

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Е.В. ЛАДЫГИНА, А.И. МАНЕВИЧ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФОРМ**

Дано аналитическое исследование при помощи метода многих масштабов задачи о нелинейных свободных изгибных колебаниях цилиндрической оболочки при учете взаимодействия сопряженных форм и наличия начальных несовершенств. Показано, что система уравнений амплитудно-частотной модуляции имеет интеграл, зависящий от одного обобщенного параметра и позволяющий дать полный анализ возможных динамических режимов и их устойчивости.

В первых исследованиях нелинейной динамики цилиндрических оболочек использовалась математическая модель, сводящая оболочку к нелинейному осциллятору [1]. Однако экспериментальные исследования еще в 60-е годы показали недостаточность этой модели (см. [2]). Существенную роль в нелинейной динамике оболочек играет теплообмен между разными модами, приводящий к нестационарным (модулированным) колебаниям, появлению бегущих волн и другим явлениям, которые не могут быть описаны в рамках модели системы с одной степенью свободы. Для объяснения экспериментальных наблюдений в [3] было предложено учитывать, наряду с непосредственно возбуждаемой формой, так называемую сопряженную форму (идентичную ей, но сдвинутую в окружном направлении так, что узлы одной формы совпадают с пучностями другой), а также осесимметричную компоненту, неизбежно сопровождающую изгибные колебания оболочек вращения с большими амплитудами. Позже эта модель была уточнена путем учета начальных несовершенств [4], приводящих к "расщеплению" спектра собственных частот (отмеченному еще в [5]).

Модели [2-4] сводят оболочку к нелинейной системе с двумя степенями свободы, имеющей равные или близкие линейные собственные частоты. В таких системах, как известно, важную роль играют явления типа внутреннего резонанса. В [6] было показано, что, используя метод многих масштабов, можно выполнить исчерпывающий анализ свободных нелинейных колебаний консервативных систем с двумя степенями свободы, имеющих кубические нелинейности, при близких собственных частотах. Полученный в [6] интеграл амплитудно-частотной модуляции позволяет дать классификацию возможных колебательных режимов в зависимости от нелинейных коэффициентов, разности частот сопряженных форм, энергии колебаний и начальных условий. В [7] этот подход был применен к задаче о свободных изгибных колебаниях кругового кольца, и было получено общее решение задачи.

В данной работе дано аналогичное исследование свободных нелинейных изгибных колебаний цилиндрической оболочки. Показано, в частности, что при превышении определенного энергетического порога колебания по одной из сопряженных форм становятся неустойчивыми относительно возбуждения другой формы, и одновременно появляется устойчивый стационарный (одночастотный) режим связанных колебаний, соответствующий наложению бегущей и стоячей волн.

1. Основные уравнения. Решение методом многих масштабов. Уравнения амплитудно-частотной модуляции и их интеграл. Математическая модель основывается на

известных динамических уравнениях нелинейной теории пологих оболочек с учетом начальных несовершенств

$$\frac{D}{h} \Delta^4 (w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \Phi_{,xx} - \rho w_{,tt} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^4 \Phi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} (w - w_0)_{,xx}$$

(обозначения общепринятые, см., напр., [1]). Радиальный динамический прогиб и начальный прогиб принимаются соответственно в виде

$$w = \left[f_1(t) \cos \frac{ny}{R} + f_2(t) \sin \frac{ny}{R} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} + \frac{n^2}{4R} [f_1^2(t) + f_2^2(t)] \sin^2 \frac{m\pi x}{l} \quad (1.2)$$

$$w_0 = f_{10} \cos \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (1.3)$$

(положительное направление радиального прогиба – по направлению внутренней нормали). Аппроксимация (1.2) учитывает для данной гармоники две сопряженные моды (возможное взаимодействие несамосопряженных мод при определенных соотношениях собственных частот или взаимодействие более чем двух мод в данной работе не рассматриваются). Квадратичные слагаемые в (1.2) обеспечивают выполнение условия периодичности (непрерывности) при больших перемещениях при равенстве нулю среднего окружного усилия.

В отличие от идеальной оболочки, для которой при любом положении узлов собственная частота для данной гармоники одна и та же (т.е. положение узла не определено), для реальной оболочки с несовершенствами собственная частота будет зависеть от положения узла (на это обстоятельство впервые обратил внимание Тобиас [5]). Из всевозможных идентичных мод можно выделить две моды, соответствующие минимальному и максимальному собственным значениям, и эти моды будут главными линейными модами колебаний. Именно эти моды считаются выбранными в (1.2). Выбор начальной погиби в форме (1.3) определяется условием, чтобы указанные формы были главными в линейном приближении (задание погиби в виде суммы гармоник по обоим сопряженным формам приводит к появлению линейной связи между сопряженными формами, которые становятся поэтому неортогональными и неглавными).

Применяя стандартную процедуру Папковича–Бубнова, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат f_1, f_2 :

$$\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 + 2\alpha f_1 (\dot{f}_1^2 + f_1 \ddot{f}_1 + \dot{f}_2^2 + f_2 \ddot{f}_2) + b_0 (3f_1^2 + f_2^2) + b_1 f_1 (f_1^2 + f_2^2) = 0 \quad (1.4)$$

$$\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 + 2\alpha f_2 (\dot{f}_1^2 + f_1 \ddot{f}_1 + \dot{f}_2^2 + f_2 \ddot{f}_2) + 2b_0 f_1 f_2 + b_1 f_2 (f_1^2 + f_2^2) = 0$$

$$2\alpha = \frac{3n^4}{8R^2}, \quad b_0 = \frac{E}{16\rho} \left[\frac{m\pi}{l} \right]^4 \left[1 + \frac{1}{\beta^4} + \frac{4}{(1+\beta^2)^2} \right] f_{10}, \quad \beta = \frac{m\pi R}{nl} \quad (1.5)$$

$$b_1 = \frac{E}{16\rho} \left[\frac{m\pi}{l} \right]^4 \left[1 + \frac{4n^4 h^2}{3(1-\nu^2)R^2} - \frac{16}{(1+\beta^2)^2} \right]$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{E}{8\rho} \left[\frac{m\pi}{l} \right]^4 \left[1 + \frac{1}{\beta^4} \right] f_{10}^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{E}{8\rho} \left[\frac{m\pi}{l} \right]^4 f_{10}^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left[\frac{h^2 n^4}{12(1-\nu^2)R^2} (1+\beta^2)^2 + \frac{\beta^4}{(1+\beta^2)^2} \right]$$

где E, ρ – модуль Юнга и плотность материала. Члены выше третьей степени относительно f_k в (1.4) отброшены, что соответствует точности аппроксимации (1.2).

В отличие от нелинейных уравнений колебаний кругового кольца [7], система (1.4) содержит кубические члены, связанные не только с "нелинейной инерционностью", но и с нелинейной упругостью, а также квадратичные нелинейности, обусловленные наличием начальных несовершенств (для идеальной оболочки $b_0 = 0$). Эта система аналогична полученным в [3, 4] (отличия связаны с выбором погиби и пренебрежением членами выше третьей степени). Как будет видно из дальнейшего, основная роль несовершенств состоит не в появлении нелинейных квадратичных членов (которые не оказывают влияния на решение в первых приближениях), а в расщеплении частот сопряженных форм.

Введем малый параметр ε , имеющий порядок отношения динамического прогиба к радиусу, и будем считать, что амплитуда погиби имеет тот же порядок, что и прогиб. Тогда с учетом (1.5) имеем

$$\omega_2 = \omega + \varepsilon^2 \sigma, \quad \omega_1 \equiv \omega, \quad f_{10} = \varepsilon f_{10}^*, \quad b_0 = \varepsilon b_0^* \quad (1.6)$$

где σ, f_{10}^* и b_0^* имеют порядок единицы. Параметр расстройки частот σ может быть выражен через f_{10}^* по (1.5), но предпочтительнее рассматривать его как первичную экспериментально определяемую характеристику оболочки (идентифицируя затем f_{10} по найденному σ).

Система (1.4) решается методом многих масштабов [8]. Вводим времена разных масштабов $T_j = \varepsilon^j t$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) и полагаем

$$f_k = \varepsilon f_{k1} + \varepsilon^3 f_{k3} + \dots \quad (1.7)$$

При учете (1.6) все нелинейные члены в (1.4) оказываются порядка ε^3 , и T_1, f_{k2} ($k = 1, 2$) исчезают в последующих уравнениях. Применяя стандартную процедуру метода многих масштабов, получаем системы уравнений для последовательных приближений

$$\varepsilon: D_0^2 f_{k1} + \omega^2 f_{k1} = 0 \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3: D_0^2 f_{k3} + \omega^2 f_{k3} + (2D_0 D_2 + D_1^2) f_{k1} + 2\kappa f_{k1} [f_{11} D_0^2 f_{11} + (D_0 f_{11})^2 + \\ + f_{21} D_0^2 f_{21} + (D_0^2 f_{21})] + b_0^* [(3f_{11}^2 + f_{21}^2) \delta_{k1} + \delta_{k2} f_{11} f_{21}] + \\ + b_1 f_{k1} (f_{11}^2 + f_{21}^2) + \sigma \delta_{k2} f_{k1} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $D_j = \partial/\partial T_j$ ($j = 0, 1, 2$), δ_{ij} – символ Кронекера.

Представляя решение системы (1.8) в форме

$$f_{k1} = A_k(T_2) e^{i\omega T_0} + \bar{A}_k(T_2) e^{-i\omega T_0} \quad (k = 1, 2) \quad (1.10)$$

и подставляя в (1.9), из условия отсутствия секулярных членов получаем (штрихом обозначено дифференцирование по медленному времени T_2):

$$2i\omega A_k' - 4\omega \kappa \bar{A}_k (A_1^2 + A_2^2) + b_1 (3A_k^2 \bar{A}_k + 2A_1 A_2 \bar{A}_{3-k} + \bar{A}_k A_{3-k}^2) + \sigma A_k \delta_{12} = 0 \quad (1.11)$$

Вводя полярные координаты a_k (амплитуды) и θ_k (фазы)

$$A_k = 1/2 a_k \exp(i\theta_k) \quad (1.12)$$

после разделения действительных и мнимых частей в (1.11) получаем систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих медленное изменение a_k и θ_k (амплитудно-частотную модуляцию):

$$4\omega(a_1^2)' - (4\omega^2 \kappa - b_1) a_1^2 a_2^2 \sin 2\gamma = 0 \quad (1.13)$$

$$4\omega(a_2^2)' + (4\omega^2\kappa - b_1)a_1^2 a_2^2 \sin 2\gamma = 0$$

$$8\omega_1\theta' + 4\omega^2\kappa(a_1^2 + a_2^2 \cos 2\gamma) - b_1(3a_1^2 + 2a_2^2 + a_2^2 \cos 2\gamma) = 0$$

$$8\omega_1\theta_2' + 4\omega^2\kappa(a_2^2 + a_1^2 \cos 2\gamma) - b_1(3a_2^2 + 2a_1^2 + a_1^2 \cos 2\gamma) + 4\sigma = 0$$

где $\gamma = \theta_2 - \theta_1$. Из первых двух уравнений (1.13) следует интеграл энергии (e – постоянная, пропорциональная энергии колебаний):

$$a_1^2 + a_2^2 = e \quad (1.14)$$

Система четырех уравнений (1.13) может быть сведена к двум уравнениям, если, следуя [8], ввести новую переменную $\xi = a_1^2/e$, характеризующую отношение энергий колебаний по первой сопряженной форме к полной энергии и изменяющуюся в интервале (0,1) (значения $\xi = 0$ и $\xi = 1$ соответствуют несвязанным колебаниям по второй и первой формам соответственно). Вычитая из третьего уравнения (1.13) четвертое и учитывая, что $a_2^2 = e(1 - \xi)$, получаем уравнения относительно ξ и γ :

$$\omega\xi' = 2\beta\xi(1 - \xi)\sin 2\gamma \quad (1.15)$$

$$\omega\gamma' = -\beta[(1 - 2\xi)(1 - \cos 2\gamma) - \sigma^*]$$

$$\beta = e(4\omega\kappa - b_1)/8, \quad \sigma^* = \sigma/(2\beta) \quad (1.16)$$

Разделив первое уравнение (1.15) на второе, получаем уравнение в полных дифференциалах, которое имеет интеграл

$$\xi(1 - \xi)(1 - \cos 2\gamma) - \sigma^*\xi = C \quad (1.17)$$

Замечательный факт состоит в том, что этот интеграл зависит лишь от одного безразмерного параметра σ^* – обобщенного параметра, определяемого геометрией оболочки, разностью частот сопряженных форм и энергией колебаний (σ^* , в отличие от σ и e , не зависит от выбранного малого параметра e). Интеграл (1.17), определяющий связь между модуляциями амплитуд и частот обеих форм, совпадает с аналогичным интегралом для кругового кольца [7] (меняется лишь выражение для параметра σ^*), и поэтому дальнейший анализ аналогичен [7].

2. Амплитудно-частотный портрет. Стационарные колебания и их устойчивость. Влияние энергии колебаний. Интегральные кривые (1.17) в прямоугольнике $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \gamma \leq \pi$ (с учетом периодичности по γ) составляют амплитудно-частотный портрет (АЧП) системы, наглядно характеризующий возможные колебательные режимы и их устойчивость. Стационарные точки на АЧП соответствуют одночастотным колебаниям (без модуляции). Эти точки в соответствии с (1.15) находятся из системы уравнений (при $\beta \neq 0$):

$$\xi(1 - \xi)\sin 2\gamma = 0 \quad (2.1)$$

$$(1 - 2\xi)(1 - \cos 2\gamma) - \sigma^* = 0$$

Решения этой системы

$$(a) \xi = 0, \quad \gamma = \gamma_s^-; \quad (b) \xi = 1, \quad \gamma = \gamma_s^+; \quad (c) \xi = 1/2 - \sigma^*/4, \quad \gamma = \pi/2 \quad (2.2)$$

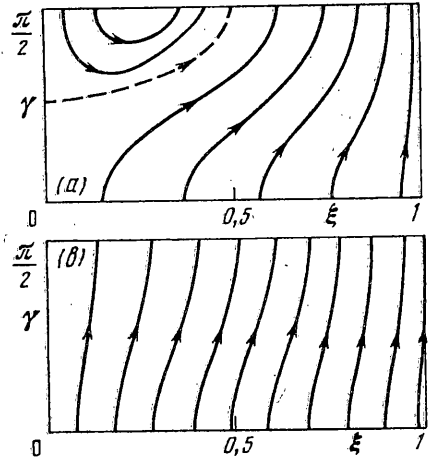
$$\gamma_s^\pm = 1/2(-1)^s \arccos(1 \pm \sigma^*) + s\pi \quad (s = 0, 1)$$

существуют при выполнении следующих условий соответственно:

$$(a) 0 \leq \sigma^* \leq 2, \quad (b) -2 \leq \sigma^* \leq 0, \quad (c) |\sigma^*| \leq 2 \quad (2.3)$$

Стационарные точки (a), (b) соответствуют несвязанным колебаниям по каждой сопряженной форме, точка (c) – связанной моде колебаний. При $|\sigma^*| > 2$ стационарные точки отсутствуют, при $|\sigma^*| \leq 2$ существуют три стационарные точки: точка (c) и, в зависимости от знака σ^* , две точки при $\xi = 0$ (в случае $\sigma^* > 0$) или при $\xi = 1$ ($\sigma^* < 0$).

Элементарный анализ показывает, что стационарная точка на линии $\gamma = \pi/2$ является центром (устойчива), а точки $\xi = 0, \xi = 1$ – седловые (неустойчивы). Таким образом, возможны два типа АЧП, в зависимости от величины σ^* – без стационарных точек и с тремя стационарными точками. На фигуре построены АЧП для случаев $\sigma^* = 4$ (а) и $\sigma^* = 1$ (б) (в силу симметрии АЧП относительно линии $\gamma = \pi/2$ показана лишь его половина). Сепаратриса (штриховая линия), соединяющая неустойчивые стационарные точки и охватывающая устойчивую, разделяет две области – с осциллирующей относительно $\gamma = \pi/2$ разностью фаз сопряженных форм и с монотонно изменяющейся разностью фаз (уравнения сепаратрис получают из (1.17) при $C = 0$ и $C = -\sigma^*$ соответственно).



Рассмотрим несвязанные колебания по сопряженным формам. Отсутствие стационарных точек при $|\sigma^*| > 2$ не означает, что стационарные несвязанные колебания в этом случае невозможны. Нужно учесть, что величина γ для несвязанных колебаний не определена (поэтому второе уравнение (2.1) можно не учитывать), и этим колебаниям отвечают линии $\xi = 0$ и $\xi = 1$, которые являются интегральными линиями (1.17). При малых возмущениях движение будет описываться интегральными линиями, примыкающими к линиям $\xi = 0$ и $\xi = 1$; очевидно, что несвязанные колебания являются устойчивыми. Напротив, переход к АЧП второго типа (фиг. б) с неустойчивыми стационарными точками на линиях $\xi = 0$ или $\xi = 1$ означает, что несвязанные колебания по соответствующей сопряженной форме становятся неустойчивыми (при малейшем возмущении начинается периодическая перекачка энергии в другую форму и обратно, причем степень перекачки энергии определяется при бесконечно малом возмущении точкой P на сепаратрисе).

Рассмотрим теперь режим связанных колебаний, определяемый устойчивой стационарной точкой C на линии $\gamma = \pi/2$. Обозначим частоту этих колебаний через ω_* (для стационарных колебаний, как видно из (1.13), $\theta'_1 = \theta'_2 = \text{const}$, и тогда из (1.10), (1.12) имеем $\omega_* = \omega + \theta'_1$). Принимая, для простоты, начальную фазу $\theta_{10} = 0$, имеем из (1.7), (1.10), (1.12):

$$f_1 = \epsilon a_1 \cos \omega_* t + O(\epsilon^3), \quad f_2 = \epsilon a_2 \sin \omega_* t + O(\epsilon^3) \quad (2.4)$$

В конфигурационной плоскости (f_1, f_2) получаем эллипс. Динамический прогиб определяется из (1.2):

$$w = \epsilon [a_1 \cos(\omega_* t - ny/R) + (a_2 - a_1) \sin \omega_* t \sin(ny/R)] \sin[m\pi x/l] + n^2 \epsilon^2 / (8R) [a_1^2 + a_2^2 + (a_2^2 - a_1^2) \cos 2\omega_* t] \sin^2(m\pi x/l) + O(\epsilon^3) \quad (2.5)$$

Это выражение определяет бегущую волну с частотой ω_* , на которую накладывается стоячая волна (с той же частотой) и осесимметричное колебание (с удвоенной частотой). В частном случае идеальной оболочки ($\sigma^* = 0$) имеем $a_1 = a_2$, и колебания оказываются чистой бегущей волной (наложенной на постоянное смещение). Можно показать [7], что бегущей волне соответствует минимальная (из всех возможных при данной энергии изгибных колебаний) амплитуда осесимметричной компоненты (минимальная переменная составляющая квадратичного слагаемого в выражении (1.2)), и именно с этим связана устойчивость режима бегущей волны.

Отметим, что сам по себе режим бегущей волны нельзя считать чисто нелинейным явлением. Для существования бегущей волны необходимо лишь совпадение частот сопряженных форм (при начальной разности фаз $\pi/2$). Но в линейном приближении это условие выполняется лишь для идеальной оболочки (независимо от соотношения амплитуд a_k). При расстройке частот сопряженных форм, обусловленной погибью, этот стационарный режим исчезает. В нелинейной же системе этот режим оказывается значительно устойчивей благодаря синхронизации частот (однако эта синхронизация возможна лишь при $|\sigma^*| \leq 2$ и происходит при определенном соотношении амплитуд a_k).

Условие $|\sigma^*| < 2$ с учетом (1.16) можно записать в виде

$$e \geq e^* = |2\sigma/(4\omega^2\kappa - b_1)| \quad (2.6)$$

Этому условию можно придать другой вид, если принять начальные условия $f_1(0) \neq 0, f_1(0) = f_2(0) = f_2(0) = 0$ (т.е. принять, что в начальный момент возбуждается только одна из сопряженных форм). Тогда $e = \varepsilon^{-2} f_1^2(0)$ и с учетом (1.6) получаем из (2.6):

$$\frac{f_1(0)}{h} = \left[\frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{h^2(4\omega^2\kappa - h_1)} \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

Таким образом, при данной геометрии и расстройке частот характер колебательных режимов определяется энергией (амплитудой) колебаний. При малой энергии (энергия и амплитуда не превосходят пороговых значений, определяемых (2.6) и (2.7)) устойчивыми одночастотными режимами колебаний являются лишь несвязанные колебания по каждой из сопряженных форм. При большой энергии (условия (2.6), (2.7) выполняются) одна из этих форм становится неустойчивой, но появляется устойчивый режим связанных колебаний, включающий в себя бегущую волну.

Энергия колебаний существенно влияет не только на стационарные, но и на нестационарные режимы. В случае малой энергии (АЧП типа 1, фиг. а) модуляция (перекачка энергии) относительно мала; при большой энергии (фиг. в) модуляция становится резко выраженной.

Полученные выводы хорошо согласуются с результатами экспериментальных наблюдений [2-4]: при возбуждении свободных колебаний отмечается сильная модуляция (биения); бегущие волны появляются лишь при достаточно большой энергии колебаний.

Общее решение задачи при произвольных начальных условиях может быть получено аналогично решению для кругового кольца [7]. Дифференциальное уравнение, определяющее зависимость ξ от медленного времени T_2 , получается при исключении $\dot{\gamma}$ из первого уравнения (1.15) и интеграла (1.17):

$$(\omega/2\beta)^2 (d\xi/dT_2) = F(\xi) \quad (2.8)$$

$$F(\xi) = (\sigma^*\xi + C)[2\xi(1 - \xi) - (\sigma^*\xi + C)] \quad (2.9)$$

Из положительности $F(\xi)$ следуют неравенства

$$\sigma^*\xi + C \geq 0, \quad 2\xi(1 - \xi) \leq \sigma^*\xi + C$$

Видно, что обе скобки в выражении $F(\xi)$ не могут быть отрицательными. Следовательно, решениям соответствуют участки прямых $y = \sigma^*\xi + C$, лежащие внутри области, ограниченной параболой $y = 2\xi(1 - \xi)$ (в случае идеальной оболочки наклонные прямые переходят в прямые, параллельные оси абсцисс). На отрезке $(0, 1)$ имеются два корня ξ_1, ξ_2 многочлена $F(\xi)$; третий корень ξ_3 при $\sigma^* > 0$ лежит слева, а при $\sigma^* < 0$ — справа от этого интервала, так что при $0 \leq \sigma^* \leq 1$ имеем $\sigma^*(\xi - \xi_3) > 0$. Принимая, для простоты, начальное значение ξ равным ξ_2 , запишем уравнение (2.9) в виде

$$\int_{\xi_2}^{\xi} [\sigma * (\xi - \xi_1)(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_3)]^{-1/2} d\xi = \pm 2^{3/2} \beta T_2 / \omega$$

Решение этого уравнения записывается через эллиптический синус Якоби

$$\xi = \xi_2 - (\xi_2 - \xi_1) \operatorname{sn}^2(z, k) \quad (2.10)$$

$$z = [2\sigma * (\xi_2 - \xi_3)]^{1/2} \beta T_2 / \omega, \quad k = [(\xi_2 - \xi_1) / (\xi_2 - \xi_3)]^{1/2} \quad (2.11)$$

Используя интеграл (1.17), можно получить явную формулу для разности фаз γ .

Так как движение от точки ξ_1 до ξ_2 соответствует полупериоду модуляции колебаний, период модуляции определяется через полный эллиптический интеграл первого рода (в реальном времени, $E_0 = \varepsilon^2 e$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$):

$$T = 4K(k)\omega^{1/2} [E_0 \Delta\omega (\xi_2 - \xi_3) (4\omega^2 \kappa - b_1)]^{-1/2}$$

Исследования, описанные в этой публикации, стали возможны частично благодаря гранту № К4Н100 Объединенного фонда Правительства Украины и Международного научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Эвенсен Д.А.* Нелинейные колебания круговых цилиндрических оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. Теория, эксперимент и проектирование. М.: Машиностроение, 1980. С. 156–176.
3. *Evensen D.A., Fulton A.E.* Some studies on the nonlinear dynamic response of shell-type structures // Dynamic Stability of Structures / Ed. G. Hermann. New York: Pergamon Press, 1967. P. 237–254.
4. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Г.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1984. 220 с.
5. *Tobias S.A.* A theory of imperfection for the vibration of elastic bodies of revolution // Engineering. 1951. V. 44. No. 70. P. 409–410.
6. *Ладыгина Е.В., Маневич А.И.* Свободные колебания нелинейной кубической системы с двумя степенями свободы при близких собственных частотах // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 40–49.
7. *Маневич А.И.* Взаимодействие сопряженных форм при нелинейных свободных изгибных колебаниях кругового кольца // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 119–125.
8. *Найфэ А.В.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
9. *Rosenberg R.M., Hsu C.S.* On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degrees of freedom // Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. С. 380–415.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
25.III.1995