МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 531.38

© 1997 г. А.Н. СИРОТИН

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ В ПОЛОЖЕНИЕ ПОКОЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Исследуется задача оптимальной по быстродействию переориентации сферически-симметричного твердого тела с одновременным торможением начального вращения. Используя симметрию уравнений движения, указано семейство первых интегралов, что позволяет понизить порядок исходной задачи в два раза. Описаны основные геометрические особенности оптимального разворота и указаны два аналитических приближенных решения.

1. Формулировка задачи оптимальной переориентации. Рассмотрим задачу оптимизации по быстродействию маневра пространственной переориентации триэдра, связанного со сферически-симметричным твердым телом, для случая граничных условий, соответствующих нулевой угловой скорости в момент окончания управления. Тело считается абсолютно жестким, а в качестве управления $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ используется главный момент внешних сил, приложенных к телу.

Ориентацию связанной системы координат относительно инерциальной определим с помощью кинематических параметров Родрига – Гамильтона [1–3]: $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_0, \lambda^T) \in \mathbf{S}^3$, где $\lambda_0 \in R$, $\lambda \in R^3$, $\mathbf{S}^{k-1}$ – единичная сфера в R^k. Вращение сферически-симметричного тела с единичным тензором инерции в проекциях на связанные оси описывается уравнениями

$$2\lambda_0^\bullet = -(\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\lambda}), \quad 2\boldsymbol{\lambda}^\bullet = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0 \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}^\bullet = \mathbf{u}, \quad t \in (0,\ T) \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} \in R^3$ вектор угловой скорости. На величину управляющего момента наложено ограничение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leqslant 1 \tag{1.2}$$

Задача $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$: найти управление системой (1.1) при ограничениях (1.2), переводящее вектор состояния из начального положения $\lambda_0(0) = \mu_0$, $\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$ в требуемое конечное $\lambda_0(T) = \eta_0$, $\boldsymbol{\lambda}(T) = \boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\omega}(T) = \mathbf{0}$ за минимальное время T.

Задача $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$ определена для любых $\boldsymbol{\omega}_0 \in R^3$, $(\mu_0, \boldsymbol{\mu}^T) \in \mathbf{S}^3$, $(\eta_0, \boldsymbol{\eta}^T) \in \mathbf{S}^3$. Таким образом $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$ есть задача оптимальной переориентации с одновременным полным торможением. Под допустимым процессом в задаче быстродействия будем понимать совокупность $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, T)$, где $T \in (0, \infty)$ – время окончания процесса, $\mathbf{u}(\cdot) : [0, T] \to R^3$ – допустимое в смысле (1.2) управление, $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})(\cdot) : [0, T] \to \mathbf{S}^3 \times R^3$ – соответствующая траектория, в моменты $t = 0$ и $t = T$ удовлетворяющая граничным условиям, а при $t \in (0, T)$ – уравнениям (1.1). Оптимальным процессом является допустимый с наименьшим T.

Лемма 1. Если $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, T)$ – оптимальный процесс в задаче $\mathbf{P}_1(\xi_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0; 1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, где

$$\xi_0 = \eta_0\mu_0 + (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\xi} = \eta_0\boldsymbol{\mu} - \mu_0\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\eta} \tag{1.3}$$

то процесс $(\lambda_0^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\omega}^\circ, \mathbf{u}^\circ, T^\circ)$ оптимален в $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$, где

$$\lambda_0^\circ = \lambda_0\eta_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\lambda}^\circ = \lambda_0\boldsymbol{\eta} + \eta_0\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\omega}^\circ = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}, \quad T^\circ = T \tag{1.4}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что (1.4) допустимый процесс в $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$. Предположим, что в этой задаче оптимальным является процесс $(\lambda_0', \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{u}', T')$ и $T' < T^\circ$. Покажем, что это невозможно. Действительно, определим $(\lambda_0'', \boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\omega}'', \mathbf{u}'', T'')$ следующим образом:

$$\lambda_0'' = \eta_0\lambda_0' + (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\lambda}'' = \eta_0\boldsymbol{\lambda}' - \lambda_0'\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\lambda}' \times \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}', \quad \mathbf{u}'' = \mathbf{u}', \quad T'' = T'$$

Этот процесс допустим в задаче $\mathbf{P}_1(\xi_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0; 1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ и, так как $T'' = T' < T^\circ = T$, то $(\lambda, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, T)$ не может быть оптимальным. Противоречие.

Поскольку каждой задаче $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$ в силу (1.3) можно поставить в соответствие некоторую задачу $\mathbf{P}_1(\xi_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0; 1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, то, следовательно, вполне можно ограничиться изучением последней и для восстановления решения в исходной задаче пользоваться формулами (1.4). Задача быстродействия $\mathbf{P}_1(\xi_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0; 1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, в отличие от $\mathbf{P}_1(\mu_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_0; \eta_0, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{0})$, предполагает в конечный момент не только полного торможения исходного вращения, но и точного совмещения связанной и инерциальной систем координат.

Задача $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$: найти управление системой (1.1) при ограничениях (1.2), переводящее вектор состояния из начального многообразия $(\boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{\lambda}(0)) = a^2$, $(\boldsymbol{\omega}(0), \boldsymbol{\omega}(0)) = b^2$, $(\boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{\omega}(0)) = c$ в требуемое конечное положение $(\boldsymbol{\lambda}(T), \boldsymbol{\lambda}(T)) = (\boldsymbol{\omega}(T), \boldsymbol{\omega}(T)) = (\boldsymbol{\lambda}(T), \boldsymbol{\omega}(T)) = 0$ за минимальное время T.

В силу неравенства Коши – Буняковского задача $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$: определена для всех $a, b, c \in R$, удовлетворяющих условию $a^2b^2 - c^2 \geqslant 0$. В отличие от $\mathbf{P}_1$, здесь определению подлежит также и начальное положение. Ясно, что если $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, T)$ оптимальный процесс в задаче $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$, то процесс $(\lambda_0, B\boldsymbol{\lambda}, B\boldsymbol{\omega}, B\mathbf{u}, T)$ для произвольной матрицы $B \in SO(3)$ также оптимален в этой же задаче.

Лемма 2. Пусть $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, T)$ оптимальный процесс в задаче $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$, где

$$a^2 = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}), \quad b^2 = (\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_0), \quad c = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0), \quad a^2 + b^2 > 0$$

Тогда найдется по крайней мере одна матрица $B \in SO(3)$, удовлетворяющая условиям $\boldsymbol{\xi} = B\boldsymbol{\lambda}(0)$, $\boldsymbol{\omega}_0 = B\boldsymbol{\omega}(0)$, для которой процесс $(\lambda_0^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\omega}^\circ, \mathbf{u}^\circ, T^\circ)$ оптимален в задаче $\mathbf{P}_1(\xi_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0; 1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, где $\lambda_0^\circ = \lambda_0$, $\boldsymbol{\lambda}^\circ = B\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}^\circ = B\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{u}^\circ = B\mathbf{u}$, $T^\circ = T$.

Доказательство. По построению $\widehat{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_0} = \pm\widehat{\boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{\omega}(0)}$, $|\boldsymbol{\xi}| = |\boldsymbol{\lambda}(0)|$, $|\boldsymbol{\omega}_0| = |\boldsymbol{\omega}(0)|$ и, следовательно, существование требуемой матрицы $B \in SO(3)$ очевидно. Оптимальность процесса $(\boldsymbol{\lambda}_0^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\omega}^\circ, \mathbf{u}^\circ, T^\circ)$ доказывается также как и в лемме 1.

Таким образом, в действительности достаточно ограничиться исследованием задачи $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$, а решения остальных задач следуют из лемм 1 и 2. Решения задач оптимального управления будем искать в классе кусочно-непрерывных управлений.

2. Первые интегралы и геометрия оптимального разворота. Псевдогамильтониан для задачи быстродействия $\mathbf{P}_2$ имеет вид

$$H^*(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}; \Psi_0, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{u}) = -1 + \tfrac{1}{2}(-(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda})\Psi_0 + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Psi})\lambda_0 + (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega})) + (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{u})$$

где $\Psi_0 \in R$, $\boldsymbol{\Psi} \in R^3$, $\boldsymbol{\gamma} \in R^3$ – сопряженные переменные, соответствующие λ_0, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы

$$2\Psi_0^{\bullet} = -(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Psi}), \quad 2\boldsymbol{\Psi}^{\bullet} = \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\omega} + \Psi_0 \boldsymbol{\omega}, \quad 2\boldsymbol{\gamma}^{\bullet} = -(\lambda_0 \boldsymbol{\Psi} - \Psi_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\lambda}) \tag{2.1}$$

Введем обозначение

$$\mathbf{s} = \lambda_0 \boldsymbol{\Psi} - \Psi_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\lambda} \tag{2.2}$$

тогда из (1.1) и (2.1), используя тождество Якоби для векторного произведения, получаем

$$\mathbf{s}^{\bullet} = \mathbf{s} \times \omega, \quad t \in (0, T) \tag{2.3}$$

и, следовательно, $|\mathbf{s}(t)| = \text{const}$.

Покажем, что на оптимальной траектории $|\boldsymbol{\gamma}(t)| > 0$ почти всюду для $t \in [0, T]$. Действительно, если $|\boldsymbol{\gamma}(t)| = 0$ при $t \in (t_1, t_2) \subset [0, T]$, то в силу (2.1), (2.3) и непрерывности имеем $|\mathbf{s}(t)| = 0$, $t \in [0, T]$, а поэтому и $|\boldsymbol{\gamma}(t)| = 0$, $t \in [0, T]$. Полученное вступает в противоречие с требованием равенства нулю гамильтониана.

Из условия максимума $H^*(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}; \Psi_0, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{u})$ по вектору управления, с учетом (1.2), следует $\mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}/|\boldsymbol{\gamma}|$, $|\boldsymbol{\gamma}| > 0$. Это позволяет сделать вывод о том, что для оптимального решения прямая (1.1) и сопряженная (2.1) системы при всех $t \in (0, T)$, когда $|\boldsymbol{\gamma}(t)| > 0$, образуют систему независящих явно от времени канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$H(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}; \Psi_0, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\gamma}) = -1 + \tfrac{1}{2}(-(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda})\Psi_0 + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Psi})\lambda_0 + (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega})) + |\boldsymbol{\gamma}| \tag{2.4}$$

или подробнее

$$\begin{aligned}
&\lambda_0^{\bullet} = \partial H / \partial \Psi_0 = -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}), \qquad \Psi_0^{\bullet} = -\partial H / \partial \lambda_0 = -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Psi}) \\
&\boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = \partial H / \partial \boldsymbol{\Psi} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0 \boldsymbol{\omega}), \qquad \boldsymbol{\Psi}^{\bullet} = -\partial H / \partial \boldsymbol{\lambda} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\omega} + \Psi_0 \boldsymbol{\omega}) \\
&\boldsymbol{\omega}^{\bullet} = \partial H / \partial \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}/|\boldsymbol{\gamma}|, \qquad \boldsymbol{\gamma}^{\bullet} = -\partial H / \partial \boldsymbol{\omega} = -\tfrac{1}{2}(\lambda_0 \boldsymbol{\Psi} - \Psi_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\lambda})
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ясно, что при всех $t \in (0, T)$, таких что $|\boldsymbol{\gamma}(t)| > 0$, решения (2.5) бесконечно дифференцируемы. Наконец, поскольку рассматривается задача $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$, то на левом конце должны выполняться условия трансверсальности [4, 5], которые в данном случае имеют вид

$$\boldsymbol{\Psi}(0), \boldsymbol{\gamma}(0) \in \text{span}\,(\boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{\omega}(0)) \tag{2.6}$$

где span $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ – линейная оболочка векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in R^k$.

Лемма 3. Гамильтонова система (2.4)–(2.5) имеет первые интегралы

$$\lambda_0^2 + (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}) = 1, \quad \Psi_0^2 + (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}) = \sigma_0^2 + (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \text{const} \geqslant 0 \tag{2.7}$$

$$\lambda_0 \boldsymbol{\Psi} - \Psi_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} = \text{const} \in R^3, \quad \lambda_0 \Psi_0 + (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Psi}) = \sigma_0 - \text{const} \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

$$-1 + \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}) + |\boldsymbol{\gamma}| = 0 \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{2.10}$$

Доказательство. Первая группа интегралов (2.7) следует из свойств кинематических дифференциальных уравнений и определения параметров Родрига – Гамильтона. Интегралы (2.8) – это формулы умножения кватернионов [1–3], а (2.9) – условие постоянства и равенства нулю гамильтониана на оптимальной траектории.

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T \in \mathbf{S}^2$, $S(\mathbf{e}) \in R^{3\times 3}$ – кососимметричная матрица

$$S(\mathbf{e}) = \begin{Vmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Тогда ортогональная матрица $B(\varepsilon, \mathbf{e}) \in SO(3)$ имеет представление $B(\varepsilon, \mathbf{e}) = \exp(\varepsilon S(\mathbf{e}))$, где $\varepsilon \in R$ угол эквивалентного поворота, e – собственный вектор $B(\varepsilon, \mathbf{e})$, определяющий направление оси вращения. Выберем произвольно $\mathbf{e} \in \mathbf{S}^2$ и на однопараметрической группе матриц $B(\varepsilon)$ рассмотрим функцию

$$h(\varepsilon) = H(\lambda_0,\ B(\varepsilon)\boldsymbol{\lambda},\ B(\varepsilon)\boldsymbol{\omega};\ \Psi_0,\ B(\varepsilon)\boldsymbol{\Psi},\ B(\varepsilon)\boldsymbol{\gamma})$$

где $H(\cdots)$ – гамильтониан (2.4). Непосредственно проверяется инвариантность (2.4) относительно такого преобразования, т.е. $h(\varepsilon) = \mathrm{const}$, $\varepsilon \in R$. Таким образом,

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}h(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Откуда

$$\left(\mathbf{e},\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega})\right) = 0$$

В силу произвольности $\mathbf{e} \in \mathbf{S}^2$ получаем $\boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} = \mathrm{const} \in R^3$, а из условий $\boldsymbol{\lambda}(T) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ следует (2.10). Лемма доказана.

Прибавляя к первому равенству (2.8) интеграл (2.10), с учетом обозначения (2.2), получаем равенство $\mathbf{s} + 2\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}$, откуда сразу же следует

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}),\quad (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}) \tag{2.11}$$

Подстановка (2.11) и (2.9) приводит к другому виду гамильтониана: $-1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}) + |\boldsymbol{\gamma}| = 0$.

Интегралы (2.8) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно Ψ_0, $\boldsymbol{\Psi}$. Эта система всегда имеет единственное решение

$$\Psi_0 = \lambda_0\sigma_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}),\quad \boldsymbol{\Psi} = \sigma_0\boldsymbol{\lambda} + \lambda_0\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\lambda} \tag{2.12}$$

и поэтому из (2.2) следует в частности

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + 2\lambda_0\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\sigma}),\quad |\mathbf{s}| = |\boldsymbol{\sigma}| \tag{2.13}$$

Можно показать, что не теряя общности всегда можно положить $\sigma_0 = 0$.

Лемма 4. (*A*). Существует, возможно не единственный, постоянный единичный вектор $\mathbf{c} = \mathrm{const} \in \mathbf{S}^2$ такой, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ векторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}(t)$ ортогональны $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}^{\bullet}) = 0$$

(*B*). Пусть $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{c}\times\boldsymbol{\lambda} + \lambda_0\mathbf{c}$, тогда для всех $t \in [0, T]$ верно уравнение

$$2\boldsymbol{\zeta}^{\bullet} = \boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{\omega},\quad \boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{S}^2$$

и равенства

$$(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Psi}) = 0 \tag{2.14}$$

Доказательство. (*A*). Если $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, то решение (2.5) – плоский разворот и утверждение очевидно. Если $|\boldsymbol{\sigma}| > 0$, то подставляя (2.12) в (2.10) и умножая скалярно на $\boldsymbol{\omega}$, получаем

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\omega}, \lambda_0\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\omega} + \lambda_0\boldsymbol{\omega})) = 2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}) = 0$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}$ расположены в одной плоскости, которая ортогональна некоторому вектору $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) \in \mathrm{S}^2$. Дифференцируя равенства $(\mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}^{\bullet}) = 0$ и учитывая условие $(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 1$, получаем $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c}^{\bullet}) = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{c}^{\bullet}) = (\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\bullet}) = 0$, $t \in [0, T]$, что представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\mathbf{c}^{\bullet}$. Она всегда имеет тривиальное решение $\mathbf{c}^{\bullet} = 0$, которое является единственным если $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ неколлинеарны.

Утверждение (B) проверяется непосредственно.

Из (2.12), (2.13) следуют равенства

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}), \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Psi}) = (\mathbf{s}, \boldsymbol{\Psi}) \tag{2.15}$$

Если $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| > 0$, то вектор $\mathbf{c} \in \mathrm{S}^2$ определяется с точностью до знака

$$\mathbf{c} = \pm \frac{\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\lambda}^{\bullet}(0)}{|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\lambda}^{\bullet}(0)|}$$

Пусть параметрам λ_0, $\boldsymbol{\lambda}$ соответствует матрица вращения $A \in SO(3)$, тогда справедливы равенства

$$(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = (A\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad (\mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma}) = (A\mathbf{c}, \mathbf{s}) = 0 \tag{2.16}$$

Для более наглядного описания геометрии оптимального вращения определим семейство плоскостей, проходящих через начало координат (неподвижную точку). Пусть Π_0 – плоскость ортогональная вектору $\mathbf{c}$, неподвижная в связанной системе координат (вращение с угловой скоростью $\mathbf{o}$); Π_1 – плоскость ортогональная вектору $A\mathbf{c}$, неподвижная в инерциальной системе отсчета (вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$); $\Pi_{1/2}$ плоскость ортогональная вектору $\boldsymbol{\zeta}$ (вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$). Тогда оптимальное вращение обладает следующими свойствами:

Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ находится на пересечении плоскостей Π_0 и Π_1, неподвижных относительно связанной и инерциальной системе соответственно, (2.16);

векторы $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^{\bullet}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\Psi}$ компланарны и расположены в плоскости $\Pi_{1/2}$, (2.14);

плоскости Π_0 и Π_1 симметричны относительно $\Pi_{1/2}$, (2.11) и (2.15).

3. Плоский разворот. Выберем в R^3 правый ортонормированный базис следующим образом: первые два орта расположим в плоскости $\Pi_{1/2}$, а третий совместим с $\boldsymbol{\zeta}(t)$. Тогда в силу (2.14) в таком базисе все третьи координаты векторов $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\gamma}$ тождественно равны нулю. Пусть матрица $D(t) \in SO(3)$ есть решение дифференциального уравнения

$$D^{\bullet} = -\tfrac{1}{2} S(\boldsymbol{\omega}) D, \quad t \in (0, T) \tag{3.1}$$

с начальным условием $D(0) = D_0$:

$$(\mathbf{k}, D_0^T \boldsymbol{\lambda}(0)) = (\mathbf{k}, D_0^T \boldsymbol{\omega}(0)) = (\mathbf{k}, D_0^T \boldsymbol{\Psi}(0)) = (\mathbf{k}, D_0^T \boldsymbol{\gamma}(0)) = 0 \tag{3.2}$$

где $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$. Матрица D_0 из (3.2) в силу леммы 4 существует всегда. Определим новые переменные:

$$\begin{matrix} \lambda_0^{\vee} = \lambda_0 \\ \Psi_0^{\vee} = \Psi_0 \end{matrix}; \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\vee} \\ 0 \end{pmatrix} = D^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^{\vee} \\ 0 \end{pmatrix} = D^T \boldsymbol{\omega}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{\vee} \\ 0 \end{pmatrix} = D^T \boldsymbol{\Psi}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\vee} \\ 0 \end{pmatrix} = D^T \boldsymbol{\gamma} \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\lambda}^{\vee}$, $\boldsymbol{\omega}^{\vee}$, $\boldsymbol{\Psi}^{\vee}$, $\boldsymbol{\gamma}^{\vee} \in R^2$. Дифференцируя (3.3) с учетом (3.1), (2.5) и (2.10), получаем гамильтонову систему

$$\begin{aligned} &\lambda_0^{\vee\bullet} = -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{\vee}, \boldsymbol{\lambda}^{\vee}), \quad \Psi_0^{\vee\bullet} = -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{\vee}, \boldsymbol{\Psi}^{\vee}), \quad \boldsymbol{\lambda}^{\vee\bullet} = \tfrac{1}{2}\lambda_0^{\vee}\boldsymbol{\omega}^{\vee} \\ &\boldsymbol{\Psi}^{\vee\bullet} = \tfrac{1}{2}\Psi_0^{\vee}\boldsymbol{\omega}^{\vee}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\vee\bullet} = \boldsymbol{\gamma}^{\vee}/|\boldsymbol{\gamma}^{\vee}|, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\vee\bullet} = -\tfrac{1}{2}(\lambda_0^{\vee}\boldsymbol{\Psi}^{\vee} - \Psi_0^{\vee}\boldsymbol{\lambda}^{\vee}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

с функцией Гамильтона

$$H^\vee = -1 + \tfrac{1}{2}(\lambda_0^\vee \boldsymbol{\Psi}^\vee - \Psi_0^\vee \boldsymbol{\lambda}^\vee,\ \boldsymbol{\omega}^\vee) + |\boldsymbol{\gamma}^\vee| = 0 \tag{3.5}$$

Особенностью полученной системы канонических уравнений (3.4) является отсутствие, по сравнению с (2.5), в правых частях нелинейных слагаемых типа векторного произведения. Отметим, что преобразование (3.1)–(3.3) сохраняет для гамильтоновой системы (3.4), (3.5) соответствующие проекции первых интегралов системы (2.4), (2.5):

$$(\lambda_0^\vee)^2 + (\boldsymbol{\lambda}^\vee,\ \boldsymbol{\lambda}^\vee) = 1, \quad (\Psi_0^\vee)^2 + (\boldsymbol{\Psi}^\vee,\ \boldsymbol{\Psi}^\vee) = \mathrm{const} \geqslant 0$$

$$\lambda_0^\vee \Psi_0^\vee + (\boldsymbol{\lambda}^\vee,\ \boldsymbol{\Psi}^\vee) = \sigma_0 = \mathrm{const}, \quad \Psi_1^\vee \lambda_2^\vee - \Psi_2^\vee \lambda_1^\vee + \gamma_1^\vee \omega_2^\vee - \gamma_2^\vee \omega_1^\vee = 0$$

Теорема. Если $a^2b^2 - c^2 = 0$, то решение задачи $\mathbf{P}_2(a^2, b^2, c; 0, 0, 0)$ есть вращение относительно неподвижной оси (плоский разворот).

Доказательство. Если $a^2b^2 - c^2 = 0$, то $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| = |\boldsymbol{\lambda}^\vee(0) \times \boldsymbol{\omega}^\vee(0)| = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{\lambda}^\vee(0)$ и $\boldsymbol{\omega}^\vee(0)$ коллинеарны некоторому вектору $\mathbf{e} \in \mathrm{S}^2$. Пусть $L_\mathbf{e}$ соответствующее одномерное линейное подпространство, порожденное этим вектором. Из условий трансверсальности (2.6) получаем $\boldsymbol{\Psi}^\vee(0),\ \boldsymbol{\gamma}^\vee(0) \in \mathrm{span}\,(\boldsymbol{\lambda}^\vee(0),\ \boldsymbol{\omega}^\vee(0))$ и поэтому

$$\boldsymbol{\lambda}^\vee(0),\ \boldsymbol{\omega}^\vee(0),\ \boldsymbol{\Psi}^\vee(0),\ \boldsymbol{\gamma}^\vee(0) \in L_\mathbf{e} \tag{3.6}$$

Система дифференциальных уравнений (3.4) обладает следующим свойством: почти всюду на $[0, T]$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо включение

$$\boldsymbol{\lambda}^{\vee(n)}(t),\ \boldsymbol{\omega}^{\vee(n)}(t),\ \boldsymbol{\Psi}^{\vee(n)}(t),\ \boldsymbol{\gamma}^{\vee(n)}(t) \in \mathrm{span}\,(\boldsymbol{\lambda}^\vee(t),\ \boldsymbol{\omega}^\vee(t),\ \boldsymbol{\Psi}^\vee(t),\ \boldsymbol{\gamma}^\vee(t)) \tag{3.7}$$

Используя формулу Тейлора, можно показать, что для системы со свойством (3.7) верна импликация

$$\mathrm{span}\,(\boldsymbol{\lambda}^\vee(0), \boldsymbol{\omega}^\vee(0), \boldsymbol{\Psi}^\vee(0), \boldsymbol{\gamma}^\vee(0)) = L_e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{span}\,(\boldsymbol{\lambda}^\vee(t), \boldsymbol{\omega}^\vee(t), \boldsymbol{\Psi}^\vee(t), \boldsymbol{\gamma}^\vee(t)) = L_\mathbf{e}, \quad t \in [0,\ T]$$

Таким образом, в силу (3.6) получаем $|\boldsymbol{\lambda}^\vee(t) \times \boldsymbol{\omega}^\vee(t)| = 0$ и поэтому $|\boldsymbol{\lambda}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)| = 0$, что и означает вращение относительно неподвижной оси. Наконец, поскольку все экстремали (2.5) для начального условия $a^2b^2 - c^2 = 0$ плоские вращения, то оптимальный разворот также плоский.

Следствие 1. Если $|\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\omega}_0| = 0$, то решение задачи $\mathbf{P}_1(\xi_0,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\omega}_0;\ 1,\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$ – плоский разворот.

Следствие 2. Если $a^2b^2 - c^2 > 0$, то никакая часть оптимальной траектории не может быть плоским вращением, т.е. если $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| > 0$, то $|\boldsymbol{\lambda}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)| > 0$ при $t \in [0, T)$.

Действительно, если $\tau \in (0, T)$ и $|\boldsymbol{\lambda}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau)| = 0$, то рассуждения, аналогичные доказательству теоремы, приводят к выводу $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| = a^2b^2 - c^2 = 0$. Противоречие.

Наконец, заметим, что равенство $\boldsymbol{\sigma} = 0$ возможно только если $a^2b^2 - c^2 = 0$.

4. Качественный анализ оптимальной траектории. *Лемма 5.* Если $a^2b^2 - c^2 > 0$, т.е. $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| > 0$, то

$$|\boldsymbol{\gamma}(t)| > 0, \quad t \in [0, T]; \quad |\boldsymbol{\gamma}(T)| = 1$$

Доказательство. В силу следствия 2 теоремы векторы $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ при $t \in [0, T)$ неколлинеарны и образуют базис на плоскости $\Pi_{1/2}$. Поэтому из (2.10) получаем

$$\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathrm{span}\,(\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t)), \quad t \in [0, T) \tag{4.1}$$

Предположим, что найдется $\tau \in [0, T)$ такое, что $|\boldsymbol{\gamma}(\tau)| = 0$. Тогда по определению линейной оболочки из (4.1) имеем

$$0 = x_1(\tau)\boldsymbol{\lambda}(\tau) + x_2(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau), \quad x_1(\tau), x_2(\tau) \in R$$

и поэтому $|\boldsymbol{\lambda}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau)| = 0$. Противоречие. Равенство $|\boldsymbol{\gamma}(T)| = 1$ следует из краевых условий $|\boldsymbol{\lambda}(T)| \times |\boldsymbol{\omega}(T)| = 0$ и равенства гамильтониана.

Поскольку точки разрыва (переключения) управления совпадают с моментами обращения $|\boldsymbol{\gamma}(t)|$ в нуль, то заключаем: если $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| > 0$, то переключений управления нет, а гамильтоновы системы (2.5) и (3.4) бесконечно дифференцируемы для всех $t \in (0, T)$. Для вырожденного случая $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| = 0$ плоского разворота, согласно известной теореме [4], получаем, что число переключений не более одного, т.к. задача преобразуется в линейную 2-го порядка. Поэтому, если N – число точек разрыва управления на $[0, T]$, то

$$0 \leqslant N \leqslant 2 - \dim \operatorname{span}(\boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{\omega}(0))$$

Лемма 6. Пусть $a^2b^2 - c^2 > 0$, т.е. $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| > 0$; $\boldsymbol{\gamma}(T) = \varkappa \in \mathbf{S}^2$, $\boldsymbol{\sigma}$ – ненулевой вектор из леммы 3. Тогда

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}(T-0)}{|\boldsymbol{\lambda}(T-0)|} = \lambda_0(T)\varkappa, \quad \frac{\boldsymbol{\omega}(T-0)}{|\boldsymbol{\omega}(T-0)|} = -\varkappa \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\Psi}(T) = \lambda_0(T)\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathrm{s}(T) = \boldsymbol{\sigma} \tag{4.3}$$

$$|\varkappa \times \boldsymbol{\sigma}| > 0 \tag{4.4}$$

Доказательство. Покажем сначала, что если $\mathbf{f}(\cdots) : [0, T] \to R^3$ произвольная непрерывная вместе со своей производной в левой окрестности точки $\tau \in (0, T]$ функция такая, что $\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{0}$, и в этой окрестности она имеет производную не равную нулю, то

$$\frac{\mathbf{f}(\tau-0)}{|\mathbf{f}(\tau-0)|} = -\frac{\mathbf{f}^\bullet(\tau-0)}{|\mathbf{f}^\bullet(\tau-0)|} \tag{4.5}$$

Действительно, имеем

$$|\mathbf{f}^\bullet(\tau-0)| = \lim_{\substack{t\to\tau \\ t<\tau}} ((\mathbf{f}(t), \ \mathbf{f}(t))^{1/2})^\bullet = \lim_{\substack{t\to\tau \\ t<\tau}} \left(\frac{\mathbf{f}(t)}{|\mathbf{f}(t)|}, \ \mathbf{f}^\bullet(t) \right) = \lim_{\substack{t\to\tau \\ t<\tau}} |\mathbf{f}^\bullet(t)| \cos(\widehat{\mathbf{f}(t), \mathbf{f}^\bullet(t)})$$

По условию $\mathbf{f}(\tau) = 0$ и, следовательно, $\mathbf{f}(\tau - \delta) = -\delta\mathbf{f}^\bullet(\tau - 0) + o(\delta)$, $\delta > 0$.
Тогда

$$\lim_{\substack{t\to\tau \\ t<\tau}} \cos(\widehat{\mathbf{f}(t), \mathbf{f}^\bullet(t)}) = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \cos(\widehat{\mathbf{f}^\bullet(\tau-\delta), \ -\delta\mathbf{f}^\bullet(\tau-0) + o(\delta)}) =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \cos(\widehat{\mathbf{f}^\bullet(\tau-\delta), \ -\mathbf{f}^\bullet(\tau-0) + o(\delta)/\delta}) = -1$$

Таким образом, для каждой координаты $f(\cdots)$ выполнены условия правила Лопиталя, откуда и следует (4.5).

Теперь (4.2) следует из (4.5) и (2.5); (4.3) – из (2.12) и (2.13), а (4.4) эквивалентно следствию 2 теоремы.

Ясно, что $|\varkappa \times \boldsymbol{\sigma}| = 0$ равносильно равенству $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| = 0$. Принимая во внимание следствие 2 теоремы и леммы 3, 6, получаем

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{\lambda}(t), \ \boldsymbol{\omega}(t), \ \boldsymbol{\Psi}(t), \ \boldsymbol{\gamma}(t)) = \begin{cases} \operatorname{span}(\boldsymbol{\lambda}(t), \ \boldsymbol{\omega}(t)), & t \in [0, T) \\ \operatorname{span}(\varkappa, \ \boldsymbol{\sigma}), & t = T \end{cases}$$

Откуда

dim span ($\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\Psi}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$) = dim span ($\boldsymbol{\lambda}(0)$, $\boldsymbol{\omega}(0)$), $t \in [0, T]$

Наконец, используя (2.6) и лемму 6, можно получить следующие соотношения:

$$\lim_{\substack{t\to T\\ t<T}} \frac{|\boldsymbol{\omega}(t)|^2}{2|\boldsymbol{\lambda}(t)|} = 1, \quad \lim_{\substack{t\to T\\ t<T}} \frac{\sin(\widehat{\boldsymbol{\gamma}(t), \ \boldsymbol{\omega}(t)})}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} = \frac{1}{2}\lambda_0(T)|\boldsymbol{\sigma}|\sin \widehat{\boldsymbol{\sigma}, \ \varkappa}$$

5. Понижение размерности задачи и аналитические приближения. Рассмотрим задачу быстродействия

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\vee}(0) \\ \boldsymbol{\lambda}_0^{\vee}(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nu} \in S^2; \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\lambda}^{\vee\bullet} = \tfrac{1}{2}\lambda_0^{\vee}\boldsymbol{\omega}^{\vee}, \\ \boldsymbol{\lambda}_0^{\vee\bullet} = -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda}^{\vee}, \ \boldsymbol{\omega}^{\vee}) \end{matrix} \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\vee}(T) = 0 \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\vee}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}^{\vee\bullet} = \mathbf{u}^{\vee}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\vee}(T) = 0$$

$$(\lambda_0^{\vee})^2 + \boldsymbol{\lambda}^{\vee}, \ \boldsymbol{\lambda}^{\vee}) = 1, \quad (\mathbf{u}^{\vee}, \mathbf{u}^{\vee}) \leqslant 1, \quad T \to \min,$$

где $\lambda_0^{\vee} \in R$; $\boldsymbol{\lambda}^{\vee}$, $\boldsymbol{\omega}^{\vee}$, $\mathbf{u}^{\vee} \in R^2$. Поскольку необходимые условия принципа максимума для (5.1) приводят к гамильтоновой системе (3.4), (3.5), то заключаем, что каждой экстремали задачи соответствует экстремаль задачи (5.1). Таким образом, задача переориентации триэдра $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2)$, определенная на фазовом пространстве $\mathbf{S}^3 \times R^3 \times \mathbf{S}^2$, эквивалентна задаче (5.1) разворота одного орта, которая определена на $\mathbf{S}^2 \times R^2 \times \times \mathbf{S}^1$.

Поскольку в силу следствия 2 теоремы для оптимального вращения $|\boldsymbol{\omega}^{\vee}(t)| = |\boldsymbol{\omega}(t)| > 0$, $t \in [0, \ T]$, если $|\boldsymbol{\lambda}(0) \times \boldsymbol{\omega}(0)| > 0$, то имеется возможность введения "относительных" переменных:

$$\Omega = |\boldsymbol{\omega}^{\vee}|, \quad p_1 = -\Omega^{-1}(\lambda_2^{\vee}\omega_1^{\vee} - \lambda_1^{\vee}\omega_2^{\vee}), \quad p_2 = -\Omega^{-1}(\lambda_1^{\vee}\omega_1^{\vee} + \lambda_2^{\vee}\omega_2^{\vee}), \quad p_3 = \lambda_0^{\vee} \tag{5.2}$$

Везде кроме $t = T$, векторы $|\boldsymbol{\omega}^{\vee}|^{-1}(-\omega_2^{\vee}, \ \omega_1^{\vee})^T$ и $|\boldsymbol{\omega}^{\vee}|^{-1}(\omega_1^{\vee}, \ \omega_2^{\vee})^T$ в $\mathbb{R}^2$ образуют ортонормированный базис, и поэтому справедлива запись

$$u^{\vee} = \frac{x}{|\boldsymbol{\omega}^{\vee}|}\begin{pmatrix} -\omega_2^{\vee} \\ \omega_1^{\vee} \end{pmatrix} + \frac{y}{|\boldsymbol{\omega}^{\vee}|}\begin{pmatrix} \omega_1^{\vee} \\ \omega_2^{\vee} \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1 \tag{5.3}$$

т.е. x и y – новые управления. Используя (5.1)–(5.3) получаем задачу

$$\begin{aligned} &p_1(0), \quad p_1^{\bullet} = -\varkappa\Omega^{-1}p_2, \quad p_1(T) = 0 \\ &p_2(0), \quad p_2^{\bullet} = -\tfrac{1}{2}\Omega p_3 + x\Omega^{-1}p_1, \quad p_2(T) = 0 \\ &p_3(0), \quad p_3^{\bullet} = \tfrac{1}{2}\Omega p_2 \\ &\Omega(0) = \Omega_0, \quad \Omega^{\bullet} = y, \quad \Omega(T) = 0 \\ &p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad T \to \min, \end{aligned} \tag{5.4}$$

которая в силу аналогичных рассуждений эквивалентна исходной $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2)$. Таким образом, свойства симметрии позволяют уменьшить количество независимых переменных в два раза (с шести до трех) используя преобразования (3.1)–(3.3) и (5.2), (5.3).

Для задачи (5.4) рассмотрим два аналитических допустимых решения:

полное торможение ($t \in [0, T_1^*]$, $x \equiv 0$, $\Omega(T_1^*) = 0$) и последующий плоский разворот из положения покоя в положение покоя ($t \in [T_1^*, \ T^*]$, $x \equiv 0$, $\Omega(T^*) = 0$, $p_1(T^*) = p_2(T^*) = 0$);

разворот с постоянной скоростью ($t \in [0,\ T_1^{**}]$, $\Omega \equiv \Omega_0$, $y \equiv 0$, $p_1(T_1^{**}) = 0$) и последующий плоский разворот с начальной угловой скоростью в положение покоя ($t \in [T_1^{**},\ T^{**}]$, $x \equiv 0$, $p_1 \equiv 0$, $\Omega(T^{**}) = 0$, $p_1(T^{**}) = p_2(T^{**}) = 0$).

Анализ эффективности этих аналитических приближений проведем для начальных условий:

$$(p_1(0),\ p_2(0),\ p_3(0))^T = \omega^{-1}(\Omega_0^{-1},\ 0,\ \Omega_0/2)^T, \quad \omega^2 = \Omega_0^2/4 + \Omega_0^{-2} \tag{5.5}$$

$$\Omega_0^2 = 4\pi n + 2\pi, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Для разворота первого типа время разворота равно $T^* = |\Omega_0| + 2\pi^{1/2}$. Второй разворот на интервале $t \in [0,\ T_1^{**}]$ представляет собой задачу быстродействия

$$p_1(0), \quad p_1^{\bullet} = -x\Omega_0^{-1}p_2, \quad p_1(T_1^{**}) = 0$$

$$p_2(0), \quad p_2^{\bullet} = -{}^1\!/_2\Omega_0 p_3 + x\Omega_0^{-1}p_1$$

$$p_3(0), \quad p_3^{\bullet} = {}^1\!/_2\Omega_0 p_2$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad |x| \leqslant 1, \quad T_1^{**} \to \min$$

Допустимым (но не оптимальным) здесь является закон управления $x = \operatorname{sign}(\Omega_0 p_2)$. Для условий (5.5) имеем $x \equiv -1$ и происходит вращение орта $(p_1, p_2, p_3)^T$ с постоянной угловой скоростью $(\Omega_0/2,\ 0,\ -\Omega_0^{-1})^T$. Кроме того векторы $(p_1, p_2, p_3)^T$ и $(\Omega_0/2,\ 0,\ -\Omega_0^{-1})^T$ ортогональны. Поэтому $p_1(t) = (\Omega_0\omega)^{-1}\cos\omega t$, $p_2(t) = -\sin\omega t$, $p_3(t) = (2\omega)^{-1}\Omega_0\cos\omega t$. Время окончания вращения $T_1^{**} = \pi(2\omega)^{-1}$ и $p_1(T_1^{**}) = 0$.

На интервале $t \in [T_1^{**},\ T^{**}]$ $x \equiv 0$ и происходит вращение орта $(p_1, p_2, p_3)^T$ с угловой скоростью $(\Omega/2, 0, 0)^T$; векторы $(p_1, p_2, p_3)^T$ и $(\Omega/2, 0, 0)^T$ ортогональны, $p_1 \equiv 0$. Если положить $p_2 = \sin\varphi$, $p_3 = \cos\varphi$, то получаем задачу

$$\varphi(T_1^{**}) = -\pi/2, \quad \varphi^{\bullet} = \Omega/2, \quad \sin\varphi(T^{**}) = 0$$

$$\Omega(T_1^{**}) = \Omega_0, \quad \Omega^{\bullet} = y, \quad \Omega(T^{**}) = 0$$

$$|y| \leqslant 1, \quad T^{**} \to \min$$

В силу условия $\Omega_0^2 = 4\pi n + 2\pi$ решение этой задачи – чистое торможение $y \equiv -1$ и соответствующая траектория: $\varphi(t) = \varphi(T_1^{**}) + \Omega_0(t - T_1^{**})/2 - (t - T_1^{**})^2/4$, $\Omega(t) = \Omega_0 - (t - T_1^{**})$. Время окончания $T^{**} = T_1^{**} + |\Omega_0|$, $\varphi(T^{**}) = \pi n$, $\Omega(T^{**}) = 0$. Таким образом, оценка времени быстродействия для второго приближения равна $T^{**} = |\Omega_0| + \pi(2\omega)^{-1}$.

Второй тип разворота оказывается эффективнее первого, т.е. $T^{**} \leqslant T^*$, если $\Omega_0^2/4 + \Omega_0^{-2} \geqslant \pi/16$. Это соответствует ситуации быстрых начальных вращений и малому углу между векторами $\lambda(0)$ и $\omega(0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 249 с.
3. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1995