МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Л.А. ШАПОВАЛОВ

ОБ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ В УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК

Эксперименты показывают, что при динамическом нагружении слоистых оболочек с жесткими и мягкими слоями, когда на тонкостенную конструкцию действует боковая или продольная волны давления, выпучивание оболочки сопровождается поперечным обжатием слоев с образованием большого числа мелких вмятин [1]. Известно, что классические теории оболочек типа Кирхгофа – Лява и сдвиговые теории Рейсснера – Тимошенко не описывают эффектов, связанных с обжатием полотна. В то же время даже частичный учет трансверсальных деформаций за счет поперечных сдвигов приводит к повышению порядка и ухудшению обусловленности систем дифференциальных уравнений. Естественно ожидать, что учет обжатия еще более усложнит нелинейные уравнения движения оболочек и, в свою очередь, увеличит их порядок. Однако, как бы ни были сложны уравнения нелинейной динамики оболочек с учетом всех трансверсальных факторов, их надо получить с тем, чтобы научиться успешно преодолевать с помощью ЭВМ вычислительные трудности, возникающие при решении данного класса практически важных задач. Публикации по тематике статьи содержатся в работах [2–11] и обзорах [12–14].

В публикуемой работе рассматривается вариант уравнений нелинейной динамики непологих оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия при максимально возможных упрощениях физической модели с тем, чтобы уравнения были обозримыми и ими можно было бы пользоваться при проведении инженерных расчетов. Так слоистая конструкция заменяется эквивалентной однородной оболочкой из ортотропного материала. При формулировке геометрических соотношений используется метод гипотез для пакета в целом. В развитие классических теорий предполагается, что поперечные сдвиги "осреднены по толщине" [15], а обжатие постоянно. Описание геометрической нелинейности ограничивается учетом поворотов нормали относительно координатных линий [16]. Уравнения движения оболочек вместе с краевыми и начальными условиями получены вариационным методом, исходя из принципа Гамильтона – Остроградского. Уравнения принадлежат к гиперболическому типу и имеют четырнадцатый порядок. Основные соотношения записаны в линиях кривизны и учитывают возможные начальные несовершенства конструкции[1].

Полученные уравнения тестированы путем решения частных задач для кругового кольца, допускающих точные решения. Рассмотрены изгибные колебания кольца и определен начальный участок спектра собственных частот. Решена задача устойчивости кольца при действии гидростатического давления. В обоих случаях учитывались поперечные сдвиги и обжатие. Найденные решения сохраняют преемственность с известными исследованиями и представляют самостоятельный интерес.

1. Геометрические зависимости. Физические уравнения. При построении геометрических зависимостей теории оболочек будем исходить из формул нелинейной теории упругости в криволинейных координатах, связанных с линиями кривизны [17]. Примем эти формулы в наиболее простом виде [16]:

[1] Работа доложена на II Всероссийском симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". Москва, 13–17 февраля 1996 г.

$$\varepsilon_{11}=e_{11}+\tfrac{1}{2}\omega_2^2,\ \varepsilon_{22}=e_{22}+\tfrac{1}{2}\omega_1^2,\ \varepsilon_{12}=e_{12}-\omega_1\omega_2,\ \varepsilon_{13}=e_{13},\ \varepsilon_{23}=e_{23},\ \varepsilon_{33}=e_{33} \tag{1.1}$$

$$e_{11}=\frac{1}{1+z/R_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_s}{\partial\alpha_1}+\frac{v_s}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+\frac{w_s}{R_1}\right),\quad e_{22}=\frac{1}{1+z/R_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_s}{\partial\alpha_2}+\frac{u_s}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+\frac{w_s}{R_2}\right)$$

$$e_{33}=\frac{\partial w_s}{\partial z},\quad e_{12}=\frac{1}{1+z/R_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial v_s}{\partial\alpha_1}-\frac{u_s}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{1}{1+z/R_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_s}{\partial\alpha_2}-\frac{v_s}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)$$

$$e_{13}=\frac{\partial u_s}{\partial z}+\frac{1}{1+z/R_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_s}{\partial\alpha_1}-\frac{u_s}{R_1}\right),\quad e_{23}=\frac{\partial v_s}{\partial z}+\frac{1}{1+z/R_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_s}{\partial\alpha_2}-\frac{v_s}{R_2}\right)$$

$$2\omega_1=-\frac{\partial v_s}{\partial z}+\frac{1}{1+z/R_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_s}{\partial\alpha_2}-\frac{v_s}{R_2}\right),\quad 2\omega_2=\frac{\partial u_s}{\partial z}-\frac{1}{1+z/R_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_s}{\partial\alpha_1}-\frac{v_s}{R_1}\right) \tag{1.2}$$

Здесь e_{ij}, ω_k $(i,j,k=1,2,3)$ – линейные части деформаций оболочки как трехмерного тела и повороты элемента тела относительно координатных линий α_1, α_2, z, A_1, A_2, R_1, R_2 – параметры Ламе и главные кривизны срединной поверхности S; u_s, v_s, w_s – смещения эквидистантного слоя.

Закон Гука для ортотропного материала примем в обозначениях [18]:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E_1}-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22}-\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33},\quad \varepsilon_{22}=-\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}+\frac{\sigma_{22}}{E_2}-\frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{33}=-\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11}-\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}+\frac{\sigma_{33}}{E_3},\quad \varepsilon_{13}=\frac{\sigma_{13}}{G_{13}},\quad \varepsilon_{23}=\frac{\sigma_{23}}{G_{23}},\quad \varepsilon_{12}=\frac{\sigma_{12}}{G_{12}}$$

$$E_1\nu_{21}=E_2\nu_{12},\quad E_2\nu_{32}=E_3\nu_{23},\quad E_3\nu_{13}=E_1\nu_{31}$$

Пренебрегая эффектами Пуассона в трансверсальных направлениях, приближенно будем считать $\nu_{13}=\nu_{31}=0$, $\nu_{32}=\nu_{23}=0$. Кроме того, для краткости, обозначим $\nu_{12}=\nu_1$, $\nu_{21}=\nu_2$, $G_{13}=G_1$, $G_{23}=G_2$, $G_{12}=G$. В новых обозначениях для гипотетического ортотропного материала имеем

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E_1}(\sigma_{11}-\nu_1\sigma_{22}),\quad \varepsilon_{33}=\frac{1}{E_3}\sigma_{33},\quad \varepsilon_{12}=\frac{1}{G}\sigma_{12},\quad \varepsilon_{13}=\frac{1}{G_1}\sigma_{13}\quad (1\rightleftarrows 2) \tag{1.3}$$

В развитие деформационной формулировки гипотез Кирхгофа – Лява будем предполагать, что все трансверсальные компоненты деформации, включая поперечные сдвиги и обжатие, отличны от нуля и заданы следующим образом:

$$\varepsilon_{13}=e_{13}=\frac{\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)}{1+z/R_1},\quad \varepsilon_{23}=e_{23}=\frac{\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)}{1+z/R_2},\quad \varepsilon_{33}=e_{33}=\chi(\alpha_1,\alpha_2) \tag{1.4}$$

Здесь γ_1, γ_2, χ – неизвестные функции, подлежащие определению. Распределение поперечных сдвигов в форме (1.4) выбрано из условия существования упругого потенциала непологой оболочки. Оно постулируется в [15], как самостоятельная гипотеза "осреднения по толщине" деформаций сдвига.

Кинематических гипотез (1.4) достаточно для описания перемещений оболочки из ортотропного материала (1.3). Действительно, из соотношений (1.2)–(1.4) имеем полную систему дифференциальных уравнений для нахождения искомых смещений эквидистантной поверхности

$$\frac{\partial w_s}{\partial z}=\chi(\alpha_1,\alpha_2),\quad \frac{\partial u_s}{\partial z}=\left(1+\frac{z}{R_1}\right)^{-1}\left[\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_s}{\partial\alpha_1}-\frac{u_s}{R_1}\right)\right]$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial z}=\left(1+\frac{z}{R_2}\right)^{-1}\left[\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_s}{\partial\alpha_2}-\frac{v_s}{R_2}\right)\right] \tag{1.5}$$

Интегрируя первое уравнение (1.5) для прогиба w_s и разыскивая тангенциальные смещения u_s, v_s из двух других уравнений в виде отрезков степенных рядов, придем к зависимостям для определения коэффициентов разложения u_1, v_1 $(1 \rightleftarrows 2)$:

$$w_s = w(\alpha_1, a_2) + z\chi(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_s = u(\alpha_1, \alpha_2) + zu_1(\alpha_1, \alpha_2) + z^2 u_2(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$v_s = v(\alpha_1, a_2) + zv_1(\alpha_1, \alpha_2) + z^2 v_2(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$u_1 - \gamma_1 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} + z\left(2u_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1}\right) + O(z^2) = 0$$

$$v_1 - \gamma_2 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} + z\left(2v_2 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2}\right) + O(z^2) = 0 \qquad (1.6)$$

Из тождеств (1.6) следует $u_1 = \theta_1 - \gamma_1 = \psi_1$, $u_2 = -(1/2)A_1^{-1}\partial\chi / \partial\alpha_1$, где θ_1 $(1 \rightleftarrows 2)$ – углы поворота нормали к поверхности (1.10).

После подстановки u_1, v_1 $(1 \rightleftarrows 2)$ в формулы (1.6) получим

$$u_s(\alpha_1, \alpha_2, z) = u + z\psi_1 - \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1}\right)$$

$$v_s(\alpha_1, \alpha_2, z) = v + z\psi_2 - \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2}\right)$$

$$w_s(\alpha_1, \alpha_2, z) = w + z\chi \qquad (1.7)$$

Кинематические зависимости (1.7), отделенные ломаной чертой, содержат параметры, связанные между собой. При учете поперечного обжатия это уменьшает число обобщенных перемещений до минимального значения – с восьми до шести: u, v, w, ψ_1, ψ_2, χ.

Нелинейные деформации (1.1) вычислим с помощью соотношений (1.7), сохраняя слагаемые, пропорциональные степени не старше z^2, и учитывая малость параметра z/R_i $(i = 1, 2)$ в сравнении с единицей

$$\varepsilon_{11} = (1 + z/R_1)^{-1}(\mathrm{E}_1 + zK_1 + z^2 P_1), \quad \varepsilon_{13} = (1 + z/R_1)^{-1}(\psi_1 - \theta_1)$$

$$\varepsilon_{22} = (1 + z/R_2)^{-1}(\mathrm{E}_2 + zK_2 + z^2 P_2), \quad \varepsilon_{23} = (1 + z/R_2)^{-1}(\psi_2 - \theta_2)$$

$$\varepsilon_{12} = (1 + z/R_1)^{-1}(\Omega_1 + z\mathrm{T}_1 + z^2\Theta_1) + (1 + z/R_2)^{-1}(\Omega_2 + z\mathrm{T}_2 + z^2\Theta_2), \quad \varepsilon_{33} = \chi \qquad (1.8)$$

$$\mathrm{E}_1 = \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1^2, \quad K_1 = k_1 + \theta_1\eta_1, \quad P_1 = \tfrac{1}{2}\left(\rho_1 + \eta_1^2\right), \quad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1\theta_2, \quad 2\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2, \quad \mathrm{T}_1 = t_1 + \omega_2/R_1 + \tfrac{1}{2}\left(\theta_1\eta_2 + \theta_2\eta_1\right)$$

$$2\Theta = \Theta_1 + \Theta_2, \quad \Theta_1 = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \eta_1\eta_2\right)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{v}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1}, \quad k_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\psi_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \theta_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u}{R_1}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\eta_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad t_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\psi_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\eta_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \eta_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1}, \quad \gamma_1 = \psi_1 - \theta_1 \quad (u \rightleftarrows v, \ 1 \rightleftarrows 2) \qquad (1.9)$$

Для учета начальных несовершенств тонкостенной конструкции будем считать, что каждое из полных обобщенных перемещений u, v, w, ψ_1, ψ_2, χ, снабжаемое индексом $(\wedge)$, представляет собой сумму перемещений начального искривленного состояния (с индексом градус), в котором оболочка не напряжена, и перемещений без индексов за счет действия внешних нагрузок на конструкцию [19]:

$$u^{\wedge} = u^{\circ} + u, \quad v^{\wedge} = v^{\circ} + v, \quad w^{\wedge} = w^{\circ} + w$$
$$\psi_1^{\wedge} = \psi_1^{\circ} + \psi_1, \quad \psi_2^{\wedge} = \psi_2^{\circ} + \psi_2, \quad \chi^{\wedge} = \chi^{\circ} + \chi \tag{1.10}$$

Вычислим, для примера, одну из деформаций оболочки с учетом начальных несовершенств. Так для мембранной деформации с учетом (1.9) имеем

$$\mathrm{E}_1^{\wedge} = \varepsilon_1^{\wedge} + \tfrac{1}{2}\theta_1^{\wedge 2} = \left(\varepsilon_1^{\circ} + \varepsilon_1\right) + \tfrac{1}{2}\left(\theta_1^{\circ} + \theta_1\right)^2 = \mathrm{E}_1^{\circ} + \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1^2 + \theta_1^{\circ}\theta_1$$
$$\mathrm{E}_1^{\circ} = \varepsilon_1^{\circ} + \tfrac{1}{2}\theta_1^{\circ 2} \equiv 0, \quad \mathrm{E}_1^{\wedge} = \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1^2 + \theta_1^{\circ}\theta_1 \tag{1.11}$$

Остальные деформации найдем, подобно выражениям (1.11). В результате, при $\psi_1^{\circ} = \theta_1^{\circ}, \ \psi_2^{\circ} = \theta_2^{\circ}, \ \chi^{\circ} = 0$, с учетом (1.8), (1.9), получим

$$\varepsilon_{11}^{\wedge} = \left(1 + z/R_1\right)^{-1}\left(\mathrm{E}_1^{\wedge} + zK_1 + z^2P_1\right), \quad \varepsilon_{13}^{\wedge} = \left(1 + z/R_1\right)^{-1}\left(\psi_1^{\wedge} - \theta_1^{\wedge}\right)$$
$$\varepsilon_{22}^{\wedge} = \left(1 + z/R_2\right)^{-1}\left(\mathrm{E}_2^{\wedge} + zK_2 + z^2P_2\right), \quad \varepsilon_{23}^{\wedge} = \left(1 + z/R_2\right)^{-1}\left(\psi_2^{\wedge} - \theta_2^{\wedge}\right)$$
$$\varepsilon_{12}^{\wedge} = \left(1 + z/R_1\right)^{-1}\left(\Omega_1^{\wedge} + z\mathrm{T}_1^{\wedge} + z^2\Theta_1^{\wedge}\right) + \left(1 + z/R_2\right)^{-1}\left(\Omega_2^{\wedge} + z\mathrm{T}_2^{\wedge} + z^2\Theta_2^{\wedge}\right), \quad \varepsilon_{33} = \chi$$
$$\mathrm{E}_1^{\wedge} = \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1^2 + \theta_1^{\circ}\theta_1, \quad K_1^{\wedge} = k_1 + \left(\theta_1^{\circ} + \theta_1\right)\eta_1, \quad P_1^{\wedge} = \tfrac{1}{2}\left(\rho_1 + \eta_1^2\right), \quad \Omega^{\wedge} = \Omega_1^{\wedge} + \Omega_2^{\wedge}$$
$$\Omega_1^{\wedge} = \omega_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1\theta_2 + \theta_1^{\circ}\theta_2 + \theta_2^{\circ}\theta_1, \quad \mathrm{T}_1^{\wedge} = t_1 + \omega_2/R_1 + \tfrac{1}{2}\left[\left(\theta_1^{\circ} + \theta_1\right)\eta_2 + \left(\theta_2^{\circ} + \theta_2\right)\eta_1\right]$$
$$2\mathrm{T}^{\wedge} = \mathrm{T}_1^{\wedge} + \mathrm{T}_2^{\wedge}, \quad 2\Theta^{\wedge} = \Theta_1^{\wedge} + \Theta_2^{\wedge}, \quad \Theta_1^{\wedge} = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \eta_1\eta_2\right) \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{1.12}$$

Формулы (1.12) представляют собой искомые геометрические зависимости для оболочки с учетом начальных несовершенств.

2. Потенциал деформации. Соотношения упругости. Работа внешних сил. Кинетическая энергия. В рамках геометрически нелинейной теории малых деформаций вариация потенциальной энергии оболочки, как трехмерного тела, имеет вид [17]:

$$\delta W = \iiint\limits_{(V)} \left(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\delta\sigma_{23} + \right.$$
$$\left. + \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}\right)A_1A_2\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)d\alpha_1 d\alpha_2 dz \tag{2.1}$$

В выражении (2.1) и далее индексы ($\wedge$) для оболочки с несовершенной геометрией опущены. Учитывая формулы (1.12) и переходя в функционале (2.1) к двумерной задаче, найдем

$$\delta W = \iint\limits_{(S)} \left(T_1\delta\mathrm{E}_1 + T_2\delta\mathrm{E}_2 + T_{12}\delta\Omega_1 + T_{21}\delta\Omega_2 + N_1\delta\gamma_1 + N_2\delta\gamma_2 + Z\delta\chi + M_1\delta K_1 + M_2\delta K_2 + \right.$$
$$\left. + M_{12}\delta\mathrm{T}_1 + M_{21}\delta\mathrm{T}_2 + L_1\delta P_1 + L_2\delta P_2 + L_{12}\delta\Theta_1 + L_{21}\delta\Theta_2\right)A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{2.2}$$

Здесь $T_1, T_2, \ldots, L_{21}$ – погонные внутренние усилия и моменты первого и второго порядков

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_{12} \\ M_1 & M_{12} \\ L_1 & L_{12} \end{bmatrix} = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \begin{vmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \end{vmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz$$
$$N_1 = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{13}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz, \quad Z = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{33}\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{2.3}$$

Для получения соотношений упругости оболочки воспользуемся формулами (2.3), законом Гука для ортотропного материала (1.3) и геометрическими зависимостями (1.12). Максимально упрощая соотношения упругости с учетом малости параметра тонкостенности $h/R_i \ll 1$ $(i = 1, 2)$ получим

$$\begin{gathered}
T_1 = B_1(\mathrm{E}_1 + \nu_2 \mathrm{E}_2) + D_1(P_1 + \nu_2 P_2), \quad M_1 = D_1(K_1 + \nu_2 K_2), \quad N_1 = B\gamma_1 \\
T_{12} = T_{21} = S = B\Omega + 2D\Theta, \quad M_{12} = M_{21} = H = 2D\mathrm{T}, \quad Z = E_3 h\chi \\
L_1 = D_1(\mathrm{E}_1 + \nu_2 \mathrm{E}_2) + C_1(P_1 + \nu_2 P_2), \quad L_{12} = L_{21} = L = D\Omega = 2C\Theta \\
C_1 = E_1 h^5 / [80(1 - \nu_1\nu_2)], \quad B_1 = E_1 h / (1 - \nu_1\nu_2), \quad D_1 = E_1 h^3 / [12(1 - \nu_1\nu_2)] \\
B = Gh, \quad C = Gh^5 / 80, \quad D = Gh^5 / 12 \quad (1 \rightleftarrows 2)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) позволяют упростить функционал (2.2) за счет сокращения общего числа внутренних усилий при $T_{12} = T_{21} = S$, $M_{12} = M_{21} = H$, $L_{12} = L_{21} = L$. В результате имеем

$$\delta W = \iint\limits_{(S)} \left(T_1 \delta \mathrm{E}_1 + T_2 \delta \mathrm{E}_2 + S\delta\Omega + N_1 \delta\gamma_1 + N_2 \delta\gamma_2 + Z\delta\chi + M_1 \delta K_1 + M_2 \delta K_2 + \right.$$
$$\left. + 2H\delta\mathrm{T} + L_1 \delta P_1 + L_2 \delta P_2 + 2L\delta\Theta\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{2.5}$$

Будем рассматривать в дальнейшем оболочку, ограниченную граничной поверхностью F и гладким контуром Γ, совпадающим с линией α_2 на срединной поверхности, причем $ds_2 = A_2 d\alpha_2$, $dF = A_2(1 + z/R_2) d\alpha_2 dz$. Векторы краевых напряжений $\boldsymbol{\sigma}^F$, смещений $\mathbf{U}_s$ и элементарная работа краевых сил вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\sigma}^F = \sigma_{11}^F \mathbf{e}_1 + \sigma_{12}^F \mathbf{e}_2 + \sigma_{13}^F \mathbf{n}, \quad \mathbf{U}_s = u_s \mathbf{e}_1 + v_s \mathbf{e}_2 + w_s \mathbf{n}$$

$$\delta A_F = \iint\limits_{(F)} \boldsymbol{\sigma}^F \delta \mathbf{U}_s A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) d\alpha_2 dz$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ – единичные векторы срединной поверхности.

Учитывая формулы для смещений (1.7), (1.10) и выделяя интегралы по толщине оболочки, после интегрирования по частям получим

$$\delta A_F = \int\limits_{(\Gamma)} \left(T_1^F \delta u + S^F \delta v + N_1^F \delta w + M_1^F \delta\psi_1 + H^F \delta\psi_2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} A_2 \partial L^F / \partial\alpha_2 \delta\chi + \tfrac{1}{2} L_1^F \delta\eta_1\right) A_2 d\alpha_2 \tag{2.6}$$

где заданные краевые погонные силы при $H_2 = A_2(1 + z/R_2)$ имеют вид

$$T_1^F = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}^F H_2 A_2^{-1} dz, \quad S^F = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12}^F H_2 A_2^{-1} dz, \quad N_1 = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{13}^F H_2 A_2^{-1} dz$$

$$M_1^F = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}^F z H_2 A_2^{-1} dz, \quad H = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12}^F z H_2 A_2^{-1} dz, \quad L_1^F = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}^F z^2 H_2 A_2^{-1} dz$$

$$L^F = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12}^F z^2 H_2 A_2^{-1} dz$$

Выражение (2.6) представляет собой работу семи обобщенных краевых сил на соответствующих им перемещениях u, v, w, ψ_1, ψ_2, χ, $\eta_1 = -(1/A_1)\partial\chi/\partial\alpha_1$.

Пусть на оболочку действуют две группы сил: гидростатическое давление $-q_n \mathbf{n}^*$ и "мертвая" тангенциальная нагрузка $p_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2$, приложенные обе к срединной поверхности, нормальные составляющие "мертвой" нагрузки p_n^+ и p_n^-, действующие на лицевых поверхностях $z = +h/2$ и $z = -h/2$. Здесь $\mathbf{n}^*$ – единичный вектор нормали к деформированной срединной поверхности. Введем в рассмотрение векторы поверхностных сил и перемещений

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{Q})_{z=0} = \mathbf{Q}^\circ = -q_n \mathbf{n}^* = -q_n\left(\theta_1^\wedge \mathbf{e}_1 + \theta_2^\wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{n}\right), \quad (\mathbf{P})_{z=0} = \mathbf{P}^\circ = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 \\
&(\mathbf{P})_{z=+h/2} = \mathbf{P}^+ = p_n^+\mathbf{n}, \quad (\mathbf{P})_{z=-h/2} = \mathbf{P}^- = p_n^-\mathbf{n} \\
&(\mathbf{U}_s)_{z=+h/2} = \mathbf{U}_s^+ = \left[u + \tfrac{1}{2}h\psi_1 + O(h^2)\right]\mathbf{e}_1 + \left[v + \tfrac{1}{2}h\psi_2 + O(h^2)\right]\mathbf{e}_2 + (w + \tfrac{1}{2}h\chi)\mathbf{n} \\
&(\mathbf{U}_s)_{z=-h/2} = \mathbf{U}_s^- = \left[u - \tfrac{1}{2}h\psi_1 + O(h^2)\right]\mathbf{e}_1 + \left[v - \tfrac{1}{2}h\psi_2 + O(h^2)\right]\mathbf{e}_2 + (w - \tfrac{1}{2}h\chi)\mathbf{n} \\
&(\mathbf{U}_s)_{z=0} = \mathbf{U}_s^\circ = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{n}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

В соответствии с формулами (2.7), опуская малые слагаемые $O(h^2)$, представим вариацию работы поверхностных сил следующим образом:

$$
\delta A_s = \iint_{(S)} \left[\left(\mathbf{Q}^\circ + \mathbf{P}^\circ\right)\delta\mathbf{U}_s^\circ + \mathbf{P}^+\delta\mathbf{U}_s^+ + \mathbf{P}^-\delta\mathbf{U}_s^-\right] A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2
$$

или в скалярной форме

$$
\begin{aligned}
\delta A_s = \iint_{(S)} &\left\{\left[p_1 - q_n\left(\theta_1^\circ + \theta_1\right)\right]\delta u + \left[p_2 - q_n\left(\theta_2^\circ + \theta_2\right)\right]\delta v + \left(p_n^+ + p_n^- - q_n\right)\delta w + \right.\\
&\left. + (h/2)\left(p_n^+ - p_n^-\right)\delta\chi\right\} A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Кинетическая энергия оболочки, как трехмерного тела, имеет вид

$$
T = \iiint_{(V)} \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\mathbf{U}_s}{dt}\right)^2 A_1A_2\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 dz \tag{2.9}
$$

где ρ – плотность материала оболочки.

Используя соотношения (1.7), (1.10) и учитывая, что начальные смещения не зависят от времени, пренебрегая малыми членами, содержащими параметр тонкостенности ($1 + z/R_i \approx 1$), из (2.9) в результате варьирования найдем

$$
\begin{aligned}
\delta T = \iint_{(S)} \rho &\left[h\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta v + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\partial w\right) + \frac{1}{4}J\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\partial\eta_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\eta_2\right) + \right.\\
&+ J\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\partial\psi_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\psi_2 + \frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\chi + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\eta_1 + \right.\\
&\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\eta_2 \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta v\right)\right] A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

3. Вариационное уравнение Гамильтона. Нелинейные уравнения движения. Начальные условия. Динамические граничные условия. Рассмотрим процесс движения оболочки на отрезке времени от t_0 до t_1. Будем сравнивать для этого отрезка времени различные траектории движения точек системы между начальным и конечным положениями. Согласно принципу Гамильтона–Остроградского, для истинных траекторий должно выполняться условие в форме вариационного уравнения

$$
\delta I = \delta\int_{t_0}^{t_1}(T - \Pi)dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}(T - W + A_F + A_S)dt = 0 \tag{3.1}
$$

где I – действие по Гамильтону [20].

Принимая во внимание формулы (2.5), (2.6), (2.8), (2.10), (1.12) и, преобразуя интегралы по поверхности с помощью формул Грина [21], представим вариационное уравнение (3.1) в форме

$$\delta I = \iint\limits_{(S)} \rho h A_1 A_2 (V_1\delta u + V_2\delta v + V_3\delta w + V_4\delta\psi_1 + V_5\delta\psi_2 + V_6\delta\chi + V_7\delta\eta_1)_{t_0}^{t_1} d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int\limits_{(\Gamma)} -(F_1\delta u + F_2\delta v + F_3\delta w + F_4\delta\psi_1 + F_5\delta\psi_2 + F_6\delta\chi + F_7\delta\eta_1)A_2 d\alpha_2 +\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{(S)} [S_1\delta u + S_2\delta v - A_1A_2(S_3\delta w + S_4\delta\psi_1 + S_5\delta\psi_2 + S_6\delta\chi)]d\alpha_1 d\alpha_2\right\} = 0 \tag{3.2}$$

$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{J}{h}\frac{\partial\eta_1}{\partial t},\quad V_2 = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{J}{h}\frac{\partial\eta_2}{\partial t},\quad V_3 = \frac{\partial w}{\partial t},\quad V_4 = \frac{J}{h}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}$$

$$V_5 = \frac{J}{h}\frac{\partial\psi_2}{\partial t},\quad V_6 = \frac{J}{h}\frac{\partial\chi}{\partial t},\quad V_7 = \frac{1}{2A_1 h}\left(J\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}J\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right),$$

$$F_1 = T_1 - T_1^F,\ F_2 = S + \frac{H}{R_2} - S^F,\ F_3 = M_1 - M_1^F,\ F_4 = H - H^F,\ F_5 = (N_1 - N_1^F) -$$

$$-T_1(\theta_1^\circ + \theta_1) - S(\theta_2^\circ + \theta_2) - M_1\eta_1 - H\eta_2,\quad F_6 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(L - L^F) +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\Phi_1(L_1,\ L,\ L_2) - \rho J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\rho J\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\right] - M_1(\theta_1^\circ + \theta_1) - H(\theta_2^\circ + \theta_2) -$$

$$-L_1\eta_1 - L_2\eta_2,\quad F_7 = \frac{1}{2}(L_1 - L_1^F) \tag{3.3}$$

Здесь $V_j(j=\overline{1,\ 7})$ – обобщенные скорости в области S, F_i – обобщенные силы на контуре Г. Величины $S_k(k=\overline{1,\ 6})$ имеют вид

$$S_1 = \Phi_1(T_1,\ S,\ T_2) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1 H}{R_1}\right) + \frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H + \frac{A_1A_2}{R_1}[N_1 - T_1(\theta_1^\circ + \theta_1) - S(\theta_2^\circ + \theta_2) -$$

$$-M_1\eta_1 - H\eta_2 + A_1A_2\left[p_1 - q_n(\theta_1^\circ + \theta_1) - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\rho J\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\right]$$

$$S_3 = \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2[N_1 - T_1(\theta_1^\circ + \theta_1) - S(\theta_2^\circ + \theta_2) - M_1\eta_1 - H\eta_2] +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1[N_2 - T_2(\theta_2^\circ + \theta_2) - S(\theta_1^\circ + \theta_1) - M_2\eta_2 - H\eta_1]\right. - (p_n^+ + p_n^-) + q_n + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$S_4 = N_1 - \frac{1}{A_1A_2}\Phi_1(M_1,\ H,\ M_2) + \rho J\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2},\quad S_6 = \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} + Z -$$

$$-\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{2A_1}\Phi_1(L_1,\ L,\ L_2) - M_1(\theta_1^\circ + \theta_1) - H(\theta_2^\circ + \theta_2) - L_1\eta_1 - L_2\eta_2 -\right.\right.$$

$$-\frac{A_2}{2}\left(\rho J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\rho J\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\right)\Bigg]+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\Bigg[\frac{1}{2A_2}\Phi_2(L_2,\ L,\ L_1)-M_2(\theta_2^\circ+\theta_2)-H(\theta_1^\circ+\theta_1)-$$

$$-L_2\eta_2-L_1\eta_1-\frac{A_1}{2}\left(\rho J\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\rho J\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}\right)\Bigg]\Bigg\}-\frac{h}{2}(p_n^+-p_n^-)+\rho J\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$$

$$(1\rightleftarrows 2,\ 4\rightleftarrows 5,\ u\rightleftarrows v) \tag{3.4}$$

В формулах (3.3), (3.4) для записи операторов теории тонких оболочек введены сокращенные обозначения

$$\Phi_1(U,\ V,\ W)=\frac{\partial A_2 U}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1}\ \frac{\partial A_1^2 V}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}W\quad(1\rightleftarrows 2)$$

При независимых в области вариациях δu, δv, ..., $\delta\chi$ и независимых вариациях δu, δv, δw ..., $\delta\chi$, $\delta\eta$, на контуре Г из вариационного уравнения Гамильтона (3.2) следуют уравнения движения $S_1=S_2=...=S_6=0$, начальные условия $V_1\delta u=V_2\delta v=...=$ $=V_6\delta\chi=V_7\delta\eta_1=0$ и естественные динамические граничные условия $F_1=F_2=...=$ $=F_6=F_7=0$.

Уравнения движения имеют четырнадцатый порядок и соответствуют проектированию главного вектора и главного момента элемента оболочки на оси, связанные с недеформированной срединной поверхностью.

4. Решение частных задач. В связи с тем, что уравнения нелинейной динамики оболочек (3.4) с учетом трансверсальных деформаций имеют, в отличие от классической теории, специальную структуру и более высокий порядок, представляется целесообразным аппробировать эти уравнения путем аналитического решения простейших задач. Число таких задач ограничено. К ним, прежде всего, относится задача об изгибе кругового кольца, которая является аналогом поведения весьма длинного тонкостенного цилиндра, нагруженного в каждом сечении одинаковым радиальным давлением.

Для оценки работоспособности уравнений (3.4) в качестве первой модельной задачи рассмотрим собственные поперечные колебания кольца с учетом радиальных и тангенциальных смещений, поперечного сдвига и обжатия w, v, ψ_2, χ.

Полагая в уравнениях (3.4) $p_1=p_2=p_n^+=p_n^-=0$, $q_1=q_2=q_n=0$, $T_1=S=M_1=H=$ $=L_1=0$, $u=\psi_1=0$, $\nu_1=\nu_2=0$, для кольца единичной ширины при $\alpha_1=x$, $\alpha_2=y$, $R_2=R$, $(1/R_1)=0$, $A_1=A_2=1$, $\partial/\partial\alpha_1\equiv 0$, $\partial/\partial\alpha_2=\partial/\partial y$ получим

$$\frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{N_2}{R}-\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\rho h}{2}\ \frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}=0,\quad \frac{T_2}{R}-\frac{\partial N_2}{\partial y}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\quad N_2-\frac{\partial M_2}{\partial y}+\rho J\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{M_2}{R}+Z-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_2}{\partial y^2}+\rho J\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\rho J\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial t^2}+\frac{1}{4}\rho J\frac{\partial^3\eta_2}{\partial y\partial t^2}=0 \tag{4.1}$$

С учетом соотношений упругости (2.4) и геометрических зависимостей (1.9) представим уравнения (4.1) в перемещениях. В линейном приближении имеем

$$[L_{ij}]\{v,\ w,\ \psi_2,\ \chi\}^{\mathrm{T}}=0 \tag{4.2}$$

$$L_{11}=B_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{G_2 h}{R^2}-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad L_{22}=\frac{B_2}{R^2}-G_{12}h\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{33}=D_2\frac{\partial^3}{\partial y^3}-G_2 h-\rho J\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad L_{44}=\frac{D_2}{R^2}+E_3 h+\frac{A_2}{4}\ \frac{\partial^4}{\partial y^4}-\frac{1}{4}\rho J\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial t^2}+\rho J\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12}=\left(\frac{B_2}{R}+\frac{G_2h}{R}\right)\frac{\partial}{\partial y},\quad L_{13}=\frac{G_2h}{R},\quad L_{14}=\frac{\rho J}{2}\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2}-\frac{D_2}{2}\frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_{23}=-G_2h\frac{\partial}{\partial y},\quad L_{24}=-\frac{D_2}{2R}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad L_{34}=\frac{D_2}{R}\frac{\partial}{\partial y}$$

Периодические решения системы дифференциальных уравнений восьмого порядка (4.2) будем искать в форме

$$v=A\cos\frac{ny}{R}\cos pt,\quad w=B\sin\frac{ny}{R}\cos pt,\quad \psi_2=C\cos\frac{ny}{R}\cos pt,\quad \chi=D\sin\frac{ny}{R}\cos pt \qquad (4.3)$$

Частотное уравнение, отвечающее решению (4.3), имеет вид

$$\Delta=\det[a_{ij}]=0,\quad a_{ij}=a_{ji} \qquad (4.4)$$

$$a_{11}=-(\beta^2+n^2)+x,\quad a_{22}=-(1+\beta n^2)+x,\quad a_{33}=-(\beta+\alpha n^2)+\alpha x$$

$$a_{44}=-[\alpha(1+9/_{20}\alpha n^4)+\gamma]+\alpha(1+9/_{20}\alpha n^2)x,\quad a_{12}=(1+\beta)n,\quad a_{13}=\beta$$

$$a_{14}=1/_2\alpha n(n^2-x),\quad a_{23}=-\beta,\quad a_{24}=-1/_2\alpha n^2,\quad a_{34}=\alpha n$$

$$\alpha=1/_{12}(h/R)^2,\quad \beta=G_2/E_2,\quad \gamma=E_3/E_2,\quad x=p\rho R^2/E_2,\quad f=x^{1/2}$$

Полиномиальное уравнение четвертой степени относительно x^2 (4.4) во всем диапазоне изменения параметров α, β, γ имеет действительные положительные корни, значения которых $f_1=f_w, f_2=f_v, f_3=f_\psi, f_4=f_\chi$ представлены в таблице. Численные расчеты выполнялись для гипотетического материала с механическими характеристиками E_2 = 6,86 · 10^4 МПа, G_2 = 19,61 МПа, G_2 = 343,1 МПа, E_3 = 98,04 МПа (трехслойный композит с несущими слоями из алюминиевого сплава АМГ и заполнителем из пенопласта ПХВ-1 [22]). Первая строка таблицы (вар. № 1) отвечает классическому решению для поперечных колебаний нерастяжимого кольца [24]. Две следующие строки (вар. № 2) представляют аналогичное решение с учетом окружных деформаций. В обоих вариантах корни уравнения (4.4) для первых шести частот практически совпадают. Следующий вар. № 3 учитывает влияние поперечных сдвигов при $G_2=E_2/2{,}6$. По мере усложнения расчетных схем и учета новых жесткостей значения корней f_w, f_v незначительно снижаются, что соответствует механическим представлениям. Переход к последующим вариантам, связанным с учетом сдвигов и обжатия, приводит к дальнейшему уменьшению частот f_w, f_v и появлению больших корней f_ψ и f_χ, учитывающих деформации сдвига и обжатия. Численные результаты, приведенные в таблице, подтверждают тезис о существенном влиянии трансверсальных деформаций на динамические свойства тонкостенных систем при действии ударных нагрузок, время протекания которых соизмеримо с периодом собственных колебаний.

В качестве второй модельной задачи рассмотрим потерю устойчивости кругового кольца при действии гидростатического давления.

Из общих уравнений (3.4), записанных для кольца в геометрически нелинейной постановке, имеем

$$\frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{N_2}{R}-\frac{1}{R}(T_2\theta_2+M_2\eta_2)-q_n\theta_2=0$$

$$\frac{T_2}{R}-\frac{dN_2}{dy}+\frac{d}{\partial y}(T_2\theta_2+M_2\eta_2)+q_n=0,\quad N_2-\frac{dM_2}{dy}=0$$

$$\frac{M_2}{R}+Z-\frac{1}{2}\frac{d^3L_2}{dy^2}+\frac{d}{dy}(M_2\theta_2+L_2\eta_2)=0 \qquad (4.5)$$

N		f_k	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	q_1°	n_1	q_2°	n_2
1	$G \to \infty$	f_1	0,0258	0,0730	0,1403	0,2265	0,3322	3	2	–	–
2	$G \to \infty$	f_1	0,0258	0,0730	0,1400	0,2264	0,3321	3	2	–	–
		f_2	2,2363	3,1628	4,1238	5,0999	6,0838				
	$E/G = 2,6$	f_1	0,0258	0,0729	0,1397	0,2255	0,3302				
3	$\beta = 0,384$	f_2	2,2360	3,1622	4,1231	5,0989	6,0827	2,9971	2	–	–
	$E_3/E \to \infty$	f_3	64,442	64,495	64,571	64,666	64,784				
	$E/G = 200$	f_1	0,0242	0,0658	0,1199	0,1831	0,2523				
	$\beta = 0,005$	f_2	2,2360	3,1621	4,1238	5,0991	6,0828				
4	$E_3/E = 700$	f_3	7,6231	7,9517	8,3885	8,9156	9,5186	2,6341	2	365,87	30
	$\gamma = 1,43 \cdot 10^{-3}$	f_4	4,0377	4,0262	4,0101	3,9946	3,9786				
	$E/G = 3500$	f_1	0,0168	0,0366	0,0560	0,0747	0,0930				
	$\beta = 2,58 \cdot 10^{-4}$	f_2	2,2359	3,1617	4,1232	5,0991	6,0828				
5	$E_3/E = 700$	f_3	2,5825	3,2474	3,6732	3,8099	3,8515	1,2705	2	365,15	30
	$\gamma = 1,43 \cdot 10^{-3}$	f_4	4,1019	4,2358	4,6852	5,4696	6,3688				
	$E/G = 3500$	f_1	0,0170	0,0369	0,0562	0,0750	0,0932				
	$\beta = 2,85 \cdot 10^{-4}$	f_2	2,2360	3,1622	4,1230	5,0989	6,0822				
6	$E_3/E = 1$	f_3	2,6606	3,4749	4,3684	5,2988	6,2515	1,3063	2	9659,2	155
	$\gamma = 1$	f_4	103,89	103,88	103,81	103,74	103,66				

Опуская нижние индексы и линеаризуя уравнения (4.5) относительно состояния с индексом градус, непосредственно предшествующего потере устойчивости, придем к уравнениям нейтрального равновесия

$$\frac{dT'}{dy}+\frac{N'}{R}=0,\quad \frac{T'}{R}-\frac{dN'}{dy}+T^\circ\frac{d\theta'}{dy}=0$$

$$N'-\frac{dM'}{dy}=0,\quad \frac{M'}{R}-\frac{1}{2}\frac{d^2L'}{dy^2}+Z'+L^\circ\frac{d\eta'}{dy}=0 \tag{4.6}$$

$$T^\circ=-qR,\quad M^\circ=0,\quad L^\circ=-qRJ/F$$

Штрихами отмечены бифуркационные значения переменных.

В отличие от принятого метода сведения уравнений устойчивости кольца к уравнениям в перемещениях, будем оперировать далее непосредственно с уравнениями в усилиях (4.6), исключив из них предварительно переменные θ' и η'. С этой целью воспользуемся соотношениями упругости (2.4), в которых для кольца следует положить $E_2=E$, $G_2=G$, $C_2=C=Ebh^5/80$, $B_2=B=Ebh=EF$, $D_2=D=Ebh^3/12=EJ$:

$$T'=EF\varepsilon'-\frac{1}{2}EJ\frac{d^2\chi'}{dy^2},\quad N'=GF(\psi'-\theta')$$

$$M'=EJ\left(\frac{d\psi'}{dy}+\frac{\chi'}{R}\right),\quad L'=EJ\varepsilon'-\frac{1}{2}EC\frac{d^2\chi'}{dy^2},\quad Z'=E_3F\chi' \tag{4.7}$$

Из соотношений (4.7) найдем $d\theta'/dy=M'/EJ-Z'/E_3FR-1/GFdN'/dy$, $d\eta/dy=$ $=-1/E_3Fd^2Z'/dy^2$. Исключая производные $d\theta'/dy$, $d\eta'/dy$ из уравнений (4.6), имеем

$$\frac{dT'}{dy}+\frac{N'}{R}=0,\quad \frac{T'}{R}-\frac{dN'}{dy}-qR\left(\frac{M'}{EJ}-\frac{Z'}{E_3FR}-\frac{1}{GF}\frac{dN'}{dy}\right)$$

$$N'-\frac{dM'}{dy}=0,\quad \frac{M'}{R}-\frac{1}{2}\frac{d^2L'}{dy^2}+Z'+\frac{qRJ}{E_3F^2}\frac{d^2Z'}{dy^2}=0 \tag{4.8}$$

Дополним уравнения (4.8) соотношением неразрывности деформаций в усилиях, которое получим путем исключения переменных ε' и χ' из зависимостей (4.7):

$$\frac{T'}{EF}-\frac{L'}{EJ}+\frac{1}{2E_3F}\left(\frac{J}{F}-\frac{A}{J}\right)\frac{d^2Z'}{dy^2}=0 \tag{4.9}$$

Пять уравнений (4.8) и (4.9) образуют полную систему относительно усилий и моментов T', N', Z', M', L'. Последовательным исключением из этих уравнений функций T', N', M', придем к двум уравнениям

$$M_{11}L'+M_{12}Z'=0,\quad M_{21}L'+M_{22}Z'=0 \tag{4.10}$$

$$M_{11}=-\frac{FR}{J}\left[\left(\frac{1}{R^2}+\frac{qR}{EJ}\right)\frac{d}{dy}+\left(1-\frac{qR}{GF}\right)\frac{d^3}{dy^3}\right.$$

$$M_{12}=\frac{EF}{2E_3}\left[\left(1-\frac{qR}{GF}\right)\left(\frac{J}{F}-\frac{A}{J}\right)\frac{d^5}{dy^5}+\left(\frac{1}{R^2}+\frac{qR}{EJ}\right)\left(\frac{J}{F}-\frac{A}{J}\right)\frac{d^3}{dy^3}-\frac{2q}{EFR}\frac{d}{dy}\right.$$

$$M_{21}=-\left(\frac{F}{J}\frac{d}{dy}+\frac{1}{2}\frac{d^3}{dy^3}\right),\quad M_{22}=\frac{d}{dy}+\frac{1}{E_3}\left[\frac{E}{2}\left(\frac{J}{F}-\frac{A}{J}\right)+\frac{qRJ}{F^2}\right]\frac{d^3}{dy^3}$$

Здесь q – погонная критическая нагрузка на кольцо; $F = bh$, $J = bh^3/12$, $A = bh^5/80$. Вводя в рассмотрение для системы (4.10) функцию усилий Φ такую, что $L' = M_{22}\Phi$, $Z' = -M_{21}\Phi$ придем к дифференциальному уравнению восьмого порядка $(M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\,\Phi = 0$, которое, в свою очередь, допускает понижение порядка на две единицы.

$$C_6\Phi^{VI} + C_4\Phi^{IV} + C_2\Phi'' + C_0\Phi = 0$$

$$C_0 = -\left(\frac{Fc}{J} + \frac{q}{E_3JR}\right), \quad C_2 = \frac{EFcf}{2E_3J} - \frac{Fc}{E_3J}\left(\frac{EF}{2} + \frac{qRJ}{F^2}\right) - \frac{Fg}{J} - \frac{q}{2E_3FR}$$

$$C_4 = \frac{1}{E_3}\left(\frac{1}{4}Efc - \frac{qRg}{F}\right), \quad C_6 = \frac{Efg}{4E_3}$$

$$c = \frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EJ}, \quad g = 1 - \frac{qR}{GF}, \quad f = \frac{J}{F} - \frac{A}{J} \tag{4.11}$$

Разыскивая решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.11) в форме $\Phi = \Phi_0 \sin ny/R$, придем к квадратному уравнению для нахождения критической нагрузки

$$(q^\circ)^2[\alpha n^2(\alpha\beta^{-1}n^2 - 1)] - q^\circ[1/5\,\alpha n^2(\alpha\beta^{-1}n^4 + 6n^2 - 15/2) +$$
$$+\gamma(\beta^{-1}n^2 + \alpha^{-1}) + 1] + (1/5\,\alpha n^4 + \alpha^{-1}\gamma)(n^2 - 1) = 0 \tag{4.12}$$

где $q^\circ = qR^3/(EJ)$, коэффициенты α, β, γ представлены формулами (4.4).

Численный анализ уравнения (4.12) показывает, что его корни $q_1^\circ(n)$ и $q_2^\circ(n)$ достигают минимальных значений соответственно при $n_1 = 2$ и $n_2 \gg 1$. В таблице приведены безразмерные критические нагрузки q_1, q_2 и соответствующие им числа полуволн n_1 и n_2 при потере устойчивости кольца. Нагрузка q_1° отвечает изгибной форме выпучивания, q_2° – критическому обжатию стенки, имеющему волнообразный характер. При реальных механических свойствах материала потеря устойчивости кольца происходит при нагрузках $q_1^\circ \ll q_2^\circ$ и $n = 2$. Для этого практически важного случая некоторые члены в уравнении (4.12), пропорциональные $(h/R)^4$, становятся малыми и могут быть отброшены. В результате для критического гидростатического давления, отвечающего изгибной форме потери устойчивости получим

$$q_1 = \frac{3EJ}{R^3}\left[1 + \frac{J}{FR^2}\left(4\frac{E}{G} + \frac{E}{E_3}\right)\right]^{-1}$$

Вторая форма выпучивания, сопровождаемая волнообразным обжатием в окружном направлении, реализуется, по-видимому, при ударном нагружении кольца, подобно динамическому выпучиванию сжатого стержня [23].

В результате аналитического решения тестовых задач для модели цилиндрической оболочки с учетом поперечного сдвига и обжатия мы не обнаружили в обоих случаях логических противоречий и нарушений механического смысла. Найденные в п. 4 решения верны для предельных значений механических свойств материала $G \to 0, \infty$, $E_3 \to 0, \infty$ и сохраняют преемственность полученных результатов с известными исследованиями [24, 25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976. 416 с.
2. *Christensen R.M.* Mechanics of composite materials. New York: Wiley, 1979. 334 p.
3. *Айнола Л.Я.* Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 154–158.
4. *Рапопорт И.М.* Колебания упругой оболочки частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.
5. *Герштейн М.С.* Геометрически нелинейные уравнения движения упругой многослойной оболочки // Механика полимеров. 1973. № 5. С. 891–897.
6. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
7. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
8. *Vasil'ev V.V.* Theory of composite shells // Mechanics of Composites. Moskow: Mir publ., 1982. P. 223–251.
9. *Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. и др.* Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. Киев: Вища шк., 1987. 200 с.
10. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд. Казан. ун-та, 1975. 327 с.
11. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З. Галимова. Казань: Изд. Казан. ун-та, 1977. 212 с.
12. *Галиньш А.К.* Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд. Казан. ун-та, 1967. Вып. 5. С. 66–92.
13. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 5–17.
14. *Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформир. тверд. тела. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 15. С. 3–68.
15. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
16. *Шаповалов Л.А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. ж. МТТ. 1968. № 1. С. 56–62.
17. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
18. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
19. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
20. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М. – Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
21. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 1. Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
22. *Александров А.Я., Бородин М.Я., Павлов В.В. и др.* Конструкции с заполнителем из пенопластов. М.: Машиностроение, 1972. 211 с.
23. *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 779–782.
24. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
25. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IX.1996