$$\mathbf{P} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} r d\varphi$$

Отсюда в проекции на ось y имеем

$$0 = -P - \int_0^{2\pi} \left[c_2(a - u - d\cos\varphi)\cos\varphi - c_1(v - d\sin\varphi)\sin\varphi\right] r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= -P + d(c_1 + c_2)\pi r + \int_0^{2\pi} (c_1 + c_2) v \sin\varphi r d\varphi \tag{2.5}$$

Следующая цепочка равенств, учитывающая (2.2) и (1.4):

$$\int_0^{2\pi} v \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} u\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} v'\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -(v\cos\varphi)|_0^{2\pi} -$$

$$-\int_0^{2\pi} v \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} v \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

показывает, что последний интеграл в (2.5) равен нулю.

Таким образом, находим

$$d = P / [\pi r(c_1 + c_2)] \tag{2.6}$$

Следовательно, при рассматриваемой нагрузке перемещение кольца как целого состоит только из параллельного переноса в направление оси y на величину d (2.6).

Получим выражение для вычисления величины δ, характеризующей зону контакта кольца с плоскостью качения. Воспользуемся условием равновесия сил, приложенных к участку кольца в зоне контакта, из которого в проекции на ось Oy имеем

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} (\mathbf{F} + \rho\mathbf{g})\mathbf{e}_y r\,\mathrm{d}\varphi + 2T(\varphi_1 - 0)\boldsymbol{\tau}(\varphi_1 - 0)\mathbf{e}_y + \tag{2.7}$$

$$+P + p = 0, \quad p = 2\pi r\rho$$

Составляем интеграл для упругих сил в (2.7):

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} \mathbf{F}\mathbf{e}_y r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} \left[c_2(a - u - d\cos\varphi)\cos\varphi - c_1(v - d\sin\varphi)\sin\varphi\right] r\,\mathrm{d}\varphi \tag{2.8}$$

При вычислении интеграла (2.8) учтем, что условие нерастяжимости (1.4) и граничные условия для v (2.4) приводят к равенству

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} u\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} v \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

в котором правая сторона согласно теореме о среднем имеет порядок малости δ^2. Второе слагаемое в (2.7) раскроем с помощью формулы (1.5) для вектора $\boldsymbol{\tau}$. После этих действий из (2.7) в линейном приближении по δ получаем уравнение, связывающее угол δ, натяжение $T(\varphi_1 - 0)$ и $u'(\varphi_1 - 0)$, в следующей форме

$$2\delta r(c_2 a + c_2 d + \rho g) + 2T(\varphi_1 - 0)\left(\frac{u'(\varphi_1 - 0)}{r} + \delta\right) = P + p \tag{2.9}$$

Примечание. Заметим, что если принять $u'(\varphi_1 - 0) = u'(\varphi_1 + 0) = -r\delta$ (см. (2.4)) и пренебречь весом кольца и перемещением его как целого ($\rho = 0$ и $d = 0$), то из (2.9) получается формула для δ, используемая в [1]. Однако в этом случае величина δ не зависит от скорости движения, что не отражает известного физического эффекта: с увеличением скорости материального нерастяжимого деформируемого кольца в пределе последнее приобретает свойства абсолютно твердого тела (жесткая круговая форма получается за счет центробежных сил). Абсолютно твердое кольцо имеет контакт с плоскостью в точке, т.е. $\delta = 0$. Поэтому здесь допускаем неравенство $u'(\varphi_1 - 0) \neq u'(\varphi_1 + 0)$, которое соответствует угловой точке годографа $\mathbf{R}(\varphi)$ на границе с зоной контакта.

Представим натяжение в виде суммы двух слагаемых [1]: $T = T_0 + rq$, где $q(\varphi)$ мало вместе со своей производной по φ. Тогда из (2.9) получаем

$$2\delta = \frac{P + p - 2T_0 u'(\varphi_1 - 0)/r}{r(c_2 a + c_2 d + \rho g) + T_0} \tag{2.10}$$

Подставляя выражение T в уравнения (2.1) и линеаризуя их относительно u, v, q и их производных, получаем $T_0 = c_2 a r + \rho V^2$ [1] и уравнения

$$\rho V^2 r^{-2}(u'' - v') = F_r + T_0 r^{-2}(u'' - v') - q - \rho g \cos\varphi \tag{2.11}$$

$$\rho V^2 r^{-2}(u' - v) = F_\varphi + T_0 r^{-2}(u' - v) + q' + \rho g \sin\varphi$$

справедливые для точек кольца вне зоны контакта.

Анализируя поведение величины δ (2.10) в пределе при $V \to \infty$ приходим к выводу, что физическое свойство отмеченное в примечании, отражается формулой (2.10) только при $u'(\varphi_1 - 0) = 0$. Поэтому в число граничных условий включаем равенства $u'(\varphi_1 - 0) = u'(\varphi_2 + 0) = 0$ и для δ имеем формулу

$$\delta = \frac{P + p}{2r(2c_2 a + c_2 d + \rho g) + \rho V^2} \tag{2.12}$$

Формула (2.12) показывает, что малость зоны контакта может быть обеспечена за счет достаточно большого давления в пневматике или большой скорости движения колеса. Увеличение трансверсальной жесткости (коэффициента c_1) приводит к увеличению δ до значений не превышающих некоторого предела (см. формулу (2.12) при $d = 0$). Более сложна зависимость δ от радиальной жесткости c_2. Увеличение радиуса r уменьшает величину δ.

3. Деформации кольца. Найдем деформационные перемещения точек кольца в средних осях. Дифференцируя по φ первое уравнение в (2.11) и складывая результат со вторым уравнением, имеем уравнение

$$c_2 a r^{-1}(u''' - v'' + u' - v) = -F_r' - F_\varphi - 2\rho g \sin\varphi \tag{3.1}$$

Из уравнения (3.1) с помощью соотношений (1.2), (1.4), (2.3) получаем уравнение относительно v:

$$v^{\mathrm{IV}} + 2a_2 v'' + a_0 v = c \sin\varphi \tag{3.2}$$

$$a_0 = 1 + c_1 r/(c_2 a),\quad a_2 = 1 - r/(2a)$$
$$c = r[2\rho g + P/(\pi r)]/(c_2 a)$$

Однородное уравнение

$$v^{IV} + 2a_2 v'' + a_0 v = 0 \tag{3.3}$$

имеет общее решение ($i^2 = -1$)

$$v_0(\varphi) = (A_1 + iA_2)\,\mathrm{sh}(\alpha + i\beta)\varphi + (A_1 - iA_2)\,\mathrm{sh}(\alpha - i\beta)\varphi + \tag{3.4}$$
$$+(A_3 + iA_4)\,\mathrm{ch}(\alpha + i\beta)\varphi + (A_3 - iA_4)\,\mathrm{ch}(\alpha - i\beta)\varphi$$
$$\alpha = [(\sqrt{a_0} - a_2)/2]^{1/2},\quad \beta = \sqrt{a_0 - a_2^2}/(2\alpha),\quad a_0 > a_2^2$$

где $A_k (k = \overline{1,4})$ – произвольные вещественные постоянные; $\pm\alpha \pm i\,\beta$ – корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 2a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \tag{3.5}$$

при условии выполнения неравенства $c_1/c_2 > r/(4a) - 1$. Общее решение неоднородного уравнения (3.2) имеет вид

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + A\sin\varphi \tag{3.6}$$
$$A = c/(1 - 2a_2 - a_0)$$

Функция $u(\varphi)$ согласно (1.4) отыскивается дифференцированием ($u(\varphi) = -v'(\varphi)$). Заметим, что свойства симметрии: четность $u(\varphi)$ и нечетность $v(\varphi)$ – выполняются при $A_3 = A_4 = 0$. Поэтому из четырех граничных условий $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 0$, $u'(\varphi_1 - 0) = u'(\varphi_2 + 0) = 0$ ($\varphi_1 = \pi - \delta$, $\varphi_2 = \pi + \delta$), полученных в п. 2, для нахождения постоянных интегрирования A_1 и A_2 воспользуемся только двумя (при $\varphi = \varphi_1 = \pi - \delta$):

$$\begin{gathered}(A_1 + iA_2)\,\mathrm{sh}(\alpha + i\beta)\varphi_1 + (A_1 - iA_2)\,\mathrm{sh}(\alpha - i\beta)\varphi_1 = -A\delta \\ (A_1 + iA_2)(\alpha + i\beta)^2\,\mathrm{sh}(\alpha + i\beta)\varphi_1 + (A_1 - iA_2)(\alpha - i\beta)^2\,\mathrm{sh}(\alpha - i\beta)\varphi_1 = A\delta\end{gathered} \tag{3.7}$$

Решение системы уравнений (3.7) относительно ($A_1 \pm iA_2$) имеет вид

$$A_1 + iA_2 = \frac{A\delta[(\alpha - i\beta)^2 - 1]}{i\Delta}\,\mathrm{sh}(\alpha - i\beta)\varphi_1 \tag{3.8}$$
$$A_1 - iA_2 = -\frac{A\delta[(\alpha + i\beta)^2 + 1]}{i\Delta}\,\mathrm{sh}(\alpha + i\beta)\varphi_1$$
$$\Delta = 4\alpha\beta(\mathrm{sh}^2\,\alpha\varphi_1 \cos^2\beta\varphi_1 + \mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1 \sin^2\beta\varphi_1)$$

Отсюда получаем выражения для A_1 и A_2:

$$A_1 = -\frac{A\delta}{\Delta}\left[\left(\alpha^2 - \beta^2 + 1\right)\sin\beta\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\alpha\varphi_1 + 2\alpha\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha\varphi_1\cos\beta\varphi_1\right] \tag{3.9}$$
$$A_2 = -\frac{A\delta}{\Delta}\left[\left(\alpha^2 - \beta^2 + 1\right)\mathrm{sh}\,\alpha\varphi_1\cos\beta\varphi_1 - 2\alpha\beta\sin\beta\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\alpha\varphi_1\right]$$

Таким образом, деформации кольца вне зоны контакта описываются функциями

$$v(\varphi) = 2A_1\,\mathrm{sh}\,\alpha\varphi\cos\beta\varphi - 2A_2\sin\beta\varphi\,\mathrm{ch}\,\alpha\varphi + A\sin\varphi \tag{3.10}$$
$$u(\varphi) = -2(A_1\alpha - A_2\beta)\,\mathrm{ch}\,\alpha\varphi\cos\beta\varphi + 2(A_1\beta + A_2\alpha)\,\mathrm{sh}\,\alpha\varphi\sin\beta\varphi - A\cos\varphi$$

Все постоянные параметры в этих выражениях вычисляются по формулам, полученным выше.

Отметим следующие свойства функций u и v в зоне контакта, используемые далее. Функция $u(\varphi)$ на интервале $(\pi-\delta, \pi)$ убывает, а на интервале $(\pi, \pi+\delta)$ возрастает и модуль производной u' не превосходит $r\delta$, причем $u'(\pi)=0$. Функция $v(\varphi)$ на интервале $(\pi-\delta, \pi+\delta)$ согласно (1.5) имеет вид $v = u' + r\sin\varphi$.

4. Диссипация энергии. Сопротивление качению. Рассматриваемую модель дополним свойством диссипации, определяемым функционалом $D[\dot u_*, \dot v_*]$ равным

$$D[\dot u_*, \dot v_*] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(d_1\dot v_*^2 + d_2\dot u_*^2)\,d\varphi$$

где коэффициенты d_1, d_2 считаем малыми, так что возникающие силы вязкого трения малы по сравнению с упругими. Скорости $\dot v_*$, $\dot u_*$ в стационарном режиме

$$\dot v_{**} = -Vr^{-1}(v' - d\cos\varphi),\quad \dot u_* = -Vr^{-1}(u' - d\sin\varphi)$$

При наличии диссипации стационарный режим возможен, если по оси x на диск будет действовать постоянная сила $F_1\mathbf{e}_x$. Малость диссипативных сил означает выполнение неравенств

$$d_1V|v_*'|_{\max} \ll rc_1|v_*|_{\max},\qquad d_2V|u_*'|_{\max} \ll rc_2|u_*|_{\max}$$

Учитывая эти неравенства, можно пренебречь искажением стационарной деформированной формы кольца и воспользоваться при расчете мощности диссипативных сил деформациями, найденными в консервативном случае. Из равенства нулю суммы мощностей диссипативных сил и внешней активной силы $F_1\mathbf{e}_x$ имеем

$$F_1V = \frac{V^2}{r^2}\int_0^{2\pi}\left[d_1(v' - d\cos\varphi)^2 + d_2(u' - d\sin\varphi)^2\right]d\varphi \tag{4.1}$$

Сила сопротивления качению $\mathbf{F}_c = -F_1\mathbf{e}_x$. Найдем зависимость величины сопротивления от скорости движения колеса при малых δ. Интеграл в правой стороне (4.1) является функцией параметра δ, обозначим его $J(\delta)$. Тогда

$$F_c = r^{-2}VJ(\delta) \tag{4.2}$$

Параметр δ определяет разбиение интеграла на две части (вне зоны контакта и в зоне контакта), т.е. от параметра зависят пределы интегрирований; входит параметр также в подынтегральные выражения (например, вне зоны контакта через коэффициенты $A_1(\delta)$, $A_2(\delta)$ (см. формулы (3.9)). С учетом выявленных в п. 2 свойств

$$\int_0^{2\pi} u'\sin\varphi\,d\varphi = 0,\qquad \int_0^{2\pi} v'\cos\varphi\,d\varphi = 0$$

интеграл $J(\delta)$ имеет вид

$$J(\delta) = 2\int_0^{\varphi_1} d_1[v_0' + (A-d)\cos\varphi]^2\,d\varphi + $$
$$+2\int_0^{\varphi_1} d_2[v_0'' - (A-d)\sin\varphi]^2\,d\varphi + 2d_1\int_{\pi-\delta}^{\pi}(u(\varphi_1) - r\delta)^2\,d\varphi \tag{4.3}$$

$$\varphi_1 = \pi - \delta$$

В (4.3) опущено слагаемое порядка δ^3. Учитывая малость δ ограничимся в разложении $J(\delta)$ по степеням δ двумя слагаемыми

$$J(\delta) = J(0) + (\partial J / \partial\delta)_{\delta=0}\delta + \ldots \tag{4.4}$$

Вычисляем $J(0)$. При $\delta = 0$ зона контакта обращается в точку и $A_1(0) = A_2(0) = 0$. Соответственно

$$J(0) = \int\limits_0^{2\pi} \left[d_1(A-d)^2\cos^2\varphi + d_2(A-d)^2\sin^2\varphi\right]d\varphi = \pi(A-d)^2(d_1+d_2) \tag{4.5}$$

Производная от интеграла (4.3) имеет аналитическое выражение, которое здесь не приводится. Подставляя (4.4), (4.5), а также производную от интеграла (4.3) по параметру δ (при $\delta = 0$) и выражение для δ (2.12) в (4.2), получаем силу сопротивления качению

$$F_c = \varkappa V + \chi V / (b + \rho V^2) \tag{4.6}$$

$$\varkappa = \pi r^{-2}(A-d)^2(d_1+d_2)$$

$$\chi = r^{-2}(\partial J / \partial\delta)_{\delta=0}(P+p)$$

$$b = 2r(2c_1a + c_2d + \rho g)$$

Из (4.6) следует, что при больших скоростях зависимость силы сопротивления от скорости асимптотически стремится к линейной с коэффициентом $\varkappa$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вильке В.Г.* О качении вязкоупругого колеса // Изв. АН МТТ. 1993. № 6. С. 11–15.
2. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.
3. *Докучаев Л.В.* Линейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.VI.1995