

УДК 533.6.013.42

© 1997 г. Л.Г. РЕЗАДАДЕ, В.А. СВЕТЛИЦКИЙ

**ВЛИЯНИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
 СЖАТО-СКРУЧЕННОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ**

Рассмотрена задача устойчивости сжато-скрученного прямолинейного стержня, заполненного потоком жидкости и имеющего дополнительные локальные связи. Уравнения равновесия стержня получены с учетом конечной жесткости на кручение. Изложен алгоритм численного определения критических нагрузок в зависимости от скорости потока идеальной несжимаемой жидкости и расположения локальных связей (шарнирных опор). Приведены результаты численного определения критических нагрузок.

Задачам взаимодействия потока жидкости с трубопроводом (стержнем) посвящено очень большое число публикаций. Наиболее полный обзор этих публикаций приведен в [1, 2]. В опубликованных работах рассматривались, как правило, стержни с равными изгибными жесткостями и без учета начального скручивания.

На фиг. 1 показан стержень, имеющий промежуточные шарнирные опоры. Стержень нагружен осевой сжимающей силой P и крутящим моментом M . Сила P и момент M могут быть как "мертвые", так и "следающие".

После потери устойчивости в сечениях стержня, где имеются шарнирные закрепления (имеется в виду шарнирные закрепления в двух плоскостях — x_1Ox_2 и x_1Ox_3), возникают сосредоточенные силы $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, показанные на фиг. 1. Можно считать, что векторы $R^{(1)}$ и $R^{(1)}$ лежат в плоскостях ортогональных осевой линии стержня. Примем, что новое равновесное состояние мало отличается от критического состояния, т.е. перемещения точек осевой линии стержня и углы поворота главных осей сечения являются малыми величинами. Получим уравнения равновесия прямолинейного стержня после потери устойчивости общих нелинейных уравнений равновесия, описывающих критическое состояние пространственно-криволинейного стержня.

Рассматривая элемент стержня, можно получить в связанной системе координат следующие нелинейные векторные уравнения равновесия в безразмерной форме записи [1]:

$$dQ_0 / d\varepsilon + \kappa_0 \times Q_0 + P_0 = 0 \tag{1}$$

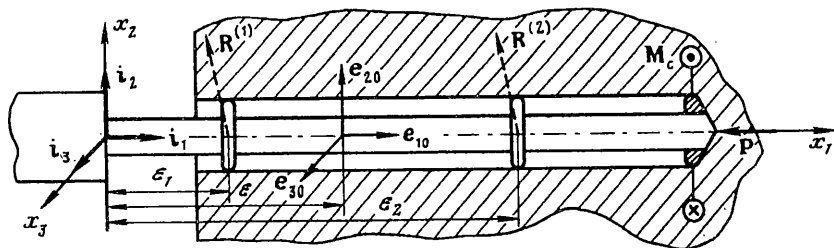
$$dM_0 / d\varepsilon + \kappa_0 \times M_0 + e_1 \times Q_0 = 0 \tag{2}$$

$$L_1 d\vartheta_0 / d\varepsilon + L\kappa_{00}^{(1)} - \kappa_0 = 0 \tag{3}$$

$$du_0 d\varepsilon + \kappa_0 \times u_0 + (l_{11} - 1)e_1 + l_{21}e_2 + l_{31}e_3 = 0 \tag{4}$$

$$M_0 = A(\kappa_1 - \kappa_{00}^{(1)}), \quad \vartheta_0 = (\vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \vartheta_{03})^T$$

$$Q_0 = \sum_{j=1}^3 Q_{0j} e_j, \quad M_0 = \sum_{j=1}^3 M_{0j} e_j \tag{5}$$



Фиг. 1

где \mathbf{Q}_0 , \mathbf{M}_0 – вектора внутренних сил и моментов; Q_{01} – осевая сила; Q_{02} и Q_{03} – перерезывающие силы; M_{01} – крутящий момент; M_{02} и M_{03} – изгибающие моменты; $\kappa_{00}^{(1)}$ – вектор, компоненты которого характеризуют геометрию осевой линии стержня в ненагруженном состоянии; κ_0 – вектор, характеризующий геометрию осевой линии в нагруженном состоянии; $\mathbf{u}_0 = \sum \mu_0 \mathbf{e}_j$ – вектор перемещений точек осевой линии стержня; \mathbf{P}_0 – вектор внешних сил, приложенных к стержню; A – диагональная матрица, элементы которой A_{ii} есть жесткости стержня на кручение (A_{11}) и изгиб (A_{22} , A_{33}). В общем случае изгибные жесткости A_{22} и A_{33} могут быть разными. В дальнейшем рассматривается именно этот случай.

Входящие в уравнения матрицы L_1 и L равны

$$L_1 = \begin{vmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & -\sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_3 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & \cos \vartheta_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$L = \begin{vmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - 1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - 1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - 1 \end{vmatrix}$$

где ϑ_j – углы поворота осей относительно их положения до нагружения. В общем случае вектор \mathbf{P}_0 равен

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}^{(j)} \delta_j (\varepsilon - \varepsilon_j) + \mathbf{q}, \quad (\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1) \quad (7)$$

где δ_j – функции Дирака, $\mathbf{P}^{(j)}$ – сосредоточенные силы, \mathbf{q}_0 , \mathbf{q}_1 – распределенные силы (\mathbf{q}_0 – силы тяжести, \mathbf{q}_1 – силы зависящие от потока жидкости). Для идеальной жидкости имеем (в безразмерной записи) [1]:

$$\mathbf{q}_1 = -(P_0 + n_1 w^2) \mathbf{e}_{10}, \quad \left(n_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

где P_0 – безразмерная сила, зависящая от давления в жидкости, w – скорость жидкости, m_1 , m_2 – соответственно масса единицы длины стержня и масса жидкости, приходящаяся на единицу длины стержня. Входящие в уравнение сосредоточенные силы $\mathbf{P}^{(j)}$ могут быть и силами реакций, возникающих в локальных связях. В рассматриваемой задаче это реакции $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ (фиг. 1).

Получим из системы уравнений (1)–(5) уравнения равновесия стержня при критическом состоянии и после потери устойчивости, полагая

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_* + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_* + \mathbf{M}, \quad \kappa_0 = \kappa_* + \Delta\kappa \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_* + \mathbf{u}, \quad \vartheta_{0j} = \vartheta_{*j} + \vartheta_j$$

где векторы и углы (ϑ_{*j}) со звездочкой характеризуют напряженно-деформированное критическое состояние стержня; векторы \mathbf{Q} , \mathbf{M} , $\Delta\kappa$, \mathbf{u} и углы ϑ_j характеризуют изменение напряженно-деформированного состояния стержня после потери устойчивости. Так как предполагается, что новое состояние равновесия близко к критическому, то компоненты векторов Q_j , M_j , $\Delta\kappa_j$, u_j и ϑ_j можно считать малыми величинами, поэтому их произведения являются величинами второго порядка малости и при получении линейных уравнений равновесия ими можно пренебречь.

После преобразований из системы (1)–(5) получаем две системы уравнений.

Система нелинейных уравнений равновесия стержня соответствующих критическому состоянию

$$d\mathbf{Q}_* / d\varepsilon + \kappa_* \times \mathbf{Q}_* + \mathbf{P}_* = 0 \quad (9)$$

$$d\mathbf{M}_* / d\varepsilon + \kappa_* \times \mathbf{M}_* + \mathbf{e}_{1*} \times \mathbf{Q}_* = 0$$

$$L_{1*} d\vartheta_* / d\varepsilon + L_* \kappa_{00}^{(1)} - \kappa_* = 0$$

$$d\mathbf{u}_* / d\varepsilon + \kappa_* \times \mathbf{u}_* - (l_{11*} - 1)\mathbf{e}_{1*} + l_{21*}\mathbf{e}_{2*} + l_{31*}\mathbf{e}_{3*} = 0$$

$$\mathbf{M}_* = A(\kappa_* - \kappa_{00}^{(1)})$$

Система линеаризованных уравнений стержня после потери устойчивости

$$d\mathbf{Q} / d\varepsilon + A_x \mathbf{Q} + A_Q A^{-1} \mathbf{M} + \Delta \mathbf{P} = 0$$

$$d\mathbf{M} / d\varepsilon + A_x \mathbf{M} + A_M A^{-1} \mathbf{M} + A_1 \mathbf{Q} = 0$$

$$d\vartheta / d\varepsilon + A_x \vartheta - A^{-1} \mathbf{M} = 0 \quad (10)$$

$$d\mathbf{u} / d\varepsilon + A_x \mathbf{u} + A_1 \vartheta = 0$$

$$A_x = \begin{vmatrix} 0 & -\kappa_{*3} & \kappa_{*2} \\ \kappa_{*3} & 0 & -\kappa_{*1} \\ -\kappa_{*2} & \kappa_{*1} & 0 \end{vmatrix}, \quad A_Q = \begin{vmatrix} 0 & Q_{*3} & -Q_{*2} \\ -Q_{*3} & 0 & Q_{1*} \\ Q_{*2} & -Q_{*1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_M = \begin{vmatrix} 0 & M_{*3} & -M_{*2} \\ -M_{*3} & 0 & M_{*1} \\ M_{*2} & -M_{*1} & 0 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

В общем случае после потери устойчивости сосредоточенные $\mathbf{P}^{(j)}$ и распределенные \mathbf{q} силы получают приращения, поэтому

$$\Delta \mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \Delta \mathbf{P}^{(j)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_j) + \Delta \mathbf{q}$$

Получим из систем уравнений (10), как частный случай, уравнения равновесия после потери устойчивости для прямолинейного стержня, имеющего промежуточные опоры и нагруженного сжимающей силой \mathbf{P} и крутящим моментом $\mathbf{M}^{(1)}$ (фиг. 1). В этом частном случае следует положить

$$\mathbf{Q}_* = -Q_{*1} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{M}_* = M_{*1} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{u}_* = 0, \quad \vartheta_{*2} = \vartheta_{*3} = 0$$

$$\kappa_* = \kappa_{*1} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Q} = Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{M} = M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{\vartheta} = \vartheta_2 \mathbf{e}_2 + \vartheta_3 \mathbf{e}_3$$

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \kappa_2 \mathbf{e}_2 + \Delta \kappa_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u} = u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$

$$M_2 = A_{22} \Delta \kappa_2, \quad M_3 = A_{33} \Delta \kappa_3, \quad Q_{*1} = |P|, \quad M_{*1} = |M^{(1)}|$$

На прямолинейный стержень до потери устойчивости никаких распределенных и сосредоточенных сил кроме силы \mathbf{P} не действует (силы веса не учитываются ($\mathbf{q}_0 = 0$)). После потери устойчивости на стержень действует распределенная нагрузка \mathbf{q}_1 и сосредоточенные силы $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ (фиг. 1). Распределенная нагрузка \mathbf{q}_1 зависит от кривизны осевой линии стержня, скорости потока и давления в жидкости

$$\mathbf{q}_1 = (P_0 + n_1 w^2)(\Delta \mathbf{x} \times \mathbf{e}_1)$$

или

$$\mathbf{q}_1 = (P_0 + n_1 w^2) \Delta \kappa_3 \mathbf{e}_2 - (P_0 + n_1 w^2) \Delta \kappa_2 \mathbf{e}_3$$

Поэтому будем иметь

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{R}^{(1)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + \mathbf{R}^{(2)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2) + (P_0 + n_1 w^2) \Delta \kappa_3 \mathbf{e}_2 - (P_0 + n_1 w^2) \Delta \kappa_2 \mathbf{e}_3$$

После преобразований из системы (10) получаем систему линейных уравнений равновесия прямолинейного стержня после потери устойчивости, которую можно представить в виде одного векторного уравнения

$$d\mathbf{Z} / d\varepsilon + \mathbf{A}\mathbf{Z} = \Delta \mathbf{b} \quad (11)$$

$$\mathbf{Z} = (Q_2, Q_3, M_2, M_3, \vartheta_2, \vartheta_3, u_2, u_3)^T$$

$$\Delta \mathbf{b} = (-R_2^{(1)} \delta_1 - R_2^{(2)} \delta_2, -R_3^{(1)} \delta_1 - R_3^{(2)} \delta_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_{*1} & 0 & -Q_1^{(1)} / A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{*1} & 0 & Q_1^{(1)} / A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & (M_{*1} / A_{22} - \kappa_{*1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(M_{*1} / A_{33} - \kappa_{*1}') & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 / A_{22} & 0 & 0 & -\kappa_{*1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 / A_{33} & \kappa_{*1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\kappa_{*1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa_{*1} \end{pmatrix}$$

$$Q_1^{(1)} = Q_{*1} - (P_0 + n_1 w^2)$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\mathbf{Z} = K(\varepsilon, Q_{*1}, M_{*1}) \mathbf{C} + \int_0^\varepsilon G(\varepsilon, \eta) \Delta \mathbf{b} d\eta \quad (12)$$

$$G(\varepsilon, \eta) = K(\varepsilon) K^{-1}(\eta), \quad (K(0) = E)$$

Если матрица \mathbf{A} от ε не зависит (стержень постоянного сечения), то матрица Грина равна

$$G(\varepsilon, \eta) = K(\varepsilon - \eta) \quad (13)$$

Изложим алгоритм решения, ограничившись случаем, когда имеются две проме-

жуточные опоры (фиг. 1). Вектор $\Delta \mathbf{b}$, входящий в правую часть (11) и (12), можно представить в виде суммы двух векторов

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_{01} \delta_1 + \mathbf{b}_{02} \delta_2$$

$$\mathbf{b}_{01} = (-R_2^{(1)}, -R_3^{(1)}, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{b}_{02} = (-R_2^{(2)}, -R_3^{(2)}, 0, \dots, 0)^T$$

Из (12) получаем (с учетом (13)):

$$\mathbf{Z} = K(\varepsilon) \mathbf{C} + K^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1) \mathbf{b}_{01} H_1(\varepsilon - \varepsilon_1) + K^{(2)}(\varepsilon - \varepsilon_2) \mathbf{b}_{02} H_2(\varepsilon - \varepsilon_2) \quad (14)$$

где H_j – функции Хевисайда. При $\varepsilon = 0$, $\mathbf{u} = \mathfrak{D} = 0$, поэтому вектор \mathbf{C} равен: $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, 0, 0, 0, 0)^T$. В скалярной записи из (14) имеем

$$Z_v = \sum_{j=1}^4 k_{vj} c_j - k_{v1}^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1) R_2^{(1)} H_1 - k_{v2}^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1) R_3^{(1)} H_1 - \\ - k_{v1}^{(2)}(\varepsilon - \varepsilon_2) R_2^{(2)} H_2 - k_{v2}^{(2)}(\varepsilon - \varepsilon_2) R_3^{(2)} H_2 \quad (15)$$

Компоненты Z_v вектора \mathbf{Z} должны удовлетворять условиям при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$: $Z_7 = u_2(\varepsilon_1) = 0$, $Z_8 = u_3(\varepsilon_1) = 0$; $Z_7 = u_2(\varepsilon_2) = 0$, $Z_8 = u_3(\varepsilon_2) = 0$. В более подробной записи имеем (при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$):

$$Z_7 = u_2(\varepsilon_1) = \sum_{j=1}^4 k_{7j} c_j = 0, \quad Z_8 = u_3(\varepsilon_1) = \sum_{j=1}^4 k_{8j} c_j = 0 \quad (16)$$

$$Z_7 = u_2(\varepsilon_2) = \sum_{j=1}^4 k_{7j} c_j - k_{71}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_2^{(1)} - k_{72}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_3^{(1)} = 0$$

$$Z_8 = u_3(\varepsilon_2) = \sum_{j=1}^4 k_{8j} c_j - k_{81}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_2^{(1)} - k_{82}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_3^{(1)} = 0$$

Система четырех уравнений (16) содержит восемь неизвестных c_j ($j = 1, 2, 3, 4$), $R_2^{(1)}$ и $R_3^{(1)}$. Для "мертвой" силы \mathbf{P} и мертвого момента $\mathbf{M}^{(1)}$ имеем следующие краевые условия:

$$Q_2(1) = \mathbf{Q}_{*1} \mathbf{e}_2(1), \quad Q_3(1) = \mathbf{Q}_{*1} \mathbf{e}_3(1), \quad M_2(1) = \mathbf{M}_{*1} \mathbf{e}_2(1)$$

$$M_3(1) = \mathbf{M}_{*1} \mathbf{e}_3(1), \quad \mathbf{Q}_{*1} = -Q_{*1} \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{M}_{*1} = M_{*1} \mathbf{i}_1 \quad (17)$$

Краевые условия, выраженные через компоненты вектора \mathbf{Z} и малые углы ϑ_j (6), имеют вид

$$Z_1(1) - Q_{*1} Z_6(1) = 0, \quad Z_2(1) + Q_{*1} Z_5(1) = 0 \quad (18)$$

$$Z_3(1) + M_{*1} Z_6(1) = 0, \quad Z_4(1) - M_{*1} Z_5(1) = 0$$

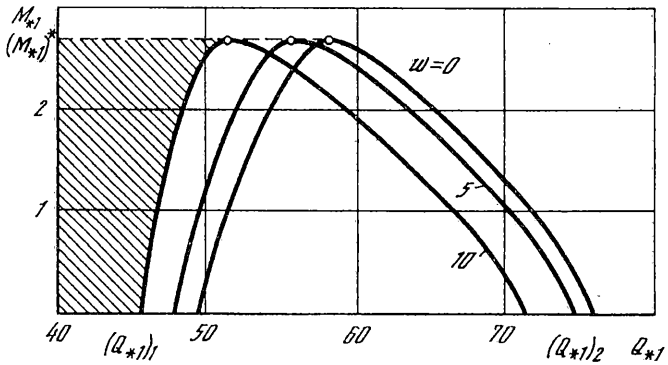
Из соотношений (18) получаем еще четыре алгебраических уравнения

$$\sum_{j=1}^4 a_{1j} c_j + b_{11} R_2^{(1)} + b_{12} R_3^{(1)} + b_{13} R_2^{(2)} + b_{14} R_3^{(2)} = 0$$

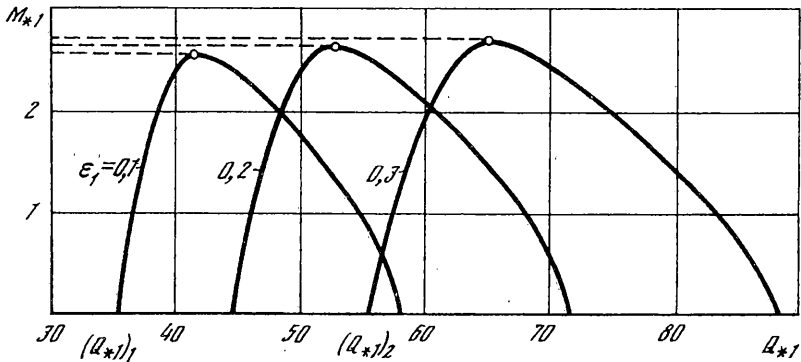
$$\sum_{j=1}^4 a_{2j} c_j + b_{21} R_2^{(1)} + b_{22} R_3^{(1)} + b_{23} R_2^{(2)} + b_{24} R_3^{(2)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{3j} c_j + b_{31} R_2^{(1)} + b_{32} R_3^{(1)} + b_{33} R_2^{(2)} + b_{34} R_3^{(2)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{4j} c_j + b_{41} R_2^{(1)} + b_{42} R_3^{(1)} + b_{43} R_2^{(2)} + b_{44} R_3^{(2)} = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\begin{aligned}
 a_{1j} &= k_{1j}(1) - Q_{*1}k_{6j}(1), & a_{2j} &= k_{2j}(1) + Q_{*1}k_{5j}(1) \\
 a_{3j} &= k_{3j} + M_{*1}k_6, & a_{4j} &= k_{4j} - M_{*1}k_{5j} \\
 b_{1k} &= -[k_{1k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1) - Q_{*1}k_{6k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1)] \\
 b_{1v} &= -[k_{1v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2) - Q_{*1}k_{6v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2)] \\
 b_{2k} &= -[k_{2k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1) + Q_{*1}k_{5k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1)] \\
 b_{2v} &= -[k_{2v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2) + Q_{*1}k_{5v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2)] \\
 b_{3k} &= -[k_{3k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1) + M_{*1}k_{6k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1)] \\
 b_{3v} &= -[k_{3v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2) + M_{*1}k_{6v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2)] \\
 b_{4k} &= -[k_{4k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1) - M_{*1}k_{5k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1)] \\
 b_{4v} &= -[k_{4v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2) - M_{*1}k_{5v}^{(2)}(1 - \varepsilon_2)] \\
 (k &= 1, 2; v = 3, 4)
 \end{aligned}$$

В результате получаем систему восьми однородных уравнений (16), (19).

Из условия равенства нулю определителя системы (16), (19) находим критические значения $(Q_{*1})_j$ и $(M_{*1})_j$ в зависимости от безразмерной скорости потока w и координат шарнирных закреплений ε_1 и ε_2 .

Результаты численного счета представлены на фиг. 2, 3. На фиг. 2 приведены графики изменения первых двух значений критических осевых сил $(Q_{*1})_1$ в зависимости от следящего крутящего момента $M^{(1)}$ при трех значениях безразмерной скорости потока w (при $P_0 = 0$) и фиксированных значений координат шарнирного закрепления ($\epsilon_1 = 0,2$; $\epsilon_2 = 0,8$).

Скорость потока уменьшает значения критических сил. Так, например, при $M_{*1} = 0$ критическое значение $(Q_{*1})_1$ при $w = 10$ на 10% меньше, чем при $w = 0$, т.е. влияние скорости потока жидкости на критические нагрузки при расчетах следует учитывать.

На фиг. 3 приведены графики изменения критических нагрузок Q_{*1} и M_{*1} при скорости потока $w = 10$ и $\epsilon_2 = 0,8$ для трех значений координаты ϵ_1 . Из графиков следует, что критические силы, например, $(Q_{*1})_1$ очень сильно зависят от положения шарниров.

В рассмотренном примере критическая сила $(Q_{*1})_1$ (при $M_{*1} = 0$) при $\epsilon_1 = 0,3$ увеличилась по сравнению со случаем, когда $\epsilon_1 = 0,1$ на 36%. Существует предельное значение крутящего момента $(M_{*1})^*$ (на фиг. 2, 3 они обозначены точками на оси ординат), до которых имеет место статическая потеря устойчивости. При предельных моментах первые два собственных значения (первые две критические силы) становятся равными. Например, при $w = 10$ область устойчивых режимов работы стержня (сверла) на фиг. 2 заштрихована, т.е. при любой паре значений Q_{*1} и M_{*1} из этой области стержень сохраняет свою прямолинейную форму.

В конце нашей статьи [3] пропущена фраза (после "парадокса Николаи" – для стержня, имеющего разные изгибные жесткости), за что авторы приносят свое извинение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 1. М.: Высш. шк. 1987. 320 с.
3. Сазгаран М., Светлицкий В.А. Устойчивость сжато-скрученных прямолинейных стержней с учетом конечной жесткости на кручение // Изв. АН. МТТ. 1996. № 2. С. 174–182.

Москва

Поступила в редакцию
1.IX.1996