

УДК 539.374

© 1997 г. В.Н. ДЯКОН, А.А. КАМИНСКИЙ, Л.А. КИПНИС

### НАЧАЛЬНЫЕ ПОЛОСЫ ПЛАСТИЧНОСТИ В ТОЧКЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

В условиях плоской деформации рассматривается симметричная задача о начальном развитии вторичных полос пластичности из точки столкновения двух пластических линий скольжения. Приводится точное решение функционального уравнения Винера–Хопфа задачи и на его основе выводится формула для определения длины вторичных линий скольжения и устанавливается направление их начального развития.

1. Один из механизмов зарождения трещин в металлах – классический механизм Коттрелла, согласно которому трещина образуется при столкновении линий скольжения. Представляет интерес изучение вопроса о предшествующем образованию трещины начальном развитии пластической зоны вблизи точки столкновения линий скольжения, которая является концентратором напряжений.

В условиях плоской деформации рассмотрим статическую симметричную задачу о начальной пластической зоне вблизи точки  $O$  столкновения двух линий скольжения. Следуя широко распространенной гипотезе локализации [1–5], начальную пластическую зону будем моделировать двумя узкими прямолинейными полосами пластичности, исходящими из точки  $O$ . Поскольку длина пластических полос мала по сравнению с длиной столкнувшихся линий скольжения и размерами области и исследуется напряженно-деформированное состояние вблизи точки  $O$ , приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для плоскости, из точки  $O$  которой исходят четыре прямые линии скольжения (фиг. 1). Две из них полубесконечны, а две – конечной длины. На бесконечности формулируется условие (оно приведено ниже), позволяющее учесть влияние внешнего поля на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой области.

Требуется определить длину  $l$  вторичных линий скольжения и угол  $\beta$  их наклона к столкнувшимся линиям скольжения (направление начального развития вторичных линий скольжения).

Граничные условия задачи имеют вид  $(\beta - \alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha + \beta)$ :

$$\theta = \beta: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_s \quad (1.1)$$

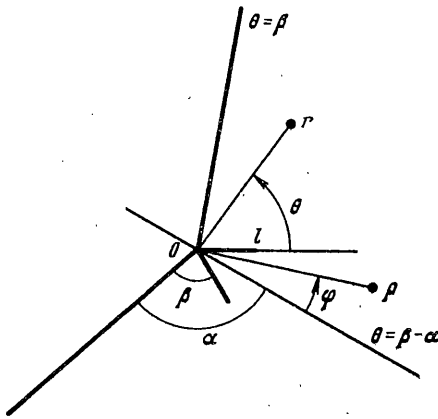
$$\theta = \beta - \alpha, \quad \theta = \pi - \alpha + \beta: \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0$$

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (1.2)$$

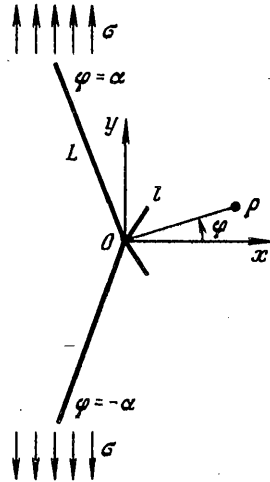
$$\theta = 0, \quad r < l: \quad \tau_{r\theta} = \tau; \quad \theta = 0, \quad r > l: \quad \langle u_r \rangle = 0$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l+0: \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}} \quad (1.3)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l-0: \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -e \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\sigma_r$  – напряжения;  $u_\theta$ ,  $u_r$  – смещения;  $\langle a \rangle$  – скачок  $a$ ;  $\tau = \pm \tau_s$ ,  $\tau_s$  – предел текучести на сдвиг (знак перед  $\tau_s$  устанавливается ниже);  $k_{II}$  – подлежащий определению коэффициент интенсивности напряжений в конце линии скольжения;  $e = 4(1 - \nu^2) / E$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

При  $\rho \rightarrow \infty$  главные члены разложений напряжений в ряды представляют собой решение аналогичной задачи без острых краев, складывающееся из решения неоднородной задачи и того решения однородной задачи, которое отвечает единственному на интервале  $]-1; 0[$  корню  $\lambda$  ее характеристического уравнения

$$[\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)\alpha] \times [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda + 1)\sin 2\alpha] +$$

$$+ [\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha)] \times [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] = 0$$

Упомянутые решения неоднородной и однородной задач выражаются формулами ( $C_0$ ,  $C$  – произвольные постоянные):

$$\sigma_\varphi = C_0 + T \cos 2\varphi, \quad \tau_{\rho\varphi} = T \sin 2\varphi \quad (1.4)$$

$$\sigma_\rho = C_0 - T \cos 2\varphi, \quad T = \tau_s / \sin 2\alpha, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\sigma_\varphi = A(\lambda + 2)[\sin \lambda(\pi - \alpha) \cos \lambda\varphi - \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \cos(\lambda + 2)\varphi] \quad (1.5)$$

$$\tau_{\rho\varphi} = A[\lambda \sin \lambda(\pi - \alpha) \sin \lambda\varphi - (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\varphi]$$

$$\sigma_\rho = A[(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \cos(\lambda + 2)\varphi - (\lambda - 2) \sin \lambda(\pi - \alpha) \cos \lambda\varphi],$$

$$A = C\rho^\lambda, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha$$

при  $\alpha \leq \varphi \leq \pi$  в (1.5)  $\alpha$  следует заменить на  $\pi + \alpha$ , а  $\varphi$  – на  $\varphi - \pi$ .

В частности, в исходной задаче должно быть сформулировано следующее условие на бесконечности:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \tau_{r\theta} = T \sin 2(\alpha - \beta) + Cgr^\lambda + o(1/r) \quad (1.6)$$

$$g = \lambda \sin \lambda(\pi - \alpha) \sin \lambda(\alpha - \beta) - (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)(\alpha - \beta)$$

$$0 < \alpha < \pi/2, \quad g > 0; \quad \pi/2 < \alpha < \pi, \quad g < 0$$

При фиксированном  $\alpha$  функция  $g(\beta)$  имеет единственный экстремум.

Постоянные  $C_0, C$ , входящие в (1.4)–(1.6), определяются из решения внешней задачи (по отношению к задаче в целом). Рассматриваемая же здесь задача (задача 1) является внутренней, а указанные постоянные считаются заданными по условию. Они характеризуют интенсивность внешнего поля.

Приведем пример соответствующей задачи в целом. Пусть однородная изотропная идеально упругопластическая плоскость имеет два отверстия со свободными от напряжений границами, симметричных относительно оси  $Ox$  (система координат указана на фиг. 2). При  $x, y \rightarrow \infty$   $\sigma_y \rightarrow \sigma$ ,  $\tau_{xy} \rightarrow 0$ ,  $\sigma_x \rightarrow 0$ . Граница отверстия содержит угловую точку, являющуюся концентратором напряжений. Диаметр отверстия значительно меньше расстояния последнего от оси. Уже при сколь угодно малых нагрузках из угловых точек будут развиваться пластические линии скольжения. Предположим, что две прямые линии скольжения, развивавшиеся из угловых точек, столкнулись в точке  $O$  оси  $Ox$ . Из концентратора напряжений  $O$  начнут развиваться вторичные линии скольжения. Требуется в рамках статической задачи определить их длину и направление начального развития.

Поскольку исследуется напряженно-деформированное состояние на расстояниях от отверстия, больших по сравнению с его диаметром, в качестве решения данной задачи будем использовать решение аналогичной задачи без отверстий – плоской статической симметричной задачи теории упругости для плоскости, из точки  $O$  которой исходят четыре прямые линии скольжения (фиг. 2). Две из них имеют длину  $L$ , а две – длину  $l$ , значительно меньшую  $L$ . Эта задача представляет собой пример задачи в целом. При  $\rho$ , соизмеримых с  $L$ , и  $l \ll \rho \ll L$  в качестве ее решения будем использовать решение аналогичной задачи без острых углов (внешняя задача по отношению к задаче в целом). Точное решение указанной внешней задачи строится методом Винера–Хопфа, причем главные члены разложений напряжений в ряды при  $\rho \rightarrow 0$  выражаются формулами (1.4), (1.5), где

$$C_0 = \frac{\sigma}{2}, \quad C = Q \left( \tau_s - \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right) L^{-\lambda} \quad (1.7)$$

$$Q = \frac{\sqrt{\pi} \sin \lambda \pi}{\lambda s} \frac{\Gamma(\lambda + 2)}{\Gamma(\lambda + 3/2)} \exp \left[ \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} F(t) dt \right]$$

$$s = 2\pi \cos 2\lambda\pi - [\cos 2(\lambda + 1)\alpha - \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha)] \sin 2\alpha + \\ + 2\alpha[(\lambda + 1) \sin 2(\lambda + 1)\alpha \sin 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)\alpha \cos 2\alpha] - \\ - 2(\pi - \alpha)[(\lambda + 1) \sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) \sin 2\alpha + \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) \cos 2\alpha], \quad s < 0$$

$$F(t) = \frac{(t^2 - \lambda - 1) \ln f(t)}{(t^2 + 1)[t^2 + (\lambda + 1)^2]}, \quad f(t) = \frac{h(t)}{\operatorname{sh} 2t\pi}$$

$$h = (\operatorname{sh} 2t\alpha + t \sin 2\alpha)[\operatorname{ch} 2t(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] + [\operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha) - t \sin 2\alpha](\operatorname{ch} 2t\alpha - \cos 2\alpha)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция.

Суммы остальных членов разложений напряжений в ряды стремятся к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ . При  $\rho$ , соизмеримых с  $l$ , и  $l \ll \rho \ll L$  в качестве решения задачи в целом будем использовать построенное ниже решение задачи 1 – внутренней задачи по отношению к задаче в целом. На бесконечности в этой задаче следует сформулировать соответствующее условие задачи 1, а  $C_0$  и  $C$  взять в виде (1.7). Тогда будет удовлетворено условие сшивания решений внешней и внутренней задачи при  $l \ll \rho \ll L$ . На основе решений внутренней и внешней задачи определяются длина вторичных линий скольжения и угол их наклона к столкнувшимся линиям скольжения.

Знак перед  $\tau_s$  устанавливается в зависимости от знака  $g$ : при  $0 < \alpha < \pi/2$  он совпадает со знаком  $C$ , а при  $\pi/2 < \alpha < \pi$  – противоположен последнему.

Решение поставленной задачи 1 представляет собой сумму решений следующих

двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо третьего условия (1.1) и первого условия (1.2) имеем

$$\theta = \beta; \quad \tau_{r,0} = 0; \quad \theta = 0, \quad r < l; \quad \tau_{r,0} = \tau_1 - Cgr^\lambda \quad (1.8)$$

$$\tau_1 = \tau - T \sin 2(\alpha - \beta)$$

а на бесконечности напряжения затухают как  $o(1/r)$ . Вторая задача – задача, аналогичная 1, без отрезков (имеется в виду ее решение, упомянутое выше). Таким образом, достаточно построить решение первой задачи.

2. Применяя интегральное преобразование Меллина с комплексным параметром  $p$  [6] к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая второе условие (1.2) и условия (1.8), приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа первой задачи

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} = (-\operatorname{tg} p\pi)G(p)\Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2) \quad (2.1)$$

$$G(p) = \frac{G_1(p) \cos p\pi}{G_2(p) \sin p\pi}, \quad G_1 = \Delta_8(\Delta_2\Delta_6 + \Delta_4\Delta_5) + \Delta_9(\Delta_2\Delta_5 + \Delta_4\Delta_7), \quad G_2 = \Delta_1\Delta_4 + \Delta_2\Delta_3$$

$$\Delta_1 = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha, \quad \Delta_2 = \sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha$$

$$\Delta_3 = \cos 2p\alpha + \cos 2\alpha, \quad \Delta_4 = \cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha$$

$$\Delta_5 = \sin 2p\beta + p \sin 2\beta, \quad \Delta_6 = \cos 2p\beta - \cos 2\beta$$

$$\Delta_7 = 2(\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta), \quad \Delta_8 = \sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)$$

$$\Delta_9 = \cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta), \quad \tau_2 = -Cgl^\lambda$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r,0}(bl, 0)b^p db, \quad \Phi^-(p) = \frac{1}{e} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{r=bl, \theta=0} b^p db$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достаточно малые положительные числа.

Функция  $G(it)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) представляет собой действительную положительную четную функцию  $t$ , стремящуюся к единице при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, индекс функции  $G(p)$  по мнимой оси равен нулю и ее можно факторизовать по формуле Гахова [7]. Используя эту факторизацию, представление  $p \operatorname{ctg} p\pi$  через четыре гамма-функции, принцип непрерывного продолжения, получаемые исходя из (1.3) асимптотики для  $\Phi^\pm(p)$  при  $p \rightarrow \infty$  и теорему Лиувилля, находим (подобно тому, как это сделано, например, в [8]) решение функционального уравнения (2.1):

$$\Phi^+(p) = -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \right. \quad (2.2)$$

$$\left. + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0)$$

$$\Phi^-(p) = K^-(p)G^-(p) \left[ \frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2 K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)(p+\lambda+1)G^+(-\lambda-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

$$K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p) / \Gamma(1/2 \mp p)$$

С помощью (2.2) получаем выражение для коэффициента интенсивности напряжений в конце линии скольжения

$$K_{II} = \frac{\sqrt{2}g\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+3/2)G^+(-\lambda-1)} C l^{\lambda+1/2} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}G^+(-1)} \tau_1 \sqrt{l} \quad (2.3)$$

Используя полученные результаты и формулу обращения Меллина, можно определить напряжения и смещения в рассматриваемой задаче.

3. Концентрация напряжений в конце линии скольжения может быть обусловлена скоплением дислокаций. Критическое значение  $k_{IIc}$  коэффициента  $k_{II}$  (вязкость скольжения [5]) определяет сопротивление материала развитию в нем линий скольжения. Величина  $k_{IIc}$  считается заданной постоянной материала. Будем предполагать, что сопротивление материала развитию в нем линий скольжения пренебрежимо мало и считать, что  $k_{IIc} = 0$ . Из (2.3) получаем следующую формулу для определения длины линий скольжения:

$$l = D \left( \frac{|Cl|}{\tau_s} \right)^{-1/\lambda}, \quad D = \left[ \frac{\sqrt{\pi} |g| \Gamma(\lambda+1) G^+(-1)}{2 |g_{\pm}| \Gamma(\lambda+3/2) G^+(-\lambda-1)} \right]^{-1/\lambda} \quad (3.1)$$

$$g_+ = \frac{2 \sin \beta \cos(2\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}, \quad g_- = -\frac{2 \cos \beta \sin(2\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}$$

При  $0 < \alpha < \pi/2$  в (3.1) следует выбрать знак  $C$ , а при  $\pi/2 < \alpha < \pi$  — противоположный последнему. В случае, когда в этой формуле фигурирует функция  $g_+(g_-)$  допустимыми являются лишь те  $\beta$ , при которых она положительна (отрицательна). Промежутки знакопостоянства функций  $g_{\pm}$  таковы:

$$0 < \alpha \leq \pi/4, \quad g_+ > 0$$

$$\pi/4 < \alpha < \pi/2, \quad 0 < \beta < 2\alpha - \pi/2, \quad g_+ < 0$$

$$\pi/4 < \alpha < \pi/2, \quad 2\alpha - \pi/2 < \beta < \alpha, \quad g_+ > 0$$

$$\pi/2 < \alpha \leq 3\pi/4, \quad g_+ > 0, \quad 3\pi/4 < \alpha < \pi,$$

$$0 < \beta < 2\alpha - 3\pi/2, \quad g_+ < 0, \quad 3\pi/4 < \alpha < \pi$$

$$2\alpha - 3\pi/2 < \beta < \alpha, \quad g_+ > 0, \quad 0 < \alpha < \pi/2, \quad g_- < 0$$

$$\pi/2 < \alpha < 3\pi/4, \quad 0 < \beta < 2\alpha - \pi, \quad g_- < 0$$

$$\pi/2 < \alpha < 3\pi/4, \quad 2\alpha - \pi < \beta < \pi/2, \quad g_- > 0$$

$$\pi/2 < \alpha < 3\pi/4, \quad \pi/2 < \beta < \alpha, \quad g_- < 0$$

$$\alpha = 3\pi/4, \quad \beta \neq \pi/2, \quad g_- < 0$$

$$3\pi/4 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi/2, \quad g_- < 0$$

$$3\pi/4 < \alpha < \pi, \quad \pi/2 < \beta < 2\alpha - \pi, \quad g_- > 0$$

$$3\pi/4 < \alpha < \pi, \quad 2\alpha - \pi < \beta < \alpha, \quad g_- < 0$$

Если вторичные линии скольжения развиваются в области  $\varphi \in ]\alpha; \pi[ \cup ]-\pi; -\alpha[$ , составляя угол  $\beta < \pi - \alpha$  со столкнувшимися линиями скольжения, то в (3.1) вместо  $G(p)$  следует взять функцию, получающуюся из последней заменой  $\alpha$  на  $\pi - \alpha$ ,  $g$  заменить на  $-g(\pi - \alpha, \beta)$ ,  $g_{\pm}$  — на  $-g_{\pm}(\pi - \alpha, \beta)$ .

Направление начального развития вторичных линий скольжения будем устанавливать на основе известного критерия максимальных касательных напряжений в решении (1.5) задачи, аналогичной рассматриваемой, без отрошков и с однородными граничными условиями. Согласно данному критерию, при фиксированном  $\alpha$  среди всех допустимых  $\beta$  в качестве угла  $\beta_*$ , определяющего направление начального развития

вторичных линий скольжения, следует выбрать то, которое соответствует наибольшему из значений функций  $|g(\alpha, \beta)|, |g(\pi - \alpha, \beta)|$ .

Анализируя функцию  $g$  и учитывая (3.2), получаем следующие результаты. При  $0 < \alpha < \pi/2$  вторичные линии скольжения развиваются в области  $\varphi \in ]\alpha; \pi[ \cup ] - \pi; -\alpha[$ . С ростом угла  $2\alpha$  столкновения линий скольжения от значений, близких к нулю, до значений, близких к  $\pi$ , угол  $\beta_*$  уменьшается от значений, близких к  $\pi/2$ , до значений, близких к нулю ( $\pi/4$ ) при  $C > 0$  ( $C < 0$ ). При этом, если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $\beta_* \rightarrow \pi/2$ ; если  $\alpha \rightarrow \pi/2$ , то  $\beta_* \rightarrow 0$  ( $\pi/4$ ) в случае  $C > 0$  ( $C < 0$ ). Если угол столкновения линий скольжения больше  $\pi$ , то вторичные линии скольжения развиваются в области  $0 < |\varphi| < \alpha$ , составляя со столкнувшимися линиями скольжения угол, равный  $\beta_*(\pi - \alpha)$ . Значения  $\beta_*$  и  $\lambda$  при некоторых значениях  $\alpha$  в случае  $C < 0$  даны ниже

$\alpha$ [град]	100	110	120	130	140	150	160	170
$\beta_*$ [град]	50	55	61	66	72	77	82	87
$-\lambda \cdot 10^3$	190	335	449	541	619	689	756	831

В случае, когда задачей в целом является задача из приведенного примера, эти числовые данные соответствуют ситуации, изображенной на фиг. 2

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бережницкий Л.Т., Кундрат Н.М.* О возникновении и развитии пластических деформаций в окрестности остроугольного жесткого включения // Физ.-хим. механика материалов. 1983. Т. 19. № 6. С. 60–68.
2. *Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) // Проблемы прочности. 1973. № 2. С. 3–18.
3. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
4. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
5. *Черепанов Г.П.* Пластические линии разрыва в конце трещины // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 720–728.
6. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
8. *Кипнис Л.А.* Линии скольжения в угловой точке границы раздела различных сред // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1028–1033.

Житомир

Поступила в редакцию  
30.V.1995