

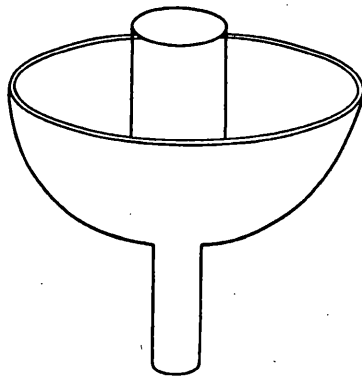
УДК 531.383

© 1997 г. А.А. КИРЕЕНКОВ

## **АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА (ВТГ)**

Разработан алгоритм, позволяющий на основании геометрических и упругих характеристик основного чувствительного элемента ВТГ (полусферического кварцевого резонатора) определять с высокой точностью его собственную частоту колебаний. При моделировании динамики резонатора использовались уравнения теории тонких упругих оболочек, а сам резонатор представлялся как тонкая полусферическая оболочка переменной толщины и переменного радиуса кривизны, один край которой жестко закреплен, а другой свободен от усилий и моментов. Задача об определении собственной частоты колебаний такой оболочки была приведена к краевой задаче на собственные значения для системы восьми обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Для нахождения собственной частоты применялся численный метод Годунова (ортогональной прогонки). Алгоритм реализован в виде пакета прикладных программ, предъявляющего минимальные требования к РС.

**1. Уравнения колебаний ВТГ.** Известно, что основной функциональной частью волнового твердотельного гироскопа является полусферический кварцевый резонатор представляющий из себя тонкую упругую полусферическую оболочку переменной толщины и переменного радиуса кривизны, один край которой жестко закреплен, а другой свободен от усилий и моментов [1] (фиг. 1). Задача о нахождении собственных частот колебаний оболочки вращения хорошо исследована и описана в многочисленных статьях и монографиях, неполный перечень которых занял бы не одну страницу. Для определения собственных частот таких оболочек в настоящее время существуют два основных метода: метод конечных элементов, наиболее часто используемый при различных инженерных расчетах, и метод сведения уравнений теории упругости тонких оболочек вращения к краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод конечных элементов реализован в виде различных коммерческих пакетов программ для ЭВМ и предназначен для решения очень широкого круга инженерных задач, но он не позволяет достаточно полно и с требуемой точностью учесть специфику конструкции ВТГ и является слишком громоздким, неэффективным инструментом для решения данной конкретной задачи. Поэтому для расчета собственной частоты ВТГ целесообразно использовать второй метод, так как для оболочек вращения, срединная поверхность которых образована вращением плоской кривой вокруг прямой, лежащей в той же плоскости, основные уравнения теории упругости значительно



Фиг. 1

упрощаются – в силу требования периодичности по одной из криволинейных координат независимые переменные разделяются и приводят к бесконечному набору систем обыкновенных дифференциальных уравнений, каждая из которых описывает динамику определенной формы колебаний. Приведение этих систем в системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши можно осуществить различными способами. Наиболее удобный для численных расчетов способ был использован в [2].

Использование этого способа, для описания динамики  $n$ -ой формы свободных колебаний оболочки с собственной частотой  $\omega$ , приводит к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2]:

$$dy / d\alpha = Af(\alpha, n, \omega, y) \quad (1.1)$$

относительно вектора  $y = (y_1, \dots, y_8)^T$  – независимых переменных, введенных по формулам [2]:

$$\begin{aligned} y_1 &= S + 2k_2 H, & y_2 &= M_{11}, & y_3 &= T_{11}, & y_4 &= Q_{11} + mH \\ y_5 &= v, & y_6 &= \theta_1, & y_7 &= u, & y_8 &= w \end{aligned} \quad (1.2)$$

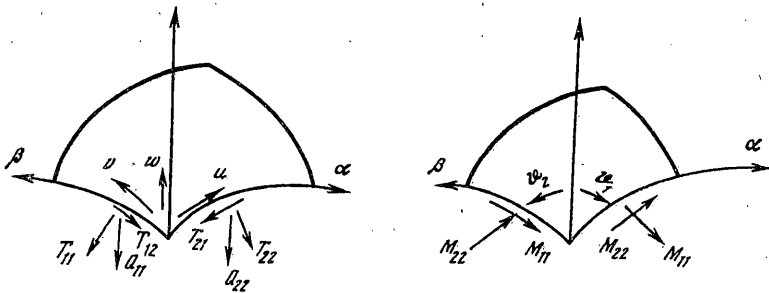
в которой вектор правых частей  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ , при использовании уравнений линейной теории упругости имеет вид (этот вектор получается из соответствующего вектора приведенного в [2] формальным обнулением членов, содержащих величины характеризующие докритическое состояние оболочки):

$$\begin{aligned} f_1 &= -2\psi y_1 + mT_{22} - k_2 Q_{22} - \omega^2 h \nu y_5, & f_2 &= y_4 - \psi(y_2 - M_{22}) - 2mH \\ f_3 &= 2mk_2 H - m y_1 - \psi(y_3 - T_{22}) - k_1 y_4 - \omega^2 h \nu y_7 \\ f_4 &= k_1 y_3 - \psi y_4 + k_2 T_{22} - m(Q_{22} + 2\psi H) - \omega^2 h \nu y_8 \\ f_5 &= E_{12} + \psi y_5 + m y_7, & f_6 &= K_{11}, & f_7 &= E_{11} - k_1 y_8, & f_8 &= -y_6 + k_1 y_7 \end{aligned} \quad (1.3)$$

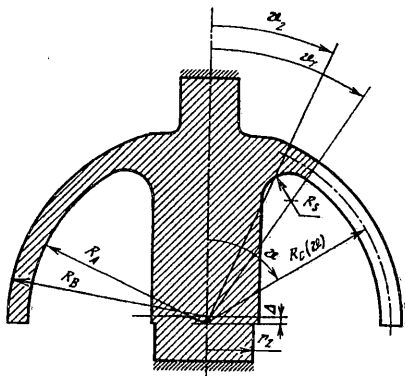
а коэффициенты матрицы правых частей для полусферической, изотропной оболочки в случае использования в качестве координатной поверхности срединной поверхности оболочки имеют, на основании [2], вид

$$\begin{aligned} \theta_2 &= k_2 y_5 + m y_5, & E_{12} &= (y_1 - 4mk_2 D_1 (k_2 y_7 - y_6 - \psi y_8)) / (G_1 + 4k_2^2 D_1) \\ E_{22} &= m y_5 + \psi y_7 + k_2 y_8, & E_{11} &= (y_3 - \nu G E_{22}) / G, & K_{22} &= m \theta_2 + \psi y_6 \\ K_{11} &= (y_2 - \nu D K_{22}) / D, & K_{12} &= k_2 (E_{12} + m y_7) - m (y_6 + \psi y_5), & m &= n / B \\ Q_{22} &= -m M_{22}, & M_{22} &= D (K_{22} + \nu K_{11}), & T_{22} &= G (E_{22} + \nu E_{11}) \\ \psi &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, & H &= 2 D_1 K_{12}, & S &= T_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1}, & G &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \\ H &= M_{12} = M_{21}, & D &= Gh^2 / 12, & G_1 &= G(1 - \nu) / 2, & D_1 &= D(1 - \nu) / 2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

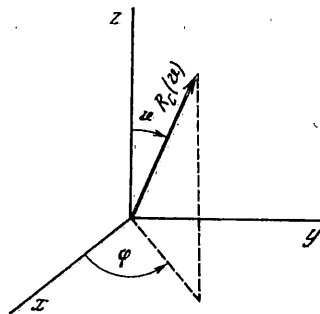
При записи соотношений (1.2)–(1.4), для величин характеризующих упругое состояние оболочки были использованы следующие обозначения:  $\alpha, \beta$  – гауссовы криволинейные координаты срединной поверхности (фиг. 2);  $h$  – толщина оболочки;  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны;  $k_1, k_2$  – главные кривизны;  $A, B$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности;  $L, N$  – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности;  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений оболочки, соответственно, в направлении  $\alpha, \beta$  и вектора внешней нормали к срединной поверхности (фиг. 2);  $\theta_1, \theta_2$  – углы поворота нормали к срединной поверхности (фиг. 2);  $T_{11}, T_{12}$  – нормальные и сдвигающие усилия, действующие в площадке параллельного сечения тела оболочки  $\alpha = \text{const}$ ;  $T_{22}, T_{21}$  – нормальные и сдвигающие усилия, приложенные к площадке нормального сечения  $\beta = \text{const}$  (фиг. 2);  $M_{11}, M_{22}$  – изгибающий и крутящий моменты, приложенные к площадке  $\alpha = \text{const}$ , а  $M_{22}, M_{21}$  – к площадке  $\beta = \text{const}$  (фиг. 2);  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Система (1.1), с правыми частями (1.3) полностью определяет динамику свободных колебаний тонких упругих оболочек вращения, произвольной формы и толщины. Для того, чтобы применить эту систему уравнений для расчета собственной частоты ВТГ необходимо предварительно рассчитать геометрические характеристики серединной поверхности резонатора и задать краевые условия, которые, с учетом обозначений (1.2), представляются равенствами

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0 \quad (1.5)$$

$$y_5 = 0, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = 0, \quad y_8 = 0 \quad (1.6)$$

Краевые условия (1.5) соответствуют свободному, а (1.6) – полностью заземленному краю резонатора.

**2. Геометрические характеристики резонатора.** Основным чувствительный элемент ВТГ – полусферический кварцевый резонатор образован двумя концентрически расположенными сферическими поверхностями, причем центр внешней полусферы смещен относительно центра внутренней полусферы на малую величину  $\Delta$  (фиг. 3). Внутренняя полусфера плавно переходит в цилиндрическую ножку по тороидальной поверхности, которая в сечении имеет вид дуги окружности радиуса  $R_s$ .

В качестве криволинейной системы координат выберем сферическую систему координат, с началом расположенным в центре внутренней полусферы. Тогда, связь сферических координат  $\{R, \vartheta, \varphi\}$  (фиг. 4) точки, принадлежащей серединной поверхности резонатора, с ее декартовыми координатами  $x, y, z$  дается формулами

$$x = R_c(\vartheta) \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = R_c(\vartheta) \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = R_c(\vartheta) \cos \vartheta, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \vartheta \in [0, \pi/2]$$

Зависимость радиуса-вектора срединной поверхности  $R_c$  от полярного расстояния  $\vartheta$  от свободного края резонатора до начала закругления  $\vartheta_1$  (фиг. 3) определяется по формуле

$$R_c(\vartheta) = \frac{1}{2}(R_A + R(\vartheta)), \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \pi/2] \quad (2.1)$$

в которой через  $R_A$  обозначен радиус внутренней полусферы, а через  $R(\vartheta)$  зависимость радиуса-вектора внешней полусферы от полярного расстояния  $\vartheta$  в рассматриваемой системе координат. Эта зависимость находится из уравнения окружности внешней полусферы радиуса  $R_B$ , записанной в системе координат с началом в центре внутренней полусферы

$$(R(\vartheta) \sin \vartheta)^2 + (R(\vartheta) \cos \vartheta - \Delta)^2 = R_B^2 \quad (2.2)$$

Решая уравнение (2.2) относительно  $R(\vartheta)$ , находим

$$R(\vartheta) = \Delta \cos \vartheta + \sqrt{R_B^2 - \Delta^2 \sin^2 \vartheta} \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) в (2.1) дает

$$R_c(\vartheta) = \frac{1}{2} \left( R_A + \Delta \cos \vartheta + \sqrt{R_B^2 - \Delta^2 \sin^2 \vartheta} \right), \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \pi/2] \quad (2.4)$$

где угол  $\vartheta_1$ , характеризующий местоположение начала перехода резонатора в ножку вычисляется по формуле

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2}}{R_A - R_s} \quad (2.5)$$

Зависимость радиуса-вектора срединной поверхности  $R_c$  от полярного расстояния  $\vartheta$  от начала закругления  $\vartheta_1$  до места гладкого перехода закругления в ножку  $\vartheta_2$  (фиг. 3), рассчитывается по формуле

$$R_c(\vartheta) = \frac{1}{2}(r(\vartheta) + R(\vartheta)), \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \quad (2.6)$$

в которой  $R(\vartheta)$  определяется по формуле (2.3), а  $r(\vartheta)$  – радиус-вектор окружности закругления. Зависимость  $r$  от полярного расстояния  $\vartheta$ , находится из уравнения окружности закругления, записанной в рассматриваемой системе координат с началом в центре внутренней полусферы

$$(r(\vartheta) \sin \vartheta - r_2 - R_s)^2 + \left( r(\vartheta) \cos \vartheta - \sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2} \right)^2 = R_s^2 \quad (2.7)$$

Решая уравнение (2.7) относительно  $r(\vartheta)$  и подставляя полученный результат в (2.6), с учетом (2.3) находим

$$\begin{aligned} R_c(\vartheta) = \frac{1}{2} & \left[ (r_2 + R_s) \sin \vartheta + \sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2} \cos \vartheta + \right. \\ & \left. + \left[ R_s^2 - \left( (r_2 + R_s) \cos \vartheta - \sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2} \sin \vartheta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \Delta \cos \vartheta + \sqrt{R_B^2 - \Delta^2 \sin^2 \vartheta} \right] \quad (2.8) \end{aligned}$$

где угол  $\vartheta_2$ , определяющий место окончания резонатора и начало ножки дается формулой

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{r_2}{\sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2}} \quad (2.9)$$

Из формул (2.3) и (2.8) находим зависимость толщины резонатора  $h$  от полярного расстояния  $\vartheta$ :

$$h(\vartheta) = \Delta \cos \vartheta + \sqrt{R_B^2 - \Delta^2 \sin^2 \vartheta} - R_A, \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \pi/2] \quad (2.10)$$

$$h(\vartheta) = \Delta \cos \vartheta + \sqrt{R_B^2 - \Delta^2 \sin^2 \vartheta} - (r_2 + R_s) \sin \vartheta - \left[ R_s^2 - \left( (r_2 + R_s) \cos \vartheta - \sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2 \sin^2 \vartheta} \right)^2 \right]^{1/2} - \sqrt{(R_A - R_s)^2 + (R_s + r_2)^2 \cos^2 \vartheta}, \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2] \quad (2.11)$$

Формула (2.10) определяет  $h(\vartheta)$  от свободного края резонатора до начала перехода в ножку, а (2.11) с начала перехода до ножки.

В соответствии с выбранной системой координат, гауссовы криволинейные координаты серединной поверхности  $\alpha$  и  $\beta$ , использованные в п. 1 для записи уравнений движения, имеют теперь следующий смысл:  $\alpha \equiv \vartheta$ ,  $\beta \equiv \varphi$  и, следовательно, в силу периодичности по  $\varphi$ , динамические свойства  $n$ -й формы колебаний резонатора определяются полярным расстоянием  $\vartheta$ .

Коэффициенты  $A$ ,  $B$  первой и  $L$ ,  $N$  второй квадратичных форм серединной поверхности резонатора находятся по известным формулам [3], при подстановке в которые выражений (2.1), дающих связь декартовых координат серединной поверхности резонатора через ее сферические координаты, необходимо учесть зависимость радиус-вектора от полярного угла. Выполняя эту подстановку, имеем

$$A = \sqrt{R_c^2(\vartheta) + \left( \frac{dR_c(\vartheta)}{d\vartheta} \right)^2}, \quad B = R_c(\vartheta) \sin \vartheta$$

$$L = \frac{1}{A} \left( R_c(\vartheta) \frac{d^2 R_c(\vartheta)}{d^2 \vartheta} - R_c^2(\vartheta) - 2 \left( \frac{dR_c(\vartheta)}{d\vartheta} \right)^2 \right) \quad (2.12)$$

$$N = \frac{B}{A} (R_c(\vartheta) \cos \vartheta - R_c(\vartheta) \sin \vartheta)$$

Из формул (2.12) получаем главные кривизны серединной поверхности резонатора  $k_1$ ,  $k_2$ , а также параметр  $\psi$ :

$$k_1 = \frac{1}{A^3} \left( 2 \left( \frac{dR_c(\vartheta)}{d\vartheta} \right)^2 - R_c^2(\vartheta) - R_c(\vartheta) \frac{d^2 R_c(\vartheta)}{d^2 \vartheta} \right) \quad (2.13)$$

$$k_2 = \frac{1}{AB} \left( R_c(\vartheta) \sin \vartheta - \frac{dR_c(\vartheta)}{d\vartheta} \cos \vartheta \right), \quad \psi = \frac{1}{AB} \left( R_c(\vartheta) \cos \vartheta + \frac{dR_c(\vartheta)}{d\vartheta} \sin \vartheta \right)$$

При дифференцировании в (2.12)–(2.13) по  $\vartheta$  следует считать, что от свободного края до начала закругления  $R_c(\vartheta)$  определяется по формуле (2.4), а от начала закругления до ножки по формуле (2.8).

Таким образом, система (1.1) с правыми частями (1.3), коэффициенты которой рассчитываются по полученным в этом пункте формулам, определяет динамику  $n$ -й формы свободных колебаний резонатора.

**3. Алгоритм расчета собственной частоты.** Как было показано в п. 1, 2, задача об определении собственной частоты ВТГ свелась к решению краевой задачи для системы восьми обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) с крайевыми условиями (1.5), (1.6). При этом считается, что крайевые условия (1.6), соответствующие жесткому закреплению резонатора, выполняются в месте перехода в ножку, т.е. при  $\vartheta = \vartheta_2$ , а крайевые условия (1.5), соответствующие свободному краю резонатора, выполняются при  $\vartheta = \pi/2$ .

При численном решении использовался метод Годунова (ортогональной прогонки) [4]. Для применения этого метода краевые условия (1.5) были представлены в виде

$$C_1 y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

В соответствии с методом Годунова, краевая задача (1.1), (1.5), (1.6) сводится к решению четырех начальных задач Коши для системы (1.1), начальные условия для которых представляют систему линейно независимых векторов  $y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0$ , удовлетворяющих краевым условиям (1.6):

$$y_1^0 = \parallel 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \parallel^T, \quad y_2^0 = \parallel 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \parallel^T \\ y_3^0 = \parallel 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \parallel^T, \quad y_4^0 = \parallel 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \parallel^T \quad (3.2)$$

Применяя для численного решения полученных начальных задач Коши метод Рунге – Кутты – Мерсона [5] и ортонормируя, следуя методу Годунова, на каждом шаге полученную систему векторов по методу Грама – Шмидта [6], получаем, что решение (1.2) с начальными условиями (1.6) на правом краю дается формулой [4]:

$$y\left(\frac{\pi}{2}, \omega, n\right) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i y_i^k\left(\frac{\pi}{2}, \omega, n\right) \quad (3.3)$$

где  $k$  – число точек разбиения отрезка интегрирования,  $y_i^k(\pi/2, \omega, n)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – проортонормированные на свободном краю резонатора решения соответствующих начальных задач Коши, а  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – произвольные постоянные, которые определяются после подстановки ряда (3.3) в краевые условия (3.1) и решения соответствующей системы алгебраических уравнений [4]. Так как в системе (1.2) присутствует один неизвестный параметр – собственная частота  $\omega$ , то подстановка (3.3) в (3.1) дает нам условие для нахождения неизвестной собственной частоты. Оно находится из требования равенства нулю определителя матрицы системы четырех линейных алгебраических уравнений, образующейся в результате этой подстановки

$$\det \begin{vmatrix} y_{11}^k & y_{12}^k & y_{13}^k & y_{14}^k \\ y_{21}^k & y_{22}^k & y_{23}^k & y_{24}^k \\ y_{31}^k & y_{32}^k & y_{33}^k & y_{34}^k \\ y_{41}^k & y_{42}^k & y_{43}^k & y_{44}^k \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

где первый индекс у  $y_{i,j}$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ) означает номер решения соответствующей начальной задачи Коши, а второй номер компоненты этого решения.

Рассматривая (3.4) как алгебраическое уравнение относительно  $\omega$  и решая его получаем первое приближение для собственной частоты. Подставляя найденное число в (1.1) и повторяя описанную выше процедуру находим следующее приближение. Эта процедура повторяется до тех пор пока определитель (3.4) не обратится в ноль с заданной степенью точности. Для численного решения уравнения (3.4) применяется метод деления отрезка пополам [5]. Чтобы применить этот метод численного решения алгебраических уравнений необходимо задать границы интервала, на котором с гарантированной точностью находится корень уравнения (3.4). Эти границы удобно выбирать по следующему правилу:  $\omega_R(1 + \text{tg}^2(\vartheta_2))(1 \pm 0,37)$ , где

$\omega_R$  – релеевское приближение для собственной частоты полусферического резонатора [1]:

$$\omega_R = l(n) \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{3(1+\nu)\rho}}, \quad l(2) = 2,62, \quad l(3) = 7,363, \quad l(4) = 14,231, \dots$$

Данный алгоритм реализован в виде пакета прикладных программ для РС на языке MS-Fortran 5,0, предъявляющего минимальные требования к компьютеру. Входными данными для расчета собственной частоты волнового твердотельного гироскопа являются: модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала резонатора, радиусы внешней и внутренней поверхностей резонатора, а также радиусы закругления и ножки. Равенство нулю определителя (3.4) с точностью  $1 \cdot 10^{-8}$  достигается за 35 итераций. Величина собственной частоты ВТГ, рассчитанная с помощью описанного алгоритма с высокой точностью совпадает с величиной собственной частоты экспериментально измеренной у реального прибора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 375 с.
3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 343 с.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Усп. матем. наук. 1961. Т. XVI. Вып. 3. С. 171–174.
5. Ланс Дж.П. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 208 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.VII.1996