МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1997

УДК 539.375

© 1997 г. Л.Г. КОЛТОН, С.А. НАЗАРОВ

ВАРИАЦИЯ ФОРМЫ РЕБРА ПЛОСКОЙ ЛОКАЛЬНО НЕРАВНОВЕСНОЙ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

Изучается форма приращения поверхности плоской трещины нормального отрыва в трехмерном упругом пространстве. Исследуется разрешимость соответствующего вариационного неравенства и вычисляется асимптотика решения в предположении, что коэффициент интенсивности напряжений имеет несколько максимумов $K(\tau;\, s_j)$ в точках s_j гладкого ребра трещины (τ – параметр нагружения). Если $K(\tau_0;\, s_j) = K_c$, то при малых $\tau - \tau_0 > 0$ вблизи точек s_j возникают локальные возмущения с "глубиной" $O((\tau-\tau_0)^{3/2})$ и с "шириной" $O((\tau-\tau_0)^{1/2})$; форма такого возмущения описывается решением так называемого предельного неравенства на прямой. Рассмотрены примеры и приведены результаты расчетов на ЭВМ.

1. Постановка задачи. Пусть G – область на плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная простым гладким контуром ∂G. Положим $M = \{x \in \mathbf{R}^3\colon x_3 = 0,\, y = (x_1, x_2) \in G\}$, $\Gamma = \{x\colon x_3 = 0,\, y \in \partial G\}$, $\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus M$. Рассмотрим задачу о деформации однородного изотропного упругого тела Ω с трещиной M под действием гладкой нормальной симметричной нагрузки $P(\tau;\, y)$, приложенной к берегам $M^{\pm}$ трещины. Здесь τ – параметр нагружения.

Обозначим через v исчезающую на бесконечности гармоническую в полупространстве $\mathbf{R}^3_+ = \{x\colon x_3 > 0\}$ функцию, удовлетворяющую краевым условиям

$$(\partial v / \partial x_3)(Y, 0) = p(\tau; y), \quad y \in G; \quad v(y, 0) = 0, \quad y \in \mathbf{R}^2 \setminus G \tag{1.1}$$

Здесь $p = -\mu^{-1}(1-\nu)P$, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Известно, что след v на плоскости $\partial\mathbf{R}^3_+$ совпадает со следом компоненты u_3 поля смещений в рассматриваемом теле (представление Папковича – Нейбера; см., например, [1]). Обозначим через s координату на ребре Γ (длину дуги), а через (r, ϕ) – полярные координаты в плоскостях, нормальных к Γ, такие что берега $M^{\pm}$ трещины локально задаются уравнениями $\phi = \pm\pi$. Для функции v справедливо представление [2, 3]:

$$v(x) = \mu^{-1}(1-\nu)(2r/\pi)^{1/2}\{K(s)[1 + \tfrac{1}{4} r p(s)^{-1}]\sin \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3} r k(s) \sin \tfrac{3}{2}\varphi\} +$$
$$+ p(s) r \sin\varphi + O(r^2), \quad r \to 0 \tag{1.2}$$

Здесь $K(s)$ – коэффициент интенсивности напряжений (КИН), $k(s)$ – коэффициент при младшем нерегулярном члене, $\rho(s)$ – радиус кривизны контура ∂G, $p(s)$ – значение правой части условия (1.1) в точке на ребре Γ трещины.

Предположим, что при $\tau = \tau_0$ КИН K положителен и в точках $s_1, \ldots, s_m$ на Γ достигает максимального значения $K(s_j) = K_c$ (например, $m > 1$ для контура, обладающего несколькими осями симметрии). Здесь K_c – критический КИН. Допустим также, что в окрестности s_j выполнены соотношения

$$K(s)=K_c[1-a_j(s-s_j)^2]+O(|s-s_j|^3), \quad a_j>0 \tag{1.3}$$

В описанной ситуации увеличение нагрузки $P(\tau)$ приводит к росту трещины. Примем критерий разрушения Дж. Ирвина и будем считать, что подросшая трещина является предельно равновесной (т.е. КИН всюду на ребре не превосходит K_c, а на возмущенной части ребра равен K_c). Цель работы – определение формы приращения поверхности трещины для значений параметра τ, близких к τ_0. Далее положим $\tau_0 = 0$ и в качестве малого параметра задачи выберем τ[1].

2. Вариационное неравенство. Обозначим через M_τ предельно равновесную трещину, отвечающую нагрузке $P(\tau; Y)$. Будем считать, что при малом τ трещина M_τ слабо отличается от M и ее ребро Γ_τ определяется соотношениями

$$\Gamma_\tau=\{x\in \mathbf{R}^3: x_3=0, s\in\Gamma, n=h(\tau;s)\} \tag{2.1}$$

Здесь n – расстояние до Γ, измеренное вдоль внешней нормали, $h(\tau; s)$ – подлежащая определению функция, которая описывает приращение поверхности трещины.

Обозначим через $K(\tau; s)$ и $k(\tau; s)$ коэффициенты в разложении (1.2) решения $v(\tau; x)$ задачи для тела Ω, а через $K_\tau(s)$ – КИН для возмущенной трещины M_τ; в обоих случаях нагрузка равна $P(\tau; y)$. Введем еще гармоническую в $\mathbf{R}^3_+$ функцию $x\to\zeta(s; x)$, удовлетворяющую однородным ($p = 0$) условиям (1.1) и имеющую особенность в точке ξ_s с координатой s на ребре Γ:

$$\zeta(s;x)=2(2\pi)^{-3/2}|x-\xi_s|^{-2}r^{1/2}\sin{}^1\!/_2\varphi+O(|x-\xi_s|^{-1/2}) \tag{2.2}$$

Известно [2, 7, 8], что величины $K(\tau; s)$ и $k(\tau; s)$ гладко зависят от переменных τ и s. Обозначая штрихом производную по τ, согласно [7, 8] имеем

$$K(0;s)=2\int_G P(0;y)\zeta(s;y,0)dy, \qquad K'(0;s)=2\int_G P'(0;y)\zeta(s;y,0)dy \tag{2.3}$$

В [9–11, 3] найдены главные члены асимптотики КИН $K_\tau(s)$ на ребре (2.1) возмущенной трещины. Введем некоторые обозначения. Вне любой окрестности точки ξ_s справедливо разложение

$$\zeta(s;x)=(2r/\pi)^{1/2}Z(s,t)\sin{}^1\!/_2\varphi+O(r^{3/2}), \quad r\to 0 \tag{2.4}$$

Функция Z в (2.4) является неотрицательной, симметричной и гладкой при $s\neq t$; верно соотношение $Z(s,t)=(2\pi)^{-1}|s-t|^{-2}+O(|\ln|s-t||)$. Пусть $Y(s,t)= =[2\pi(s-t)]^{-1}+Y_0(s,t)$ – первообразная функции $t\mapsto Z(s,t)$. Положим

$$b(s)=Y_0(s,s+0)-Y_0(s,s-0)$$

$$B(H;s)=\int_\Gamma [H(t)-H(s)]Z(s,t)dt \tag{2.5}$$

Упомянутая асимптотика КИН $K_\tau(s)$ имеет вид [3]:

$$K_\tau(s)\sim K(0;s)+\tau K'(0;s)+B[K(0;\cdot)h(\tau;\cdot);s]+$$
$$+h(\tau;s)[b(s)+{}^1\!/_2 k(0;s)-{}^1\!/_4 K(0;s)\rho(s)^{-1}]+\ldots \tag{2.6}$$

---

[1] Результаты публикуемой статьи анонсированы в [4]. Методика, предложенная в [3, 4], нашла свое развитие в [5, 6], где, в частности, помимо силового критерия трещин нормального отрыва в трехмерных телах обсуждаются энергетический и силовой критерий.

Согласно (2.6), требование предельной равновесности трещины M_τ вместе с физически очевидным условием неотрицательности h дают соотношения для определения контура (2.1):

$$h(\tau;s) \geqslant 0, \quad K_\tau(s) \leqslant K_c; \quad h(\tau;s) > 0 \Rightarrow K_\tau(s) = K_c \tag{2.7}$$

Как обычно [12–14, 3], (2.7) можно записать в виде вариационного неравенства $\langle K_c - K_\tau, \chi - h\rangle \geqslant 0\ \forall\chi \geqslant 0$; здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$. Принимая во внимание представление (2.6) и удерживая лишь главные члены асимптотики, окончательно приходим к следующей математической формулировке задачи: требуется найти функцию $H \in W_{2,+}^{1/2}(\Gamma) = \{H \in W_2^{1/2}(\Gamma): H \geqslant 0\}$, удовлетворяющую при любой пробной функции $X \in W_{2,+}^{1/2}(\Gamma)$ неравенству

$$-\langle BH, X-H\rangle + \langle \beta H, X-H\rangle \geqslant \langle F^0, X-H\rangle + \tau < F^1, X-H\rangle \tag{2.8}$$

$$H(\tau,s) = K_*(s)h(\tau,s), \quad K_*(s) = K_c^{-1}K(0;s)$$

$$\beta(s) = {}^1\!/_4\rho(s)^{-1} - K(0;s)^{-1}[b(s) + {}^1\!/_2 k(0;s)]$$

$$F^0(s) = K_*(s) - 1, \quad F^1(s) = K_c^{-1}K'(0;s) \tag{2.9}$$

где B – сингулярный интегральный оператор (2.5).

Далее будет предполагаться, что функция β положительна. Поскольку $B\colon W_2^{1/2}(\Gamma) \to W_2^{-1/2}(\Gamma)$ – непрерывный оператор, а квадратичная форма $\langle\beta H, X\rangle - \langle BH, X\rangle$ симметрическая и положительно определенная (см. [3]), то согласно общим результатам [12, 15] существует единственное решение вариационного неравенства (2.9).

3. Гладкость решения вариационного неравенства. Наряду с задачей (2.8) изучим уравнение

$$\beta(s)H(s) - (BH)(s) = f(s), \quad s \in \Gamma \tag{3.1}$$

Будем считать, что $\beta > 0$. Из сказанного в предыдущем разделе о квадратичной форме вытекает, что при любой правой части $f \in W_2^{-1/2}(\Gamma)$ существует единственное (обобщенное) решение $H \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ уравнения (3.1) и верна оценка $\|H; W_2^{1/2}(\Gamma)\| \leqslant$ $\leqslant c\|f; W_2^{-1/2}(\Gamma)\|$.

Непосредственно проверяется, что сингулярный интегральный оператор B представляет собой регуляризацию классического псевдодифференциального оператора с главным символом ${}^1\!/_2|\xi|$. (Это можно получить, если заметить, что для функции $H \in C^2(\Gamma)$ интеграл в (2.5), понимаемый в смысле главного значения, равен $\langle Y, H'\rangle$; здесь Y – введенная в *п.* 2 первообразная функции $t \mapsto Z(s,t)$.) Известно (см., например, [16]), что из эллиптичности оператора B вытекает следующее: при $f \in L_p(\Gamma)$, $2 \leqslant p < \infty$, обобщенное решение уравнения (3.1) принадлежит $W_p^1(\Gamma)$ и справедливо неравенство

$$\|H; W_p^1(\Gamma)\| \leqslant c_p\|f; L_p(\Gamma)\| \tag{3.2}$$

Рассмотрим уравнение со штрафом

$$\beta(s)H^\varepsilon(s) - (BH^\varepsilon)(s) - \varepsilon^{-1}H_-^\varepsilon(s) = f(s), \quad s \in \Gamma \tag{3.3}$$

$$H_- = {}^1\!/_2(|H| - H)$$

Из общих результатов § 5, гл. 3 [15] следует, что при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения слабо в $W_2^{1/2}(\Gamma)$ (и сильно в $L_2(\Gamma)$) сходится к решению задачи (2.8), в которой $F^0 + \tau F^1 = f$.

Уравнение (3.3), как и (3.1), имеет единственное решение $H^\varepsilon \in W_2^{1/2}(\Gamma) \subset L_p(\Gamma)$. Поэтому при $f \in L_p(\Gamma)$ в силу неравенства (3.2) решение H^ε уравнения (3.1) с правой частью $f + \varepsilon^{-1} H_-^\varepsilon \in L_p(\Gamma)$ попадает в $W_p^1(\Gamma)$. Умножим (3.3) на $\Upsilon_\varepsilon^{p-1}$, где $\Upsilon_\varepsilon = -\varepsilon^{-1} H_-^\varepsilon$. Имеем

$$\|\Upsilon_\varepsilon; L_p(\Gamma)\|^p = \langle f, \Upsilon_\varepsilon^{p-1} \rangle - \langle \beta H^\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{p-1} \rangle - \langle -BH^\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{p-1} \rangle \tag{3.4}$$

Первое вычитаемое справа в (3.4) неотрицательно; то же касается и второго вычитаемого, поскольку согласно (2.5) оно равно интегралу

$$\varepsilon^{1-p}(4\pi)^{-1} \int_\Gamma \int_\Gamma Z(t,s)[H^\varepsilon(s) - H^\varepsilon(t)][H_-^\varepsilon(s)^{p-1} - H_-^\varepsilon(t)^{p-1}]dtds \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon^{1-p}(4\pi)^{-1} \int_\Gamma \int_\Gamma Z(t,s)|H_-^\varepsilon(s) - H_-^\varepsilon(t)|^p \, dtds$$

Следовательно, применяя неравенство Гельдера, находим, что

$$\|\Upsilon_\varepsilon; L_p(\Gamma)\|^p \leqslant \langle f, \Upsilon_\varepsilon^{p-1} \rangle \leqslant \|f; L_p(\Gamma)\| \, \|\Upsilon_\varepsilon; L_p(\Gamma)\|^{p-1} \tag{3.5}$$

В силу (3.5) $\|\Upsilon_\varepsilon; L_p(\Gamma)\| \leqslant \|f; L_p(\Gamma)\|$, и значит, норма $\varepsilon^{-1} H_-^\varepsilon$ в $L_p(\Gamma)$, а с учетом (3.2) и норма $\varepsilon^{-1} H_-^\varepsilon$ в $W_p^1(\Gamma)$, равномерно по ε ограничена. Отсюда выводится следующее утверждение.

Предложение 1. Если $F^0, F^1 \in L_p(\Gamma)$, $2 \leqslant p < \infty$, то решение вариационного неравенства (2.8) принадлежит пространству $W_p^1(\Gamma)$.

4. Предельное неравенство. В правую часть соотношения (2.8) входит малый параметр τ; выясним, как зависит, от τ решение H. Сначала установим некоторые оценки. Подставим в (2.8) $X = 0$ и применим неравенство Гельдера. Имеем

$$-\langle B(H), H \rangle + \langle \beta H, H \rangle + \langle |F^0|, H \rangle \leqslant c\tau^2 \langle F^1, H \rangle \tag{4.1}$$

Поэтому $\|H; W_2^{1/2}(\Gamma)\| \leqslant C\tau$, а значит, H – величина "порядка τ". Кроме того, если U – окрестность точек $s_1, \ldots, s_m$ (согласно (1.3), (2.9) $F^0(s_j) = 0$), то в силу (4.1) $\|H; L_1(\Gamma \backslash U\| \leqslant C\tau^2$, т.е. H – величина "порядка τ" в $\Gamma \backslash U$. В соответствии со сказанным асимптотику решения вариационного неравенства (2.8) будем искать в виде

$$H(\tau; s) \sim \tau^{3/2} \sum_{j=1}^m \theta(s - s_j) z_j(\xi_j) + \ldots \tag{4.2}$$

Здесь θ – гладкая срезающая функция, равная единице вблизи нуля; $\xi_j = \tau^{-1/2}(s - s_j)$ – "растянутая" переменная; z_j – положительные, исчезающие на бесконечности функции, подлежащие определению. Согласно (1.3), (2.9), в $\tau^{-1/2}$ – окрестностях точек s_j верны представления

$$F^0(s) = -\tau a_j \xi_j^2 + O(\tau^{3/2}), \quad \tau F^1(s) = \tau A_j + O(\tau^{3/2})$$
$$A_j = F^1(s_j) \tag{4.3}$$

В качестве произвольной пробной функции X из (2.8) выберем аналогичную (4.2) сумму с положительными коэффициентами из $C_0^\infty(\mathbf{R})$. Справедливы соотношения

$$\tau^{-3}\langle B(H),H\rangle \sim \sum_{j=1}^{m}\int_\Gamma \theta(s-s_j)(\chi_j(\xi_j)-z_j(\xi_j))\times$$

$$\times\int_\Gamma \sum_{k=1}^{m}[\theta(t-s_k)z_k(\eta_k)-\theta(s-s_j)z_j(\xi_j)]Z(t,s)dtds \sim \tag{4.4}$$

$$\sim \sum_{j=1}^{m}\int_\Gamma \theta(s-s_j)[\chi_j(\xi_j)-z_j(\xi_j)]\int_\Gamma [\theta(t-s_j)z_j(\eta_j)-\theta(s-s_j)z_j(\xi_j)]Z(t,s)dtds+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_\Gamma \theta(s-s_j)[\chi_j(\xi_j)-z_j(\xi_j)]\int_\Gamma \left(\sum_{k\neq j}^{m}\theta(t-s_k)z_k(\eta_k)-\theta(s-s_j)z_j(\xi_j)\right)Z(t,s)dtds$$

$$\eta_k=\tau^{-1/2}(t-s_k)$$

Если $|s-s_j|<c$ и $|t-s_k|<c$, где $j\neq k$, а $0<c$ – достаточно малая постоянная, то $Z(t,s)<\mathrm{const}$. Поэтому последняя сумма в (4.4) есть $O(\tau)$. Перейдем в интегралах от переменных s, t к ξ_j, η_j (при этом интегрирование по Γ можно заменить интегрированием по $\mathbf{R}$) и воспользуемся асимптотическим представлением функции Z из (2.4). В результате (4.4) перепишется следующим образом:

$$\langle B(H),X-H\rangle \sim \frac{\tau^3}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{\mathbf{R}}[\chi_j(\xi_j)-z_j(\xi_j)]\int_{\mathbf{R}}[z_j(\eta_j)-z(\xi_j)]\frac{d\eta_j d\xi_j}{|\varepsilon_j-\eta_j|^2} \tag{4.5}$$

Выражение $\langle \beta H, X-H\rangle$, согласно (4.2), имеет порядок $\tau^{7/2}$. Принимая во внимание (4.3), (4.5) и отбрасывая в (4.4) младшие (порядка $\tau^{7/2}$) члены, приходим к формуле

$$\sum_{q=1}^{m}\{(B_0z_q,\chi_q-z_q)+(a_q\xi_q^2,\chi_q-z_q)\}\geqslant\sum_{q=1}^{m}(A_q,\chi_q-z_q) \tag{4.6}$$

$$(B_0z)(\xi)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}}[z(\eta)-z(\xi)]|\xi-\eta|^{-2}d\eta,\qquad (\chi,z)=\int_{\mathbf{R}}\chi(\xi)z(\xi)d\xi \tag{4.7}$$

Полагая в (4.6) $\chi_q=z_q$ при $q\neq j$ и считая функцию χ_j произвольной положительной, заключаем, что соотношение (4.6) эквивалентно m неравенствам

$$-(B_0z_j,\chi_j-z_j)+(a_j\xi_j^2,\chi_j-z_j)\geqslant(A_j,\chi_j-z_j)\quad (i=1,\dots,m) \tag{4.8}$$

Заменами $z_j\mapsto z=A_j^{-3/2}a_j^{1/2}z_j$, $\xi_j\mapsto\xi=A_j^{-1/2}a_j^{1/2}\xi_j$ в (4.8) устраняется зависимость от параметров задачи. Таким образом, предельным неравенством назовем задачу отыскания неотрицательной функции z, удовлетворяющей при любой пробной функции $\chi\geqslant 0$ соотношению

$$-(B_0z,\chi-z)+(\xi^2,\chi-z)\geqslant(1,\chi-z) \tag{4.9}$$

5. Разрешимость предельного неравенства. В силу неравенства Харди с дробным показателем (см., например, [17]) получаем, что при $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}\setminus 0)$ справедливо соотношение

$$(-B_0\chi,\chi)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}|\chi(\xi)-\chi(\eta)|^2|\xi-\eta|^{-2}d\xi d\eta\geqslant \tag{5.1}$$

$$\geqslant c\int_{\mathbf{R}}(1+|\xi|^{-1}[1+\ln(1+|\xi|)]^{-2}|\chi(\xi)|^2d\xi$$

Поэтому замыкание множества $C_0^\infty(\mathbf{R})$ по норме $[(-B_0 z, z)+\| z; L_2(-1,1)\|^2]^{1/2}$ является гильбертовым пространством $\mathrm{v}_0^{1/2}(\mathbf{R})$, причем

$$\| z; \mathrm{v}_0^{1/2}(\mathbf{R})\|^2 = \int\limits_{\mathbf{R}}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{|z(\xi)-z(\eta)|^2}{|\xi-\eta|^2}d\xi d\eta + \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{|z(\xi)|^2\, d\xi}{(1+|\xi|)[1+\ln(1+|\xi|)]^2} \tag{5.2}$$

Однако корректная постановка вариационного неравенства (4.9) в пространстве $\mathrm{v}_0^{1/2}(\mathbf{R})$ невозможна, так как двум последним членам в (4.9) не соответствуют непрерывные функционалы в $\mathrm{v}_0^{1/2}(\mathbf{R})$. Тем не менее, справедливо следующее утверждение о единственности решения.

Предложение 2. Пусть $L_1(\mathbf{R}; \xi^2)$ – пространство функций, суммируемых с весом ξ^2. Если z^1 и z^2 – неотрицательные функции из $\mathrm{v}_0^{1/2}(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R};\xi^2)$, удовлетворяющие (4.9), то $z^1 = z^2$.

Доказательство. Поскольку (4.9) выполняется при $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\chi \geqslant 0$, то, приближая z^1 и z^2 финитными гладкими функциями, получаем, что верны формулы (4.9), в которых $\chi = z^1$, $z = z^2$ и $\chi = z^2$, $z = z^1$. Складывая их, приходим к соотношению $(B_0(z^1 - z^2), z^1 - z^2) \geqslant 0$. Согласно (5.1) это возможно, если $(B_0(z^1 - z^2), z^1 - z^2) = 0$, или $z^1 - z^2 = \text{const}$. Так как $z^1 - z^2 \in L_1(\mathbf{R}; \xi^2)$, то const = 0. Предложение доказано.

Подчеркнем, что задачу о неравенстве (4.9) нельзя корректно поставить и в $\mathrm{v}_0^{1/2}(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R};\xi^2)$, поскольку оператор, отвечающий левой части (4.9), не будет коэрцитивным. Тем не менее, решение z неравенства (4.9) существует, имеет компактный носитель и задается явной формулой

$$z(\xi)=\begin{cases} \frac{2}{3}(2-\xi^2)^{3/2} & \text{при} \quad |\xi|< 2^{1/2} \\ 0 & \text{при} \quad |\xi|> 2^{1/2} \end{cases} \tag{5.3}$$

Способ построения z предложен в [18] и основан на сведении соответствующего (4.9) уравнения к известной задаче о восстановлении аналитической функции, возникающей, в частности, в теории трещин [19].

6. Асимптотическое решение исходного вариационного неравенства. В соответствии с приведенной в *п.* 4 процедурой построения формальной асимптотики решения задачи (2.8) положим (сравни с (4.2)):

$$H_*(\tau;s)=\tau^{3/2}\sum_{j=1}^{m} A_j^{3/2}a_j^{-1/2}z[(A_j a_j^{-1}\tau)^{-1/2}(s-s_j)] \tag{6.1}$$

Повторяя в обратном порядке рассуждения, использованные для вывода соотношений (4.8), (4.9), получаем, что функция $H_* \geqslant 0$ при любой пробной функции $X \in C^\infty(\Gamma)$, $X \geqslant 0$, подчинена соотношению

$$\langle BH_*, X-H_*\rangle + \langle \beta H_*, X-H_*\rangle \geqslant \langle F_*, X-H_*\rangle \tag{6.2}$$

При этом для правой части F_* верны оценки

$$\begin{aligned} &\| F_* - F^0 - \tau F^1; W_2^{-1/2}(\Gamma)\| \leqslant c|\ln\tau|\tau^2 \\ &\| F_* - F^0 - \tau F^1; L_p(\Gamma)\| \leqslant c_p\tau^{(3+1/p)/2}, \qquad p\geqslant 2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Сложим неравенства (6.2) и (2.8), в которых X заменено на H и H_* соответственно. В результате находим, что

$$\langle\beta(H-H_*), H-H_*\rangle - \langle B(H-H_*), H-H_*\rangle \leqslant \langle F_* - F^0 - \tau F^1, H-H_*\rangle$$

Отсюда и из (6.3) с учетом сказанного в конце *п.* 2 о квадратичной форме $\langle \beta H, X\rangle - \langle BH, X\rangle$ выводим оценку разности $H - H_*$ в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Применяя теперь предложение 1, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3. Для решения H вариационного неравенства (2.8) выполняются оценки

$$\|H - H_*;\, W_2^{1/2}(\Gamma)\| \leqslant C|\ln\tau|\tau^2, \qquad \|H - H_*;\, W_p^1(\Gamma)\| \leqslant C_p \tau^{(3+1/p)/2}$$

в которых $p \geqslant 2$, а H_* – асимптотическое решение (6.1).

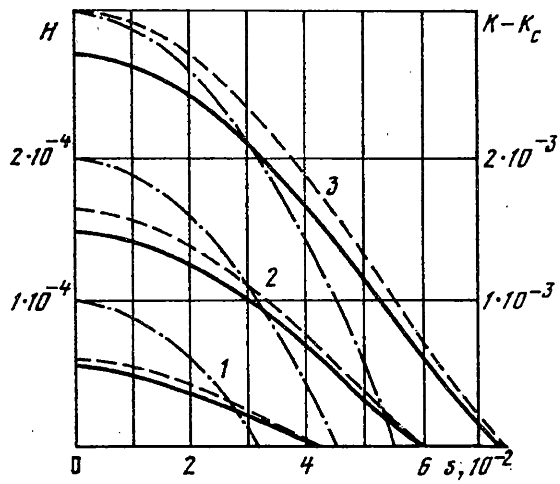
7. Начальный этап роста трещины. На основе полученной асимптотической формулы $H(\tau;s) \sim H_*(\tau;s)$ можно сделать следующие выводы о начальном этапе роста трещины нормального отрыва. При малых τ увеличение поверхности трещины локализовано в окрестностях точек s_j максимумов КИН $K(0;\, s)$ (при условии $K'(0;\, s) > 0$). Ширина участков роста составляет $O(\tau^{1/2})$ и трещина проникает на глубину $O(\tau^{3/2})$. Таким образом, появляются весьма пологие отростки; их профиль получается из графика функции (5.3) сжатием в $(\tau A_j)^{1/2} a_j^{-1/2}$ и $(\tau A_j)^{3/2} a_j^{-1/2}$ раз по осям абсцисс и ординат соответственно, где $A_j = K_c^{-1}K'(0;s_j)$, $a_j = -2K_c^{-1}(\partial^2 K/\partial s^2)(0;s_j)$. Площадь приращенной поверхности равна $\tau^2 A_j^2 a_j^{-1} S_z$, где $S_z = \pi$ – площадь подграфика кривой $z = z(\xi)$. В начале отростки развиваются независимо (влияние одного на другой учитывается членами $O(\tau^2)$), а затем, по мере увеличения ширины, их взаимодействие становится существенным и асимптотическая формула из предложения 3 теряет точность. На ребре Г невозмущенной трещины КИН принимает критическое значение в точках $s_j \pm d_j$, где $d_j = \tau^{1/2} A_j^{1/2} a_j^{-1/2}$, а асимптотическое решение вариационного неравенства (2.8) имеет носитель на объединении отрезков $[s_j - 2^{1/2}d_j, s_j + 2^{1/2}d_j]$ (формулы приведены с точностью $o(\tau^{1/2})$). Следовательно, рост трещины распространяется и на те участки, где $K(\tau;\, s) < K_c$. Подчеркнем особо, что, согласно (6.1), первая производная по τ функции, описывающей изменение формы ребра трещины, равна нулю в точке $\tau = 0$, а вторая не существует.

8. Численные примеры. Рассмотрим вариацию формы ребра трещины – полуплоскости $M = \{x\colon x_3 = 0, x_2 \leqslant 0\}$ под действием сосредоточенных растягивающих пар сил величиной P. Эти силы приложены к берегам трещины на единичном расстоянии от ребра. В качестве параметра нагружения выбрана величина $\tau = (P - P_c)K_c^{-1}$, где P_c такое значение силы, при котором максимум КИН равен K_c.

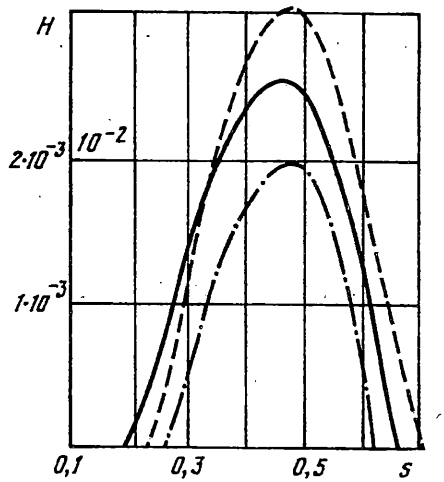
1. Растяжение трещины одной парой сил. Согласно [3] значения коэффициентов $K(x_1)$ и $k(x_1)$ находятся по формулам

$$K(x_1) = 2^{1/2}\pi^{-3/2}P(1 + x_1^2)^{-1}, \qquad k(x_1) = -2^{3/2}\pi^{-3/2}P(1 + x_1^2)^{-2} \tag{8.1}$$

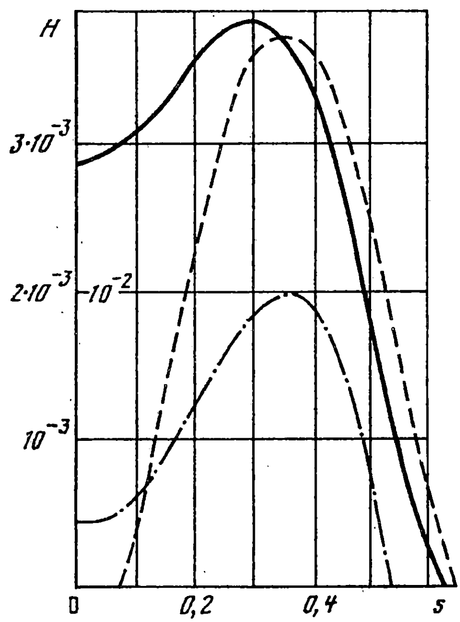
На фиг. 1 приведены графики решений полного (2.8) и асимптотического (4.8) вариационных неравенств (соответственно сплошная и штриховая линии), а также функции $K - K_c$ (штрихпунктирной линией) при $\tau = 10^{-3}$, $2\cdot 10^{-3}$, $3\cdot 10^{-3}$ – кривые *1*, *2* и *3*. Считается, что $K_c = 1$, графики по четности продолжаются на отрицательные значения x_1. Видно, что асимптотические формулы качественно верно отражают изменение формы ребра трещины. При различных τ величина возмущения и длина возмущенного участка ребра вычисляются в соответствии с формулой (6.1). Относительная погрешность асимптотического решения неравенства составляет 5%, однако длина носителя вычисляется практически точно. При увеличении τ погрешность асимптотической формулы резко возрастает, но погрешность вычисления длины



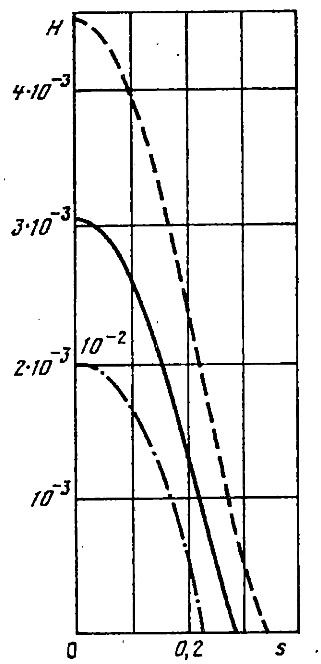
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

носителя остается прежней. Например, при $\tau = 10^{-4}$ погрешность в вычислении решения равна 1%, при $\tau = 10^{-3}$ – 5%, при $\tau = 10^{-2}$ – 25%, а погрешность в вычислении длины во всех случаях не превышает 2%.

2. *Растяжение трещины двумя парами сил, приложенными в точках (±L, –1,0).* Исследовалась зависимость формы возмущения ребра от расстояния $2L$; все расчеты проводились при $\tau = 10^{-2}$. Аналогично (8.1):

$$K(x_1) = 2^{1/2}\pi^{-3/2}P\{[1+(x_1+L)^2]^{-1}+[1+(x_1-L)^2]^{-1}\}$$

$$k(x_1) = -2^{3/2}\pi^{-3/2}P\{[1+(x_1+L)^2]^{-2}+[1+(x_1-L)^2]^{-2}\}$$

Функция K имеет или два симметрично расположенных максимума, или один максимум в точке $x_1 = 0$. Слияние двух максимумов изображено на фиг. 2–4, где штрихпунктирной линией обозначен график $K = K_c$ для $L = 0{,}7$; 0,65 и 0,5 (соответственно фиг. 2, 3 и 4). На этих же графиках сплошной и штриховой линиями представлены решения полного и предельного неравенств. Если точки приложения сил достаточно удалены, то трещина развивается двумя независимыми "выступами", форма которых близка к асимптотическому решению неравенства (фиг. 2). По мере сближения сил эти выступы сливаются в один, имеющий два симметричных максимума (фиг. 3); асимптотическое решение, естественно, приближает решение неравенства (2.8) лишь около максимумов КИН. Если силы столь близки, что у $K(x_1)$ имеется единственный максимум (фиг. 4), то на ребре трещины появляется один локальный выступ, форма которого близка к рассчитанной асимптотически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Кондратьев В.А.* Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 2026–2032.
3. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
4. *Kolton L.H., Nazarov S.A.* Quasistatic propagation of a model crack in an elastic space // C.r. Acad. sci. Paric. Ser. 2. 1992. T. 315. № 12. P. 1453–1457.
5. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Разрушение узкой перемычки между трещинами, лежащими в одной плоскости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 157–165.
6. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 2. С. 101–113.
7. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
8. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с. (Расширенный английский перевод: *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with plecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.)
9. *Захаревич И.С.* О вариации решений интегродиффере[illegible]ных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 19[illegible]49. Вып. 6. С. 961–968.
10. *Gao H., Rice J.R.* Somewhat circular tensile cracks // Intern. J. Fracture. 1987. V. 33. № 3. P. 155–174.
11. *Бородачев Н.М.* Об одной вариационной формуле и ее приложении к контактным задачам теории упругости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 127–133.
12. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
13. *Nguyen Quoc Son.* Stabilité et bifurcation en rupture et en plasticité // C.R. acad. Sci. Ser. 2. 1981. T. 292. № 11. P. 817–820.
14. *Колтон Л.Г.* Медленный рост системы трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 95–100.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
16. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. 279 с.
17. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
18. *Захаревич И.С.* Интегродифференциальные уравнения: формулы вариации, законы сохранения, точные решения: Препринт № 325. М.: ИПМ АН СССР, 1988. 69 с.
19. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
9.XI.1995