МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. В.В. ВАСИЛЬЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОБОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Публикуемая работа написана в связи со статьей А.Л. Гольденвейзера [1], опубликованной выше. В этой статье можно выделить две части. Первая содержит асимптотическое обоснование классической теории пластин, а во второй подвергается сомнению критика этой теории, высказанная участниками недавно завершившейся дискуссии по теории пластин [2–6]. Именно эта вторая часть и послужила поводом для настоящей работы, однако, естественно, что в ней затрагивается и первая часть, на результатах которой основана вторая.

В связи с тем, что в [1] формулировка предмета дискуссии не вполне согласуется с работами [2–6], приведем ее еще раз.

Имеется изотропная тонкая пластина, отнесенная к декартовой системе координат x, y, z так, что оси x и y лежат в срединной плоскости пластины, а ось z нормальна к этой плоскости.

Обсуждаются и сопоставляются две теории пластин, обе основанные на линейном распределении перемещений u_x и u_y по толщине пластины и независимости u_z от нормальной координаты, т.е.

$$u_x = z\theta_x(x,y), \quad u_y = z\theta_y(x,y), \quad u_z = w(x,y) \tag{1}$$

Здесь θ_x и θ_y – углы поворота элемента пластины, имеющего размеры dx, dy и h, где h – толщина пластины, а w – смещение этого элемента вдоль оси z (нормальный прогиб). Первая теория, которую будем называть как и в [1] теорией Кирхгофа, или сокращенно теорией K, основана на дополнительном предположении, постулирующем связь между θ_x, θ_y и w, т.е.

$$\theta_x = -\partial w/\partial x, \quad \theta_y = -\partial w/\partial y \tag{2}$$

В результате теория сводится к бигармоническому уравнению для прогиба

$$D\Delta\Delta w = p, \quad D = Eh^3/[12(1-\nu^2)] \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа, а p – давление, изгибающее пластину.

При построении второй теории соотношения (2) не используются, углы θ_x, θ_y и прогиб w рассматриваются как независимые кинематические переменные и выражаются через две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, т.е.

$$\theta_x = -\partial\varphi/\partial x + \partial\psi/\partial y, \quad \theta_y = -\partial\varphi/\partial y - \partial\psi/\partial x \tag{4}$$

$$w = \varphi - (D/C)\Delta\varphi, \quad C = Eh/[2(1+\nu)] \tag{5}$$

Структура равенств (4) следует из кинематически плоского движения, в которой φ

является потенциалом, а ψ – функцией тока. В результате теория сводится к следующим двум уравнениям для функций φ и ψ:

$$D\Delta\Delta\varphi = p \qquad (6)$$

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0, \quad k^2 = 2C/[D(1-\nu)] = 12/h^2 \qquad (7)$$

Сделаем здесь два замечания. Во-первых, очевидно, что обсуждаемая теория является более общей, чем теория *K*, так как она не ограничивается соотношениями (2). Более того, теория *K* следует из нее, если перейти к пределу при $C \to \infty$, т.е. является ее частным случаем. Приходится обращать на это внимание, так как в [1] утверждается, что это неверно. Во-вторых, принципиальное отличие этой теории от теории *K* связано с наличием уравнения (7). Оно повышает порядок системы (6), (7) с четвертого, которым характеризуется уравнение (3), до шестого. В [1] теория, сводящаяся к уравнениям (6) и (7), названа теорией Тимошенко – Рейсснера (теория *T–R*). К сожалению, в [1], как и во многих других публикациях, эта теория ассоциируется с учетом деформации сдвига. Для такой ассоциации есть определенные основания, так как параметр *C*, который в теории *K* является бесконечно большим, а в теории *T–R* конечным, представляет собой жесткость пластины при сдвиге в плоскостях *xz* и *yz*. Отсюда следует кажущаяся связь с работой С.П. Тимошенко [7], в которой учтено влияние деформации сдвига на прогиб балки. Однако по существу такой связи нет, поскольку учет деформации сдвига в балке не вызывает повышения порядка уравнения, к которому сводится теория балок. Для балок не существует уравнения типа (7) и исчезает принципиальное различие между теорией *K* и теорией *T–R*. Применительно к теории пластин последнюю теорию правильнее называть теорией Рейсснера (теорией *R*), который впервые получил систему уравнений шестого порядка, аналогичную системе (6), (7) [8]. К сожалению, в литературе до настоящего времени превалирует ошибочная трактовка этой теории, как одной из многих, предложенных к настоящему времени теорий, уточняющих классическую теорию пластин путем учета деформации сдвига. Эта трактовка разделяется и А.Л. Гольденвейзером [1], критикующим теорию *R* за то, что учитывая сдвиг, она игнорирует другие факторы, которые могут иметь такую же значимость, что и деформация сдвига.

В связи с этим, необходимо еще раз сформулировать один из основных результатов опубликованной в МТТ дискуссии по теории пластин. Вне зависимости от того, как истолковывается теория *R* в литературе (в том числе и в работах Рейсснера), существо проблемы совсем не в том, что теория *R* учитывает сдвиг, а теория *K* его не учитывает. Обе теории многого не учитывают и вопрос о том, какая из них точнее вообще не стоит. Существо проблемы заключается в том, что в теории *R* полностью реализуется кинематическая модель, определяемая соотношениями (1), а при построении теории *K* в эту модель вводятся ограничения (2), которые строго справедливы только для случая чистого изгиба пластины, а в общем случае не отражают особенности ее поведения.

Действительно, рассмотрим элемент пластины с размерами dx, dy и h. В задаче изгиба пластины для него как для твердого тела должны выполняться три условия равновесия, которым соответствуют три степени свободы элемента – повороты на углы θ_x и θ_y и смещение на величину w. Для того, чтобы уравнения равновесия следовали из принципа возможных перемещений, необходимо, чтобы обобщенные возможные перемещения θ_x, θ_y и w были взаимно независимыми. Однако условия (2) нарушают эту независимость и вызывают целый ряд отрицательных последствий, которые обсуждались в процессе дискуссии по теории пластин. В частности, вариационные уравнения, следующие из принципа Лагранжа, не являются уравнениями равновесия и не обеспечивают равновесия пластины как твердого тела; порядок уравнения (3) не соответствует числу физических граничных условий; естественные граничные условия находятся в соответствии с порядком уравнения, однако одно из них не имеет физического смысла; существуют задачи, которые теория K не позволяет решить (например, задача кручения пластины моментами, распределенными по двум противоположным сторонам); известны задачи, решение которых не согласуется со здравым смыслом (изгиб пластины параболическим штампом), или с решением трехмерной задачи (изгиб свободно опертой пластины).

Все это свидетельствует о физической некорректности теории K, порождаемой наличием соотношений (2). Важно отметить, что эта некорректность не проявляется в теории балок – решения, следующие из теории Бернулли – Эйлера, не учитывающей сдвиг, и теории Тимошенко, учитывающей сдвиг, отличаются только количественно. Причина различной реакции пластины и балки на кинематические условия (2) заключается в том, что пластина является более сложным элементом, чем система изгибаемых балок – в ней присутствует кручение, которого нет в балке и которое подавляется условиями (2). Понятно также и почему кинематические ограничения (2) ассоциируются с неучетом деформации сдвига – без такой деформации кручение невозможно.

Остановимся теперь на асимптотическом методе, используемом в [1] для математического обоснования теории K. В принципе, необходимости в таком обосновании нет, потому что математическая строгость теории и вариационного метода вывода ее уравнений, осуществленного Кирхгофом, сомнений ни у кого не вызывает. Здесь этот вопрос рассматривается лишь потому, что в [1] высказывается сомнение в правомерности системы (6), (7) на том основании, что она не получается асимптотическим методом. Со столь явным завышением значимости асимптотического метода, являющегося неоднозначным и приближенным, трудно согласиться. Как известно [9, 10], существует множество форм асимптотических разложений, которые для одной и той же задачи могут давать разные, в том числе и неверные, асимптотические решения. Строго говоря, асимптотические представления показывают только скорость, с которой изменяются искомые функции, если малый параметр стремится к нулю. Если же параметр мал, но конечен, эти представления являются приближенными и никаких строгих математических выводов сделать не позволяют.

Существо обсуждаемого далее разногласия заключается в следующем. А.Л. Гольденвейзер разделяет напряженное состояние пластины на две составляющие – внутреннюю (проникающую), которая распространяется на всю область, занимаемую пластиной, и краевую, которая локализуется у края пластины и быстро затухает при удалении от него. Далее строится асимптотическая аппроксимация внутреннего напряженного состояния, которое в первом приближении описывается системой уравнений, сводящейся к уравнению (3) теории K. Асимптотическая аппроксимация краевого состояния строится независимо от внутреннего состояния и сводится к двум уравнениям антиплоской и плоской задачи теории упругости. Важно отметить, и это неоднократно подчеркивается в [1], что это краевое состояние соответствует нелинейному распределению перемещений по толщине пластины. В результате такой декомпозиции напряженного состояния пластины для уравнения (7) не остается места потому что, с одной стороны, оно определяет состояние, быстро затухающее при удалении от края, а с другой соответствует линейному распределению перемещений u_x и u_y по толщине пластины (1).

Рассмотрим сначала физическую сторону вопроса. Вызывает возражения прежде всего основная идея разделения напряженного состояния на внутреннее и краевое, которая объявляется общепризнанной и служащей основанием значительной части результатов, составляющих содержание сопротивления материалов. Однако, это не так. Разделение, которое действительно часто используется в сопротивлении материалов и в строительной механике, базируется на другом принципе, согласно которому напряженное состояние разделяется на основное, сводящееся к интегральным по толщине силам и моментам, и самоуравновешенное по толщине пластины. Самоуравновешенное состояние является краевым и, как правило, игнорируется в прикладных теориях. По своим свойствам оно соответствует краевому состоянию, рассматриваемому в [1], однако к уравнению (7) отношения не имеет и далее не обсуждается. Что касается основного состояния, то оно может быть как проникающим, так и краевым. Например, в задаче о продольном изгибе балки на упругом основании имеет место как проникающее, так и краевое основное напряженное состояние и оба они определяются на основе одной и той же расчетной модели. Следует отметить, что сам факт даже быстрого затухания несамоуравновешенного краевого состояния не является основанием для того, чтобы его выделять, поскольку на краю соответствующая составляющая решения связана с проникающей составляющей граничными условиями и влияет на нее через постоянные интегрирования. Более того, даже асимптотическая малость одной из составляющих напряженного состояния, т.е. наличие у нее малого коэффициента типа относительной толщины пластины, совершенно не означает, что этой составляющей можно пренебречь в практических расчетах, так как, во-первых, понятие малости является относительным, а во-вторых, вполне вероятны случаи вырождения асимптотически главной части решения. Сомнения в достоверности асимптотически малого решения, высказываемые в [1], справедливы лишь применительно к асимптотическому подходу. С физической точки зрения любое решение, базирующееся на гипотезах (1) достоверно, если достоверны сами эти гипотезы. В задаче о кручении пластины [2], которая не имеет решения в рамках теории K потому, что решение уравнений (3) и (6) вырождается, результат следует из уравнения (7) и хорошо согласуется с точным решением задачи Сен-Венана. Одного этого примера достаточно, чтобы исключить любые асимптотические обоснования необходимости игнорировать это уравнение в прикладной теории.

Обратимся теперь к математической стороне обсуждаемого вопроса. Поскольку математическая строгость вывода системы (6), (7), полученной в многочисленных работах по теории пластин сомнений не вызывает (совершенно непонятно, на каком основании эта теория названа в [1] математически непоследовательной), возникает естественный вопрос – почему она не следует из асимптотического анализа? Можно предположить, что это связано с особенностями излагаемого в [1] асимптотического подхода, который отличается от традиционного. Дело в том, что А.Л. Гольденвейзер, по существу не строит бесконечных асимптотических разложений, а оценивает члены с определёнными асимптотическими порядками, которые задаются условиями (1.1) – (1.3) и (1.5) работы [1]. При этом в начальном приближении получается теория K, но ее математическим обоснованием это приближение трудно назвать, поскольку исходные асимптотические порядки напряжений и перемещений такого обоснования не имеют. Более того, неестественная форма выражений для перемещений (1.2) наводит на мысль, что она специально задана в соответствии с соотношениями (2), на которых основана теория K. Асимптотический анализ ограничивается начальным приближением. Естественный вопрос о том, что будет, если построить следующее приближение решения системы (1.4) в [1] вообще не поднимается. Такая попытка (т.е. асимптотическое построение теории R) была предпринята ранее в [11], однако полученный результат – уравнение шестого порядка для прогиба оказался неверным. Как показано в [5], такое уравнение не может существовать в рамках обсуждаемой теории. Таким образом, причину несоответствия между теорией пластин, построенной на основе физических гипотез, и результатами асимптотического анализа следует искать не в теории пластин, а в используемом А.Л. Гольденвейзером варианте асимптотического метода.

Остановимся теперь на конкретных замечаниях и предложениях, содержащихся в п. 4 работы [1].

Предлагается ограничить область применимости теории K четырьмя условиями. Три из них достаточно хорошо известны, поэтому остановимся на последнем условии, согласно которому расчет по теории K не должен приводить к асимптотически малому напряженному состоянию. В связи с этим в [1] отмечается, что критика теории K в работах [2] – [6] не учитывает наличие этого ограничения теории. Создается впечатление, что причина и следствие здесь поменялись местами, поскольку обсуждаемое условие является следствием критики теории K, содержащейся в [3]. Отметим также, что ценность этого ограничения для практики невелика потому, что до решения задачи (а иногда даже и после ее решения) оценить асимптотический порядок невозможно. Особую опасность в связи с этим представляют, как отмечалось в процессе дискуссии, автоматизированные вычислительные комплексы, дающие численные результаты, проверка которых в отношении обсуждаемого условия в принципе исключена.

Задачу о штампе, рассмотренную в [2] и объявленную в [1] недоразумением, комментировать достаточно сложно, поскольку А.Л. Гольденвейзер обсуждает вместо нее задачу о чистом изгибе пластины и объявляет неправильным предположение о существовании штампа. В связи с этим приходится уточнить, что существование штампа – это не предположение, а условие этой задачи. Если нет штампа, то нет и задачи и обсуждать нечего.

Заключительная часть [1] посвящена попыткам убедить читателя в преимуществах теории K или хотя бы в том, что преимущества теории R неочевидны. При этом под влиянием опубликованных в процессе дискуссии результатов в теорию K вносятся все новые и новые коррективы. Сужается область ее применения, отвергается преобразование Кельвина – Тэта (см. [3, 6]), отрицается физический смысл обобщенной силы Кирхгофа (см. [2]) и при этом совершенно не упоминается о том, что все эти коррективы находятся в явном противоречии со всей учебной и справочной литературой, где излагается теория K.

В заключение представляется целесообразным сформулировать следующее вполне определенное предложение (тем более, что А.Л. Гольденвейзер справедливо упрекает авторов критических статей в том, что они не доводят свою мысль до логического конца). Теория пластин Кирхгофа является несостоятельной как физическая теория потому, что существуют задачи по расчету пластин, для которых она не дает решения, или дает неверное решение. Как известно, при наличии контрпримеров никакие соображения общего характера, в том числе и приближенные асимптотические оценки, помочь не могут. Поэтому теория Кирхгофа, которая до настоящего времени считается классической теорией пластин, утрачивает это качество и оказывается частным случаем современной классической теории пластин, описываемой уравнениями (6) и (7). В этом новом качестве значимость теории Кирхгофа и ценность полученных на ее основе решений многочисленных задач никем не отрицается, однако претендовать на роль основной теории, нуждающейся только в уточнениях, она более не может. Что касается названия новой формы классической теории пластин, то учитывая, что основной вклад в ее развитие был внесен Кирхгофом и Рейсснером (заметим, что при построении своей теории в [8] Рейсснер использовал распределение напряжений по толщине пластины, следующее из теории Кирхгофа), предлагается называть ее теория Кирхгофа –Рейсснера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
2. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
3. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
4. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
5. *Васильев В.В.* К дискуссии по классической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 140–150.
6. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразовании Кельвина – Тэта // Изв.

АН. МТТ. 1995. № 4. С. 133–139.
7. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differetial equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. 1921. Ser. 6. V. 41. P. 744–746.
8. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1995. 447 с.
10. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
11. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.1996