МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. А.Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

В основу рассуждений положено общеизвестное обстоятельство, выражаемое структурной формулой: $(НДС)_t = (НДС)_i + (НДС)_b$. Она описывает свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкого упругого тела, испытывающего статические воздействия. В этом равенстве нижними индексами отмечены общее (t), внутреннее (i) и краевое (b) НДС. Принимается, что последнее возникает вблизи так называемых линий искажения и быстро затухает при удалении от них.

Будут обсуждаться также раздельные приближенные методы построения $(НДС)_i$ и $(НДС)_b$, в каждом из которых максимально используется специфика рассматриваемого НДС. Такое расчленение представляется рациональным как с физической, так и с математической точек зрения. Оно широко применяется в теории асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. На нем базируется и значительная часть результатов, составляющих содержание сопротивления материалов. Назовем поэтому описываемый ниже подход сопроматовской схемой. В сущности речь будет идти о переносе приемов сопромата с теории квазиодномерных тел (балок, стержней, арок) на теорию квазидвумерных тел (пластин, оболочек). При этом используются асимптотические методы, специфика которых в данном случае заключается в том, что малой считается толщина области, в которой нужно построить искомое решение уравнений теории упругости.

В статье большое внимание уделяется сопоставлению получаемых описанным образом результатов с результатами, достигнутыми ценой введения некоторых гипотез. Показано, что теорию Кирхгофа – Лява можно рассматривать как математически обоснованный приближенный метод построения $(НДС)_i$ и, в частности, что введение приведенного поперечного усилия для формулировки граничного условия на свободном крае (и только для этой цели) естественным образом следует из специфических свойств $(НДС)_b$.

Построение $(НДС)_b$ для весьма широкого класса задач в сопроматовской схеме составляет второй этап полного (включающего и обследование зон возмущения) расчета квазидвумерных тел. Он приближенно сводится к построению затухающих решений хорошо изученных антиплоской или плоской задач теории упругости, но при этом возникает непривычное обстоятельство: в задачах построения $(НДС)_i$ и $(НДС)_b$ используются разные пары независимых переменных. А именно $(НДС)_i$ описываются в переменных (α_1, α_2), задающих положение точки на срединной поверхности, а для $(НДС)_b$ независимыми переменными являются (α_1, α_3), из которых последнее задает расстояние по толщине. Этим правильно отражается физика обсуждаемой проблемы. В исходном приближении НДС квазидвумерного тела в достаточном удалении от линий искажения изменяется по толщине по весьма простому закону. Отсюда следует, что при построении $(НДС)_i$ естественным выглядит стремление исключить переменное α_3. Однако в теории $(НДС)_b$ попытка избавиться от α_3 представляется малоперспективной. Поэтому нельзя рассчитывать, что так называемые теории высшего порядка являются удовлетворительным методом исследования $(НДС)_b$ в квазидвумерных телах.

В [1] это показано в общем виде для теории Тимошенко – Рейсснера. Выявляются и другие несоответствия, свойственные этому элегантному подходу. Дефекты теорий высшего порядка на базе анализа частных задач показаны в [2].

В предполагаемой работе объектами рассуждений служат пластины и оболочки, поэтому исходными соотношениями должны были бы служить уравнения трехмерной теории упругости, записанные в достаточно произвольной системе координат. Они весьма громоздки и, чтобы не отвлекать внимание читателя техническими деталями, фактические выкладки выполняются для уравнений в декартовых координатах. Кроме того, не учитываются детали, относящиеся к изменяемости внутреннего НДС по α_1, α_2. Обобщения формулируются на основании результатов, опубликованных, например, в [3].

1. Рассмотрим линейные уравнения изотропной пластины, отнесенной к декартовым координатам $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и выполним в них следующие замены:

для напряжений σ_{ij}^*, σ_{i3}^*, σ_{33}^* по формулам

$$\sigma_{ij}^* = E\sigma_{ij}, \quad \sigma_{i3}^* = E\eta\sigma_{i3}, \quad \sigma_{33}^* = E\eta^2\sigma_{33} \tag{1.1}$$

для перемещений v_i^*, v_3^* по формулам

$$v_i^* = lv_i, \quad v_3^* = l\eta^{-1}v_3 \tag{1.2}$$

для координатных параметров α_i, α_3 по формулам

$$\alpha_i = l\xi_i, \quad \alpha_3 = h\zeta \tag{1.3}$$

Здесь σ_{ij}, σ_{3i}, σ_{33} – безразмерные напряжения; v_i, v_3 – безразмерные перемещения; ξ_1, ξ_2, ζ – безразмерные координатные параметры; E – модуль упругости; h – полутолщина пластины; l – характерный (не малый) размер пластины; $\eta = h/l$ $(i, j = 1, 2)$.

После описанных замен уравнения теории упругости примут вид (ν – коэффициент Пуассона)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial\xi_2} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\xi_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta} = 0 \\
\frac{\partial v_i}{\partial\xi_i} = \sigma_{ii} - \nu\left(\sigma_{jj} + \eta^2\sigma_{33}\right) \quad (i \neq j = 1,2) \\
\frac{\partial v_3}{\partial\zeta} = \eta^4\sigma_{33} - \nu\eta^2\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \\
\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial\xi_1} = 2(1+\nu)\sigma_{12}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial\zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial\xi_i} = 2(1+\nu)\eta^2\sigma_{i3}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Условимся строить для этих уравнений лишь такие интегралы, в которых все безразмерные искомые величины F имеют вид

$$F = O\left(\eta^{\varkappa}\right) \tag{1.5}$$

при одинаковых $\varkappa$ для всех F.

Кроме того, примем, что справедливо условное соотношение

$$\left(\partial/\partial\xi_1, \ \partial/\partial\xi_2, \ \partial/\partial\zeta\right) = O(1) \tag{1.6}$$

означающее, что дифференцирование искомых величин F по безразмерным декартовым координатам не сопровождается изменением асимптотики этих величин.

Соотношения (1.5) и (1.6) позволяют в любом отдельно взятом уравнении (1.4) найти относительную асимптотику каждого слагаемого: она определяется степенями малого параметра η, явно входящего в данное слагаемое в виде множителя.

Поэтому очевидным образом можно сформулировать итерационный процесс построения тех интегралов системы (1.4), асимптотические свойства которых заданы определяющими соотношениями (1.5), (1.6). Назовем этот итерационный процесс внутренним, имея в виду строить с его помощью внутреннее НДС.

Дифференциальные уравнения исходного приближения внутреннего итерационного процесса получаются из (1.4) при $\eta^2 = 0$ и имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial\zeta}=0 \quad \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\partial v_i / \partial\xi_i = \sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj}, \quad \partial v_3 / \partial\zeta = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2}+\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}=2(1+\nu)\sigma_{12}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial\zeta}+\frac{\partial v_3}{\partial\xi_i}=0 \quad (i\neq j=1,2)$$

К равенствам (1.7) присоединим граничные условия на лицевых поверхностях

$$\sigma_{3i}^*=0, \quad \sigma_{33}^*=\pm 1/2\, p(\alpha_1,\alpha_2) \quad (\zeta=\pm1, \ i=1,2) \tag{1.8}$$

Они выражают факт отсутствия закреплений на плоскостях $\alpha_3 = \pm h$, ограничивающих пластину, и задают ту внешнюю нагрузку, которая традиционно принимается в теории изгиба пластин (только для теории изгиба пластин будут часто проводиться конкретные выкладки, хотя большинство выводов относится и к оболочкам произвольного очертания).

Равенства (1.7) предусматривают операции дифференцирования искомых величин по ζ, но от этого нетрудно избавиться, выполнив четыре раза квадратуры по ζ. Получим, сохранив только те степени ζ, которые отражают специфику НДС изгибаемой пластины, следующие соотношения:

$$v_i=\zeta v_i^1, \quad v_3=v_3^0, \quad \sigma_{ij}=\zeta\sigma_{ij}^1 \tag{1.9}$$

$$\sigma_{i3}=\sigma_{i3}^0+\zeta^2\sigma_{i3}^2, \quad \sigma_{33}=\zeta\sigma_{33}^1+\zeta^3\sigma_{33}^3$$

В них величины с числовыми верхними индексами представляют собой новые искомые функции двух переменных ξ_1, ξ_2. Значение верхнего индекса в них показывает ту степень ζ, которая стоит множителем перед данной величиной. Все эти новые неизвестные функции в (1.9) кроме v_3^0 при помощи (1.7), (1.8) можно легко выразить через v_3^0. Соответствующие формулы имеют вид

$$v_i^1=-l\frac{\partial v_3^0}{\partial\alpha_i}, \quad \sigma_{ii}^1=\frac{l}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_i^1}{\partial\alpha_i}+\nu\frac{\partial v_j^1}{\partial\alpha_j}\right)$$

$$\sigma_{12}^1=\frac{l}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_1^1}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial v_2^1}{\partial\alpha_1}\right) \tag{1.10}$$

$$\sigma_{i3}^0=-\sigma_{i3}^2=\frac{l}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{i1}^1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}^1}{\partial\alpha_2}\right) \quad (i\neq j=1,2)$$

$$\sigma_{33}^1+\sigma_{33}^3=\frac{p(\alpha_1,\alpha_2)}{2E\eta^2}$$

$$\sigma_{33}^1=-3\sigma_{33}^3=-\frac{l^2}{2}\left[\frac{\partial^2\sigma_{11}^1}{\partial\alpha_1^2}+2\frac{\partial^2\sigma_{12}^1}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}^1}{\partial\alpha_2^2}\right]$$

Из них при учете (1.1)–(1.3), (1.9) для v_3^* получаем

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)^2 v_3^*=p, \quad D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$$

где D – цилиндрическая жесткость.

Это значит, что система дифференциальных уравнений (1.7) исходного приближения внутреннего итерационного процесса адекватна дифференциальным уравнениям классической двумерной теории изгиба пластин и что эту теорию можно рассматривать как приближенный метод построения внутреннего НДС в рамках сопроматовской схемы.

Сказанное остается верным и для любого квазидвумерного упругого тела. Оно не требует и предположения о нормальности внешней нагрузки (последнее для теории пластин подтверждают выкладки, описанные в [4, 5]).

Отметим, что преобразования, выраженные формулами (1.1)–(1.3), взятые вместе с предположениями (1.5), (1.6), не следует рассматривать как замаскированные гипотезы. Принятие такого рода соотношений представляет собой обычный прием асимптотической теории интегрирования дифференциальных уравнений. Соотношениями (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) лишь определяется класс тех решений, который будет строиться при помощи предлагаемого итерационного процесса. Среди так получаемых решений надо оставлять только те, которые обладают постулированными свойствами. Таким образом вопрос о правильности выбранных определяющих соотношений (1.5), (1.6) вообще не имеет смысла. Обсуждать надо целесообразность их выбора: должно быть показано, что из получаемых таким образом решений в конечном итоге можно составить итерационное решение интересующей нас трехмерной задачи теории упругости.

В такой постановке и будет здесь обсуждаться допустимость соотношений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), а следовательно, и достоинства (недостатки) классической двумерной теории изгиба пластин (оболочек) как метода приближенного расчета квазидвумерных упругих тел.

2. Обратимся к условиям на торцах, т.е. к условиям, которые надо выставлять на узких краях квазидвумерного упругого тела. Ради упрощения, конкретные рассуждения будем проводить для пластины и считать, что ее торец лежит в плоскости $\alpha_1 = 0$. Примем кроме того, что лицевые плоскости пластины $\alpha_3 = \pm h$ не закреплены. Будет считаться, что на торце $\alpha_1 = 0$ выставлены три граничных условия, сформулированные в терминах трехмерной теории упругости, которые пока не будем конкретизировать.

В общем случае трехмерные торцевые условия невозможно выполнить за счет произволов исходного приближения внутреннего итерационного процесса или, что то же, за счет произволов классической теории квазидвумерных тел. Это вытекает из того, что торцевые условия в принципе могут предусматривать любые законы изменения напряжений и перемещений по нормальной координате ζ, тогда как в классической теории квазидвумерных тел напряжения и перемещения всюду, включая торцы, изменяются по ζ предельно просто и независимо от нашего желания. Для преодоления этого препятствия используем сопроматовский подход и будем строить, кроме внутреннего, еще и краевой итерационный процесс, с тем, чтобы использовать связанные с ним дополнительные произволы (этот подход характерен также и для асимптотических методов). В отличие от *п.* 1, будем для этого искать лишь такие решения трехмерных уравнений теории упругости, которые имеют большую изменяемость по координатам α_1 и α_3 (для того, чтобы осуществлялось требуемое сопроматовской схемой затухание краевого НДС при удалении от торца $\alpha_1 = 0$, и для того, чтобы стало возможным выполнение условий на близко друг от друга расположенных лицевых плоскостях $\alpha_3 = \pm h$).

В соответствии с этим сделаем масштабное преобразование независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = h\xi_1, \quad \alpha_2 = l\xi_2, \quad \alpha_3 = h\zeta \tag{2.1}$$

и потребуем, чтобы для ξ_1, ξ_2, ζ вновь выполнялось определяющее соотношение (1.6).

Введем далее в уравнениях теории упругости замену искомых функций по формулам

$$\sigma_{mn}^{*} = ES_{mn}, \quad v_{m}^{*} = hV_{m} \quad (m,n = 1,2,3) \tag{2.2}$$

в которых через σ_{mn}^{*}, v_{m}^{*}, как и раньше, обозначены размерные напряжения и перемещения.

Приняв, что

$$\left(S_{mn}, V_m\right) = O\left(\eta^{\varkappa}\right) \tag{2.3}$$

при одинаковом $\varkappa$ для всех указанных слева безразмерных величин, и внеся (2.1)–(2.3) в трехмерные уравнения теории упругости, получим как и в п. 1 систему равенств, содержащих в явном виде малые множители η. Из них очевидным образом получается требуемый краевой итерационный процесс. В нем уравнения исходного приближения распадаются на две замкнутые подсистемы:

подсистема (α):

$$\frac{\partial S_{21}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} = 2(1+\nu)S_{21}$$
$$\frac{\partial V_2}{\partial \zeta} = 2(1+\nu)S_{23} \tag{2.4}$$

подсистема (β):

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{13}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial S_{31}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{33}}{\partial \zeta} = 0$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} = S_{11} - \nu\left(S_{22} + S_{33}\right), \quad \frac{\partial V_3}{\partial \zeta} = S_{33} - \nu\left(S_{11} + S_{22}\right) \tag{2.5}$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_3}{\partial \xi_1} = 2(1+\nu)S_{13}, \quad 0 = S_{22} - \nu\left(S_{11} + S_{33}\right)$$

Следовательно, существуют два типа краевых НДС, свойства которых согласуются с определяющими соотношениями (2.1)–(2.3) и (1.6).

Первый из них – антиплоский погранслой – в исходном приближении определяется уравнениями антиплоской задачи (2.4). Второй – плоский погранслой – в исходном приближении определяется уравнениями плоской задачи (2.5). Оба НДС можно уточнять, прибегнув к методу итераций. На деталях не останавливаемся, так как они не существенны для дальнейшего.

Подсистемы (2.4) и (2.5) линейны. При конкретном построении погранслоев их надо интегрировать, учитывая условия затухания и лицевые условия, выражающие отсутствие закреплений и внешних силовых воздействий на плоскостях $\zeta = \pm 1$ (внешняя нагрузка уже учтена при реализации внутреннего итерационного процесса). Поэтому каждое из так построенных краевых НДС, не изменяя его смысла, можно умножить на константу. Отсюда следует, что структурную формулу, приведенную во введении, можно детализировать, записав ее в виде

$$(\text{НДС})_t = (\text{НДС})_i + \eta^{-\alpha}(\text{НДС})_b^{(\alpha)} + \eta^{-\beta}(\text{НДС})_b^{(\beta)} \tag{2.6}$$

Здесь и далее верхние индексы (α), (β) приписываются величинам, относящимся к антиплоскому и плоскому погранслоям, соответственно, а степени α, β малого параметра η в формуле (2.6) пока остаются неопределенными. Это значит, что неопределенной пока является и асимптотика тех добавок к внутреннему НДС, которые могут появиться у края квазидвумерного тела за счет краевого НДС. В связи с этим отметим, что антиплоский и плоский погранслои обладают взаимно противоположными асимптотиками: те напряжения и перемещения, которые являются в одном погранслое главными, становятся второстепенными в другом.

В [1] показано, что относительные асимптотики "антиплоской" и "плоской" краевых поправок к внутреннему НДС зависят от характера закрепления торца. Рассмотрены торцы квазидвумерного тела, на которых выставлялись в терминах трехмерной теории упругости следующие условия: $v_1^* = v_2^* = v_3^* = 0$ (жестко заделанный край); $\sigma_{11}^* = v_2^* = v_3^* = 0$ (сильная шарнирная опора); $v_1^* = \sigma_{12}^* = \sigma_{13}^* = 0$ (слабая шарнирная опора); $\sigma_{11}^* = \sigma_{12}^* = \sigma_{13}^* = 0$ (свободный край).

Исследования [1] показали, что в первых двух случаях (относительно жесткие торцевые закрепления) в краевом НДС асимптотически преобладает плоский погранслой, в последних двух случаях (относительно слабые торцевые закрепления) в краевом НДС асимптотически преобладает антиплоский погранслой.

3. Рассмотрим вопросы реализации сопроматовской схемы расчета квазидвумерных тел, ограничиваясь в конкретных выкладках построением исходного приближения задачи о произвольной деформации (изгиб и растяжение – сжатие) тонкой пластины, и будем считать, что ее торец задается уравнением $\alpha_1 = 0$.

В этом случае для построения $(\text{НДС})_b$ надо решать уравнения (2.4), (2.5) в двумерной области

$$g = \{0 \leqslant \xi_1 \leqslant L \to \infty; \ -1 \leqslant \zeta \leqslant +1\} \tag{3.1}$$

с выполнением следующих условий:

a. Трех условий при $\zeta = \pm 1$:

$$S_{3k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

b. Трех условий при $\xi_1 = 0$, которые пока не будем конкретизировать;

c. Условий затухания при $\xi_1 = L \to \infty$.

Условия затухания надо накладывать на три перемещения и три напряжения. Поэтому задача построения $(\text{НДС})_b$ является переопределенной и одной из целей, которые надо иметь в виду при выставлении граничных условий в теории $(\text{НДС})_i$, должно считаться обеспечение существования затухающих решений $(\text{НДС})_b$.

В сущности так же выставляются граничные условия и в сопромате, т.е. в теории квазиодномерных упругих тел. Там все размеры торца малы и можно, опираясь на принцип Сен-Венана, заменять истинные граничные условия должным образом смягченными граничными соотношениями. В теории квазидвумерных упругих тел смягченные граничные условия надо выставлять на торце, у которого малым является только одно из его двух измерений. Это требует известной осмотрительности при использовании принципа Сен-Венана.

Пусть на торце пластины $\alpha_1 = 0$ выставлены (в терминах трехмерной теории упругости) три следующих условия:

$$\sigma_{1r}^*\Big|_{\alpha_1=0} = Es_{1r} \quad (r = 1, 2, 3) \tag{3.3}$$

где σ_{1r}^* – как и раньше, размерные напряжения, s_{1r} – заданные безразмерные функции точек торца.

В этом случае согласно [1] в структурной формуле (2.6) показатели интенсивности погранслоев имеют значения $\alpha = 0$, $\beta = -1$, т.е. надо считать, что

$$(\text{НДС})_b = (\text{НДС})_b^{(\alpha)} + \eta(\text{НДС})_b^{(\beta)}$$

Из этой формулы для размерных напряжений σ^*_{mn} краевого НДС, возникающего вблизи свободного торца, следуют асимптотические соотношения

$$\begin{aligned}&\left(\sigma^*_{11},\sigma^*_{22},\sigma^*_{33},\sigma^*_{13}\right)=E\eta\left(S^{\cdot}_{11},S^{\cdot}_{22},S^{\cdot}_{33},S^{\cdot}_{13}\right)\\&\left(\sigma^*_{12},\sigma^*_{23}\right)=E\left(S^{\cdot}_{12},S^{\cdot}_{23}\right)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Здесь безразмерные напряжения, отмеченные точкой, имеют вид $S^{\cdot}_{mn}=O\left(\eta^{\varkappa}\right)$ при $\varkappa$, одинаковом для любых m, n.

Подставим (3.4) в три уравнения равновесия, записанные в декартовых координатах α_1, α_2, α_3, сделаем замену независимых переменных (2.1) и оставим в каждом отдельно взятом равенстве лишь слагаемые с асимптотически главными множителями вида η^γ. Получим для построения краевого НДС вблизи свободного торца три приближенные уравнения равновесия. Присоединив к ним построенные так же остальные соотношения теории упругости, получим соответствующую полную систему, которую запишем так

$$\begin{aligned}&X_1\equiv\partial S^{\cdot}_{11}/\partial\xi_1+\partial S^{\cdot}_{12}/\partial\xi_2+\partial S^{\cdot}_{13}/\partial\zeta=0\\&X_2\equiv\partial S^{\cdot}_{21}/\partial\xi_1+\partial S^{\cdot}_{23}/\partial\zeta=0\\&X_3\equiv\partial S^{\cdot}_{31}/\partial\xi_1+\partial S^{\cdot}_{32}/\partial\xi_2+\partial S^{\cdot}_{33}/\partial\zeta=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\tag{3.5}$$

Здесь уравнения равновесия выписаны явно, а остальные соотношения (ненужные для дальнейшего) заменены многоточием.

Смягчим требования, относящиеся к краевому НДС, считая, что в нем на торце $\xi_1=L\to\infty$ должны обращаться в нуль лишь перемещения, и вследствие этого краевая задача построения $(\text{НДС})_b$ станет разрешимой. Тогда в этом решении напряжения также обратятся в нуль на бесконечности лишь в случае, когда торцевые значения $(\text{НДС})_b$ будут подчиняться определенным соотношениям (условиям затухания).

В сопромате эти условия принимаются на основе принципа Сен-Венана, но их можно было бы вывести и формально, как необходимые условия затухания, вытекающие из структуры точных уравнений равновесия теории упругости (принцип Сен-Венана тогда сведется к предположению, что так полученные условия не только необходимы, но и достаточны). В теории квазидвумерных тел естественно считать, что условия затухания краевого НДС вблизи свободного торца таким же образом вытекают из приближенных уравнений (3.5).

Для реализации этого предположения выпишем четыре очевидные равенства (условия глобальной уравновешенности)

$$\begin{aligned}&\iint_g X_1dg=0,\quad\iint_g X_2dg=0,\quad\iint_g X_3dg=0\\&\iint_g\left[\zeta X_1-\xi_1X_3\right]dg=0\end{aligned}\tag{3.6}$$

в которых интегрирование распространяется на область (3.1).

Четыре искомые условия затухания можно получить, раскрыв левые части равенств (3.6) с использованием свойств достаточно быстрого затухания напряжений $S^{\cdot}_{mn}$ при $\xi_1\to\infty$.

Соответствующие выкладки опишем подробно, так как ими вскрывается физический смысл необходимости введения величины K-приведенной перерезывающей силы Кирхгофа – для формулировки граничных условий. Из третьего соотношения (3.5) получим

$$\iint_g X_3dg=\iint_g\frac{\partial S^{\cdot}_{31}}{\partial\xi_1}dg+\iint_g\frac{\partial S^{\cdot}_{32}}{\partial\xi_2}dg+\iint_g\frac{\partial S^{\cdot}_{33}}{\partial\zeta}dg=0$$

Будем открывать в отдельности каждый из трех интегралов в средней части этого равенства, учитывая, что область g определена соотношениями (3.1) и на ее границах должны выполняться все сформулированные выше требования

$$\iint_g \frac{\partial S_{31}^{\cdot}}{\partial \xi_1} dg = \int_{-1}^{1} d\zeta \int_0^{\infty} \frac{\partial S_{31}^{\cdot}}{\partial \xi_1} d\xi_1 = \int_{-1}^{1} \left[S_{31}^{\cdot} \right]_{\xi_1=0}^{\xi_1=\infty} d\zeta$$

В силу постулированного затухания напряжений в подынтегральном выражении последней части равенства верхний предел обращается в нуль. Поэтому при учете (3.3) получим

$$\iint_g \frac{\partial S_{31}^{\cdot}}{\partial \xi_1} dg = -\int_{-1}^{1} S_{31}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta$$

Далее

$$\iint_g \frac{\partial S_{32}^{\cdot}}{\partial \xi_2} dg = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_0^{\infty} d\xi_1 \int_{-1}^{1} S_{32}^{\cdot} d\zeta = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_0^{\infty} \left\{ \left[S_{32}^{\cdot} \zeta \right]_{\zeta=-1}^{\zeta=1} - \int_{-1}^{1} \frac{\partial S_{32}^{\cdot}}{\partial \zeta} \zeta d\zeta \right\} d\xi_1$$

Выразим $\partial S_{32}^{\cdot} / \partial \zeta$ через $S_{21}^{\cdot}$ из второго равенства (3.5) и учтем затухание $S_{32}^{\cdot}$, а также условие (3.2). Тогда получим

$$\iint_g \frac{\partial S_{32}^{\cdot}}{\partial \xi_2} dg = -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \iint_g \frac{\partial S_{32}^{\cdot}}{\partial \zeta} \zeta dg =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_{-1}^{1} \zeta d\zeta \int_0^{\infty} \frac{\partial S_{21}^{\cdot}}{\partial \xi_1} d\xi_1 = -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_{-1}^{1} S_{21}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} \zeta d\zeta$$

Далее имеем

$$\iint_g \frac{\partial S_{33}^{\cdot}}{\partial \zeta} dg = \int_0^{\infty} d\xi_1 \int_{-1}^{1} \frac{\partial S_{33}^{\cdot}}{\partial \zeta} d\zeta = \int_0^{\infty} \left[S_{33}^{\cdot} \right]_{\zeta=-1}^{\zeta=1} d\xi_1 = 0$$

Таким образом окончательно приходим к соотношению

$$\iint_g X_3 dg = -\int_{-1}^{+1} S_{31}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_{-1}^{1} S_{21}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} \zeta d\zeta = 0 \qquad (3.7)$$

Оно представляет собой одно из условий затухания главной части $(НДС)_b$ и, как выяснится ниже, полностью оправдывает использование приведенного усилия K для формулировки граничных условий на свободном крае квазидвумерных тел (и только для этого).

Отметим, что для возникающего в пластине НДС частного вида Бусинеск уже получал равенство (3.7) в качестве приближенного условия затухания [6].

При помощи описанных здесь традиционных в теории упругости приемов можно раскрыть и остальные соотношения (3.6). Это приведет к равенствам

$$\iint_g X_1 dg = -\int_{-1}^{1} S_{11}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \iint_g X_2 dg = -\int_{-1}^{1} S_{12}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0 \qquad (3.8)$$

$$\iint_g [\zeta X_1 - \xi_1 X_3]\, dg = -\int_{-1}^{1} S_{11}^{\cdot}\Big|_{\xi_1=0} \zeta d\zeta - J = 0$$

$$J = 2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \iint_g S_{12}^{\cdot} \zeta \, dg$$

Они, вместе с (3.7), и представляют собой те условия затухания, выполнение которых должно вытекать из граничных условий, выставляемых при построении $(НДС)_i$ на свободном крае квазидвумерного тела.

Замечание. В целях упрощения выкладок и рассуждений объектом обсуждения была выбрана тонкая пластина и считалось, что ее торец не искривлен. Однако полученные результаты можно перенести и на оболочки, так как применялся приближенный подход, в рамках которого искривленность срединной поверхности и конфигурация торца влияет лишь на второстепенные детали, которые обсуждать не будем. Они описаны в [3].

Отметим, что канонический принцип Сен-Венана, конечно остается справедливым и для случая, когда внешние силы приложены к квазидвумерному телу на его тонком торце. Для его реализации должны выполняться пять условий (в том числе и условие равенства нулю крутящего момента, на всех поперечных сечениях торца). Однако при этом речь идет о требованиях полного (до величин порядка η^{∞}) затухания НДС, вызванного внешними силами, а это требование является более сильным, чем необходимо для построения сопроматовского итерационного процесса. Приведенные выше рассуждения приближенны. Из них вытекает не полное затухание, а лишь затухание в главном (до величин порядка некоторых конечных степеней η), но для построения приближенной теории Кирхгофа – Лява такого затухания достаточно.

Пятое условие затухания в рамках принятого подхода не возникает, так как сдвигающие напряжения, входящие в явно выписанные уравнения (3.5), способны уравновешивать внешний крутящий момент, и обращение последнего в ноль не является необходимым.

Перенесение сопроматовской схемы на теорию пластин для случая свободного торца реализуется следующим образом.

Пусть рассматривается задача, для которой на единственном торце в трехмерной постановке сформулированы условия (3.3). В них под σ^*_{1r} подразумеваются суммы размерных напряжений внутреннего и краевого НДС, т.е. величины, асимптотики которых определяются формулами (1.1) и (3.4). Поэтому (3.3) можно переписать так

$$(\sigma_{11} + \eta S^{\cdot}_{11})_{\xi_1=0} = s_{11}, \quad (\sigma_{12} + S^{\cdot}_{12})_{\xi_1=0} = s_{12}$$

$$\eta(\sigma_{13} + S^{\cdot}_{13})_{\xi_1=0} = s_{13} \tag{3.9}$$

Отбросим в третьем условии затухания (3.8) слагаемое J и используем полученные соотношения вместе с (3.7), чтобы исключить из (3.9) величины $S^{\cdot}_{mn}$. Для этого из (3.9) составим четыре новые равенства

$$E\int_{-h}^{h} (\sigma_{11} + \eta S^{\cdot}_{11})_{\xi_1=0}\, d\alpha_3 = E\int_{-h}^{h} s_{11} d\alpha_3,$$

$$E\int_{-h}^{h} (\sigma_{12} + \eta S^{\cdot}_{12})_{\xi_1=0}\, d\alpha_3 = E\int_{-h}^{h} s_{12} d\alpha_3$$

$$E\int_{-h}^{h} (\sigma_{11} + \eta S^{\cdot}_{11})_{\xi_1=0}\alpha_3 d\alpha_3 = E\int_{-h}^{h} s_{11}\alpha_3 d\alpha_3$$

$$E\int_{-h}^{h}\eta(\sigma_{13} + S^{\cdot}_{13})_{\xi_1=0} d\alpha_3 + E\frac{\partial}{\partial\xi_2}\int_{-h}^{h} (\sigma_{12} + S^{\cdot}_{12})_{\xi_1=0}\alpha_3 d\alpha_3 =$$

$$= E\int_{-h}^{h} s_{13} d\alpha_3 + E\frac{\partial}{\partial\xi_2}\int_{-h}^{h} s_{12}\alpha_3 d\alpha_3$$

и упростим их при помощи условий затухания (3.7), (3.8) при $J = 0$. Получим, учитывая

(1.1), (3.3), следующие граничные условия, которые должны выставляться при реализации сопроматовской схемы для внутреннего НДС квазидвумерных упругих тел на свободном крае

$$\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{11}^{*}d\alpha_3\right]_{\alpha_1=0}=E\int_{-h}^{h}s_{11}d\alpha_{13},\quad \left[\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^{*}d\alpha_3\right]_{\alpha_1=0}=E\int_{-h}^{h}s_{12}d\alpha_3$$

$$\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{11}^{*}\alpha_3 d\alpha_3\right]_{\alpha_1=0}=E\int_{-h}^{h}s_{11}\alpha_3 d\alpha_{13}$$

$$\left[\int_{-h}^{h}\left(\sigma_{13}^{*}+\frac{\partial\sigma_{12}^{*}}{\partial\alpha_2}\right)d\alpha_3\right]_{\alpha_1=0}=E\left[\int_{-h}^{h}s_{13}d\alpha_3+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}s_{12}\alpha_3 d\alpha_3\right]$$

чтобы краевое НДС имело затухающий характер.

Решение соответствующей двумерной задачи по формулам вида (1.9) можно преобразовать к трехмерному виду и отождествить с исходным приближением $(\text{НДС})_i$ в сопроматовской схеме.

При этом в общем случае возникнет несоответствие между законом изменения по переменной ζ в так построенном $(\text{НДС})_i$ и в граничных условиях. Соответствующую невязку можно приближенно снять ценой решений антиплоской задачи теории упругости (оно будет заведомо затухающим, поскольку невязки составлены с учетом соответствующих требований). Одновременно будет приближенно построена и краевая поправка к расчету $(\text{НДС})_i$.

Рассмотрение сопроматовской схемы для квазидвумерных тел в случае, когда их торцы несвободны от закреплений, заняло бы слишком много места. Это требует более сложных подходов, чем можно было бы ожидать (соответствующие рассуждения изложены в [3]). Заметим только, что, удерживая в формальных рассуждениях все большее число членов асимптотических разложений, можно получить двумерные граничные условия различной формальной точности и, в частности, переходить к так называемым приведенным граничным условиям [7–9]. Желательно, однако, следить, чтобы граничные условия и дифференциальные уравнения, для которых они выставляются, были адекватны по асимптотической точности. В связи с этим отметим, что во всех рассмотренных случаях (свободный, шарнирно-опертый и заделанный торцы) классическим двумерным дифференциальным уравнениям в этом смысле адекватны именно классические же граничные условия (в том числе для свободного края и граничное условие с поправкой Кирхгофа).

4. Теория оболочек и пластин Кирхгофа – Лява как взятый вне связи с сопроматовской схемой метод расчета квазидвумерных тел, конечно, не универсальна. Область ее применимости ограничивается следующими оговорками:

1. Теория приближенно определяет лишь $(\text{НДС})_i$, т.е. дает надежную информацию только об упругих явлениях в зонах, не слишком близких к краям или другим линиям искажения НДС.

2. Изменяемость подлежащего построению $(\text{НДС})_i$ не должна быть слишком большой (это условие общеизвестно; здесь оно обсуждаться не будет).

3. Трехмерное НДС, для приближенного построения которого предназначена классическая двумерная теория, не должно иметь сложных особенностей.

4. Надо считать (как во всяком приближенном методе), что расчет по теории Кирхгофа – Лява не приводит к тождественно равному нулю или к асимптотически малому НДС.

В последнее время теория изгиба пластин Кирхгофа подверглась критике [10–14], с которой нельзя согласиться. Приводятся примеры противоречий, якобы присущих этой теории. Во всех них нарушается по меньшей мере одно из приведенных выше условий применимости теории Кирхгофа – Лява. Исключением является один пример, основанный на недоразумении. С него и начнем разбор критики теории Кирхгофа – Лява.

Рассматривается задача, в которой прогиб пластины задан в декартовых координатах формулой $w = a_0 + a_1x^2 + a_2y^2$, а искомыми величинами являются вызвавшие его воздействия. Эта обратная задача решается предельно просто: по формулам теории Кирхгофа подсчитывается внешнее давление p, приложенное к срединной плоскости, а также перерезывающее усилие N и изгибающий момент G, возникающие на крае пластины. Они и порождают заданный прогиб.

В рассматриваемом случае оказалось, что $p = N \equiv 0$. Это с предельной ясностью значит, что заданный прогиб в пластине могут вызвать одни краевые моменты G, а p и N в этом участвовать не должны. Однако почему-то описанные входные данные в [10, 12] трактуются как постановка задачи о вдавливании пологого штампа и полученное решение считается противоречивым (есть штамп, но нет оказываемого им давления), а причиной "несоответствия" объявляется дефектность теории Кирхгофа. В действительности неправильно предположение о существовании штампа, а теория Кирхгофа только вскрывает его несостоятельность (если нет давления, значит нет и штампа).

В [12] для решения той же задачи теория Кирхгофа заменена теорией Тимошенко – Рейсснера. Делается попытка показать, что это способно улучшить окончательный результат. Используется повышение порядка разрешающего уравнения и устраняются краевые моменты G. Вместо них появляется локализованное вблизи края давление p сложного вида. Непонятно, чем же решение Тимошенко – Рейсснера лучше решения Кирхгофа. Ясно только, что они различаются лишь на крае и что ни то ни другое не имеет отношения к достоинствам или недостаткам обеих теорий.

Остальные "свидетельства" дефектности теории Кирхгофа в [10, 11, 14] относятся к случаям, когда так полученное решение либо обращается в тождественный нуль, либо становится асимптотически малым. Об этом уже говорилось выше.

Замечание. В [10–14] говорится, что теория Кирхгофа становится дефектной, если $w = O(\eta^{-2})$. Это и есть то, о чем идет речь в условии *4* применимости теории Кирхгофа – Лява, так как в "нормальном" случае $w = O(\eta^{-3})$.

Само по себе исчезновение асимптотически главного члена при итерационной реализации сопроматовской схемы означает лишь необходимость изменить последовательность построения (НДС)$_i$ и (НДС)$_b$. А именно, надо начать с построения последнего. Однако, если говорить о конкретных примерах, обсуждаемых в [10–14], то большинство из них усложнено наличием угловых точек на граничных контурах.

В окрестности таких точек трехмерное НДС пластины или оболочки может иметь сложные особенности и трудно представить себе, что их удастся удовлетворительно аппроксимировать в рамках какой бы то ни было двумерной теории. Такой расчет для обсуждаемых задач при выполнении других условий будет достоверным лишь в достаточном удалении от предполагаемой особенности.

Для вывода равенств (1.7), эквивалентных уравнениям классической теории изгиба пластин, не нужны какие бы то ни было гипотезы. Эти соотношения являются следствием предположения, что среди интегралов трехмерных уравнений теории упругости интерес будут представлять лишь такие, которые отвечают требованиям определяющих соотношений (1.5), (1.6). Показывается, что такие решения существуют и приближенно удовлетворяют уравнениям (1.7). Вместе с тем из трехмерных уравнений теории упругости, записанных в форме (1.4), видно, какие слагаемые надо в них отбросить, чтобы прийти к (1.7). Поэтому в качестве физической интерпретации легко сформулировать и гипотезы, из которых сразу вытекают уравнения классической двумерной теории: третье, четвертое и шестое равенства (1.4) надо заменить приближенными соотношениями

$$\partial v_i / \partial \xi_i = \sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj}, \quad \partial v_3 / \partial \zeta = 0$$

$$\partial v_i / \partial \zeta + \partial v_3 / \partial \xi_i = 0 \quad (i \neq j = 1,2)$$

Это утверждение, конечно, эквивалентно гипотезам Кирхгофа – Лява, но выражено нетрадиционным образом. В связи с этим отметим, что именно так (в виде замены некоторых точных уравнений приближенными равенствами) и надо формулировать гипотезы приближенных теорий (об этом подробнее в [15, стр. 65]). Такой подход позволяет избежать формальных несоответствий (к замкнутой системе точных уравнений добавляются лишние приближенные равенства).

В частности, если принята гипотеза отсутствия поперечного сдвига, т.е. введены равенства $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$), то формулу Гука

$$E(\partial v_i^* / \partial \alpha_3 + \partial v_3^* / \partial \alpha_i) = 2(1+\nu)\sigma_{i3}^*$$

надо отбросить. Тогда исчезнет и надуманное противоречие, приписываемое теории Кирхгофа в [13, стр. 145].

Остановимся на опущенном выше слагаемом J в третьем условии (3.8). Оно выражается не через величины s_{1r} (известные из торцевых условий), а через S_{12} (функцию двух переменных ξ_1, ζ, являющуюся затухающим решением некоторой антиплоской задачи теории упругости). Это значит, что, строго говоря, в теории Кирхгофа – Лява даже приближенные граничные условия нельзя сформулировать, не вводя в рассуждение теорию краевого НДС. Однако можно показать, что в средней части третьего равенства (3.8) слагаемое J асимптотически мало по сравнению с первым слагаемым.

Замечание. Условие, соответствующее третьему равенству (3.8) с сохранением слагаемого J, получило название приведенного. Оно обсуждается в [7–9]. Все результаты совпадают в главном и подтверждают асимптотическую второстепенность слагаемого J. Это значит, что поправка Кирхгофа не только правильна, но и является единственной математически последовательной поправкой в граничных условиях, выставляемых для двумерных классических уравнений теории оболочек.

Таким образом, вопреки критическим соображениям работ [10–14] по поводу теории Кирхгофа, можно утверждать, что эта теория:

1. Математически обоснована.

2. Имеет ясную область применимости.

3. Очевидным образом может трактоваться как исходное приближение некоторого итерационного процесса.

4. Хорошо согласуется с физически ясной сопроматовской структурой НДС квазидвумерного упругого тела.

5. Не содержит в своих уравнениях решений с недопустимо большим показателем изменяемости, законность использования которых во всякой двумерной теории сомнительна или по меньшей мере требует дополнительных рассуждений.

6. В рамках точности этой теории справедлив линейный закон изменения по поперечной переменной α_3 перемещений и асимптотически главных напряжений. Поэтому математически последовательными в этой теории являются как введение понятия об усилиях и моментах, так и принятие предположения, что усилия совершают работу на перемещениях срединной поверхности, а моменты – на углах поворота (последние предположения необходимы для того, чтобы было законным применение двумерных аналогов вариационных принципов [15]).

С логикой преобразования Кельвина–Тэта, конечно, согласиться нельзя. Ее авторам, по-видимому, оказало плохую услугу желание привязать вопрос к каноническому принципу Сен–Венана. Однако из этих неправильных преобразований сделан правильный вывод: при постановке граничных условий на свободном крае надо пользоваться величиной K.

Вместе с тем величину K не следует трактовать как реальную силу. Этой величиной, вообще говоря, нельзя пользоваться при проверке глобальной уравновешенности квазидвумерных упругих тел, хотя в некоторых случаях такой подход не испортит окончательного результата: например, тогда, когда крутящий момент H

непрерывен как функция точек контура. Использование K при разрывном H является ошибкой. Об этом говорят и некоторые критики теории Кирхгофа, но свою мысль они почему-то не доводят до логического конца.

Замечание. Если в пластине не выполняется интегральное соотношение, ошибочно принимаемое за условие глобальной уравновешенности, то это не значит, что в точках возможного нарушения непрерывности (например, в угловых точках края) можно помещать сосредоточенные силы. Такое действие оправдано лишь тогда, когда в "подозреваемой" точке возникает совершенно определенная особенность (для w особенность вида $\rho^2 \ln\rho$). Об этом подробно говорится, например, в [16]. Подобные вопросы в [10–14] не поднимаются. В результате в [12, стр. 67] содержится следующая непоследовательность. Приводится решение задачи изгиба пластины, в котором внешнее давление p и перерезывающие усилия q_x, q_y определяются формулами (1.15), (1.16), а для предполагаемых сил N в углах дается формула (1.17). Из указанных формул следует, что в сколь угодно малой окрестности угла пластины p, q_x, q_y в совокупности дадут бесконечно малую силу, которая не сможет уравновесить конечную силу N. Таким образом, глобальная (воображаемая) неуравновешенность пластины заменяется локальными реальными неуравновешенностями в углах.

5. Двумерные теории оболочек и пластин всегда представляют собой лишь приближенные методы исследования этих упругих тел. Трехмерную задачу теории упругости, конечно, нельзя точно свести к двумерной (без использования бесконечных процессов).

Автору представляется, что теория Кирхгофа – Лява (*K–L* теория) по изложенным выше соображениям является наилучшим из существующих двумерных вариантов приближенного расчета квазидвумерных упругих тел, но и она связана с погрешностями двоякого рода: этой теорией в общем случае совсем плохо описываются краевые упругие явления и не совсем точно определяется $(НДС)_i$.

Попытка сгладить оба указанных дефекта при помощи теорий высшего порядка, в частности, теории Тимошенко – Рейсснера (*T–R* теории) при сохранении координатной системы (α_1, α_2) не увязывается с физической сущностью проблемы, так как для описания $(НДС)_b$ естественными являются переменные (α_1, α_3), а не (α_1, α_2). С этой точки зрения явными преимуществами обладает сопроматовская схема, в рамках которой для $(НДС)_i$ и $(НДС)_b$ используются разные пары независимых переменных.

Кроме того, непонятно, почему совершенно разные по своим свойствам внутреннее и краевое НДС можно уточнять единым приемом (учетом деформации поперечного сдвига). И с этой точки зрения предпочтительней выглядит сопроматовская схема, где $(НДС)_i$ и $(НДС)_b$ уточняются разными способами.

Одним из достоинств *K–L* теории является существование итерационного процесса, в котором она соответствует исходному приближению. Итерационный характер имеет и теория $(НДС)_b$. В ней исходные приближения определяют либо антиплоские задачи теории упругости (при слабом закреплении), либо плоская задача теории упругости (при более жестком закреплении). Таким образом можно говорить и об очевидном обобщении *K–L* теории, подразумевая под этим расчет $(НДС)_i$ по *K–L* теории и расчет $(НДС)_b$ при помощи решения антиплоской или плоской задачи упругости. В практических применениях решение антиплоской и плоской задач теории упругости не всегда будет нужно, но существование такой возможности имеет принципиальное значение. В частности, это позволит развеять и недоумение по поводу приведенного усилия K (см. *п.* 3). Отметим, что с вычислительной точки зрения операции, связанные с решением антиплоской задачи теории упругости, в простейших случаях идентичны операциям, связанным с использованием *T–R* теории. В более сложных случаях расчет $(НДС)_b$ по обобщенной *K–L* теории усложняется, но не теряет силы, а например, по *T–R* теории, сохранив свою простоту, расчет может стать качественно неверным (это показано в [17]).

В [10–14] подчеркиваются высокие достоинства T–R теорий и даже выдвигается предложение сделать их базовыми в учебной литературе, а K–L теории отвести роль частного случая. В связи с этим, перечислим те недостатки, которые видятся автору в T–R теории (имеется в виду изложенный в [18] вариант этой теории).

1. Основная идея T–R теории непоследовательна: предлагается учитывать один фактор (поперечный сдвиг), лежащий за пределами точности K–L теории, но не устраняются другие, присущие этой теории погрешности того же порядка.

2. Асимптотические рассуждения [3–5] четко показывают, что выйти за пределы точности K–L теории можно лишь, отказавшись от предположения о линейности изменения перемещений и асимптотически главных напряжений по толщине тела. Поэтому в теориях высшего порядка неправомерно введение понятий об усилиях и моментах, а также математически непоследовательным является использование двумерных аналогов вариационных принципов, как при построении самой теории, так и при решении ее конкретных задач (именно такие вариационные принципы, как правило, и являются основным инструментом построения T–R теорий).

3. Дифференциальные уравнения повышенного порядка, к которым приводит T–R теория, содержат решения, имеющие недопустимо большой (для двумерных теорий) показатель изменяемости. Эти решения надо либо исключить, как в [4, 5], либо ставить вопрос об обстоятельствах, при которых их использование не повлечет ошибок, вроде указанных в [17].

4. Не указан итерационный процесс, для которого расчет по T–R теории определяет исходное приближение. Поэтому обобщающие рассуждения (обоснования, уточнения, оценки погрешностей) потребуют, вместо традиционного построения итераций, гораздо более трудного оперирования с уравнениями беспредельно увеличивающегося порядка.

5. Из сопроматовской схемы следует, что на крае квазидвумерного тела, в зависимости от характера закрепления, могут возникать упругие явления с асимптотически различными свойствами (антиплоский и плоский погранслои). Поэтому маловероятно предположение, что все они могут быть описаны единым дополнительным уравнением второго порядка, появляющимся в T–R теориях [18]. Более того, на конкретном примере [17] показано, что это предположение не оправдывается.

6. Математически завершенными среди теорий высшего порядка можно считать лишь те, которые относятся к пластинам. Теории оболочек высшего порядка [19, 20] пока далеки от такого же совершенства. Ясна их чрезвычайная громоздкость и не очевидна целесообразность дальнейшей работы над ними. Сопроматовская схема без каких-либо доработок способна достигнуть всех тех целей, которые ставит перед собой T–R теория при исследовании не только пластин, но и оболочек. Она позволяет исследовать в исходном приближении внутреннее НДС ценой расчета по K–L теории, построить приближение $(\text{НДС})_b$ ценой решения антиплоской или плоской задач теории упругости, найти первую поправку к $(\text{НДС})_i$ ценой выполнения одной итерации.

Многократно повторяющееся в [10–14] утверждение, что T–P теория является более точной и более общей чем K–L теория не обосновано ни в одной из этих работ. Оно в общем случае и неверно. Те обстоятельства, что T–R теория учитывает один из ранее отбрасывавшихся факторов (поперечный сдвиг) и позволяет выставить одно дополнительное граничное условие, не дают для этого серьезных оснований. Нужно еще показать, что среди других по-прежнему опускаемых факторов не содержится ни одного, имеющего такой же порядок. Должно быть показано также, что новые произволы T–R теории используются правильно, т.е. приближают нас к решению соответствующей трехмерной задачи.

Обсудим для примера задачу из [13, стр. 142]. Для нее по T–R теории выполняется элементарное решение, записанное в виде $w = w_1 + w_2$. Показывается, что при некоторых (надуманных) обстоятельствах аналог этого решения в рамках K–L теории обращается в нуль, в то время как по T–R теории решение остается не нулевым. В нем исчезает асимптотически главная часть и решение принимает вид $w = w_2$. В этом автор видит преимущество T–R теории. Но не видно, какие имеются основания предполагать, что асимптотически второстепенное слагаемое w_2 будет правильно определено по математически непоследовательной T–R теории. С точки зрения общепринятых правил приближенных вычислений ценность обоих решений ($w \equiv 0$ по Кирхгофу – Ляву и $w = w_2$ по Тимошенко – Рейсснеру) совершенно одинакова. Оба они дают право с уверенностью утверждать лишь, что в решении исчезает его асимптотически главная часть.

Если говорить более конкретно о рассмотренном примере, то из результатов [17] следует, что для него можно ожидать, что решение $w = w_2$ будет "случайно" правильным, так как речь идет о пластине со свободным краем. Если бы край был достаточно жестко оперт, то согласно [17] на это рассчитывать не было бы оснований.

Замечание. Эталонная задача, обсужденная в [13], для своего решения на том уровне строгости, который там принят, вовсе не требует применения T–R теории. В [4, 5, 18] показано, что такой же результат будет достигнут на базе K–L теории. Надо только использовать так называемые приведенные граничные условия, т.е. учесть слагаемое J в соотношениях (3.8).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А.Л.* О краевом напряженно-деформированном состоянии тонких упругих оболочек // Proc. Estonian Acad. Sci. Ser. Phys., Math. 1993. T. 42. No. 1. C. 32–44.
2. *Simmonds J.G.* An asymptotic analysis of end effects in the axisymmetric deformation of elastic tubers weak in shear: Higher order shell theories are inadequate and unnecessary // Intern. J. Solids and Structures. 1992. V. 29. № 20. P. 2441–2461.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
5. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On the Timoshenko – Reissner type theories of plates and shells // Intern. J. Solids and Structures. 1993. V. 30. № 5. P. 675–694.
6. *Todhunter I., Pirson K.* A history of the theory of elastisity and the strength of materials. N.;Y.: Dover. 1960. V. 2. Pt. 2. 546 p.
7. *Колос А.В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771–781.
8. *Гольденвейзер А.Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 996–1028.
9. *Koiter W.T., Simmonds J.G.* Foudation of shell theory // Theoretical and Applied. Mechanics.: Proc. 13th Intern. Congr. of Theor. and Appl. Mech. Berlin; Heidelberg: Springer–Verlag. 1973. P. 150–176.
10. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
11. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. N 3. С. 48–64.
12. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
13. *Васильев В.В.* К дискуссии по классической теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 140–150.
14. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразовании Кельвина–Тэта // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 133–139.
15. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953. 544 с.

16. *Гольденвейзер А.Л.* Исследование напряженного состояния сферической оболочки // ПММ. 1994. Т. 8. Вып. 6. С. 441–467.
17. *Гольденвейзер А.Л.* О внутреннем и краевом расчетах тонких упругих тел // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 1019–1032.
18. *Reissner E.* On the analysis of first and second-order shear deformation effects for isotropic elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. № 4. P. 959–961.
19. *Naghdi P.M.* On the theory of thin elastic shells // Quart. Appl. Math. 1957. V. 14. № 4. P. 369–380.
20. *Рогачева Н.Н.* О соотношениях упругости Рейсснера – Нахди // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1063–1071.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1996