

УДК 539.374

© 1997 г. В.Г. КОВАЛЕВ, В.М. КОСЕНКОВ

**ДИНАМИЧЕСКОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ
 ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ**

Исследованию динамического контактного взаимодействия упругопластических тел посвящено большое количество теоретических работ, например [1–4], в которых изложены алгоритмы решения подобного рода задач и полученные с их помощью результаты. Однако, основное внимание при этом уделялось взаимодействию пространственных тел, поверхности которых ограничивают перемещение друг друга только в одном направлении. В данной работе изложена постановка, метод и результаты решения задачи о контактном взаимодействии вложенных друг в друга толстостенных упругопластических цилиндров конечной длины, под действием импульсной нагрузки на внутреннюю поверхность внутреннего цилиндра. Подобные задачи рассматривались в осесимметричной постановке, в ряде работ [5, 6], но деформирование внутреннего цилиндра исследовалось на основе теории тонких оболочек, а внешний цилиндр полагался абсолютно жестким. На основе разработанного алгоритма исследовано влияние закона нагружения, толщины внутреннего цилиндра, начальной величины и формы зазора между цилиндрами, наличия в зазоре газа на величину остаточных деформаций цилиндров. Установлено, что наличие в зазоре газа может существенно влиять на процесс упругопластического деформирования цилиндров и поэтому, традиционное допущение о пренебрежимо малом влиянии газа, первоначально разделяющим контактирующие поверхности, в ряде случаев может быть неоправданным.

Система уравнений, описывающая процесс динамического деформирования упругопластического твердого тела может быть представлена в виде:

$$[\rho]_{,t} + [\rho u_i]_{,i} = 0 \tag{1}$$

$$[\rho u_i]_{,t} + [\rho u_j u_i]_{,j} = \sigma_{ij,j} \tag{2}$$

$$[\rho(\epsilon + u_i u_i / 2)]_{,t} + [\rho(\epsilon + u_i u_i / 2) u_j]_{,j} = [\sigma_{ij} u_j]_{,j} \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - \sigma \delta_{ij} + \rho_{ij} \tag{4}$$

$$\dot{s}_{ij} = 2G \left[\dot{e}'_{ij} + \frac{\dot{\rho}}{3\rho} \delta_{ij} \right] \tag{5}$$

$$\rho_{ij} = 2g e''_{ij} \tag{6}$$

$$\dot{\sigma} = -K\dot{\rho} / \rho \tag{7}$$

$$\dot{e}_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{8}$$

$$\dot{e}'_{ij} = \dot{e}'_{ij} + \dot{e}''_{ij} \tag{9}$$

$$|\dot{e}'_{ij}| > 0, \text{ если } s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2) = 2/3 \sigma_T^2 \tag{10}$$

где ρ – плотность материала; u_i – компоненты вектора скорости твердого тела ($i = 1, 2, 3$); σ_{ij}, s_{ij} – компоненты тензора и девиатора напряжений; ε – внутренняя энергия; e_{ij} – компоненты тензора деформаций; e'_{ij}, e''_{ij} – упругая и пластическая компоненты тензора деформаций; G, g, K – модули сдвига, линейного упрочнения и объемного сжатия; σ – компонента шаровой части тензора напряжений; σ_T – предел текучести; ρ_{ij} – компоненты тензора остаточных микронапряжений; запятые в индексах означают ковариантное дифференцирование; точками над символами отмечены производные по времени.

Уравнения (1)–(3) описывают законы сохранения массы, импульса и энергии в упругопластическом теле. Связь между деформациями и напряжениями устанавливается на основе обобщенного закона Гука (4) с использованием теории пластического течения (5). Поверхность пластического течения, с учетом изотропного и деформационного упрочнения описывается условием Губера – Мизеса (10) (см. [7]). Тензор остаточных микронапряжений связан с пластическими деформациями соотношением (6), а скорости деформаций и перемещения геометрическими соотношениями (8). Соотношение (7) является уравнением состояния твердого тела.

Течение газа в зазоре между контактирующими поверхностями описывалось уравнением гидродинамической теории смазки в адиабатическом приближении

$$\nabla[(h^3/\mu)\nabla(p_\Gamma^{1+1/\chi_\Gamma})] = 12(1+1/\chi_\Gamma) \frac{\partial h p_\Gamma^{1/\chi_\Gamma}}{\partial t} \quad (11)$$

где $h = h(\bar{x}, t)$ – зазор между контактирующими поверхностями; p_Γ – давление газа в зазоре; μ – коэффициент динамической вязкости газа; χ_Γ – показатель адиабаты газа.

Система уравнений (1)–(11) дополнена соответствующими начальными и граничными условиями.

Если контакт между средами периодически прерывается, то во время его отсутствия должны выполняться условия на свободной поверхности [3]:

$$\sigma_{nn} = 0, \quad p_n = 0 \quad (12)$$

а при наличии контакта – условия на контактном разрыве для проекций компонент скорости и напряжений на нормаль к поверхности раздела двух тел

$$(u_n)_1 = (u_n)_2 \quad (13)$$

$$(\sigma_{nn})_1 = -(\sigma_{nn})_2 \quad (14)$$

где индексы 1, 2 обозначают параметры, относящиеся к первой и второй средам. До приложения нагрузки цилиндры находятся в невозмущенном состоянии.

Для решения системы уравнений (1)–(14) использовались численные методы. Непрерывная область решения заменялась дискретной с помощью подвижной неортогональной сетки. Аппроксимация уравнений производилась по методу конечных объемов [9]. Для этого система уравнений (1)–(3) приводилась к интегральному виду при помощи интеграла Остроградского – Гаусса:

$$\frac{d}{dt} \int_v F_0 dv + \int_s F_1 ds = 0 \quad (15)$$

$$F_0 = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho(\varepsilon + u_i u_i / 2) \end{vmatrix}, \quad F_1 = \begin{vmatrix} \rho u_i \\ \rho u_j u_i - \sigma_{ij} \\ \rho(\varepsilon + u_i u_i / 2) u_j - \sigma_{ij} u_j \end{vmatrix}$$

где s – поверхность конечного объема неортогональной подвижной сетки. В результате преобразований, дифференциальные уравнения в частных производных, входя-

щие в состав системы (1)–(14), сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (15). Для ее решения использован явный двухшаговый метод Эйлера, имеющий второй порядок точности. На первом шаге определяются искомые зависимости на полупространственном слое, соответствующем моменту времени $t_{n+1/2}$ (n – номер временного слоя), по формуле

$$(F_{\partial\nu})^{n+1/2} = (F_{\partial\nu})^n + \frac{\Delta t}{2} \int_{s^n} F_1^n ds \quad (16)$$

На втором шаге находятся искомые величины на момент времени t_{n+1} :

$$(F_{\partial\nu})^{n+1} = (F_{\partial\nu})^n + \Delta t \int_{s^{n+1/2}} F_1^{n+1/2} ds \quad (17)$$

В формулах (16) и (17) объемы $v^{n+1/2}$ и v^n вычисляются следующим образом:

$$v^{n+1/2} = v^n + (\Delta t / 2) \int_{s^n} u_s^n ds \quad (18)$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \int_{s^{n+1/2}} u_s^{n+1/2} ds \quad (19)$$

где u_s^n , $u_s^{n+1/2}$ – вектор скорости движения поверхности конечного объема.

Для вычисления интегралов по поверхности конечного объема использована зависимость

$$\int_{s^n} F_1^n ds \approx \sum_{i=1}^M (F_1^n)_i \Delta s_i \quad (20)$$

где Δs_i – ориентированные элементы поверхности конечного объема.

В том случае, когда использовалась модель идеальной пластичности ($g = 0$), для приведения напряжений к поверхности текучести применялись соотношения

$$s_{ij}^* = s_{ij} k_s \quad (21)$$

$$k_s = \sqrt{(2/3) \sigma_T [s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2)]}^{-1/2}$$

Приведение напряжений к поверхности текучести упрочняющегося материала осуществлялось на основе итерационной процедуры определения s_{ij}^* и e_{ij}'' :

$$k_s^k = \sqrt{(2/3) \sigma_T \{(s_{11}^k)^2 + (s_{22}^k)^2 + (s_{33}^k)^2 + 2[(s_{12}^k)^2 + (s_{23}^k)^2 + (s_{31}^k)^2]\}}^{-1/2} \quad (22)$$

$$d\lambda = (1 - k_s) / (4G)$$

$$de_{ij}''^{k+1} = 3d\lambda s_{ij}^k$$

$$e_{ij}''^{k+1} = e_{ij}''^k + de_{ij}''^{k+1}$$

$$s_{ij}^{k+1} = s_{ij}^k k_s^k$$

где k – номер итерации.

Вычисления по формулам (22) считаются законченными, когда

$$de_{ij}''^{k+1} < \varepsilon \quad (23)$$

где ε – конечная малая величина.

Расчет контактного взаимодействия двух сред осуществлялся на основе метода, изложенного в [3], который был модифицирован с целью учета газового слоя между телами до момента их контакта.

Решение уравнения (11) осуществлялось по неявной схеме Кранка – Николса. Решение получаемой в этом случае алгебраической системы уравнений производилось на каждом временном слое по методу последовательной верхней релаксации.

Связь между нормальными компонентами напряжений и давлением газа описывается следующей конечно-разностной зависимостью:

$$\begin{aligned} \sigma_{ni}^+ &= \sigma_{ni}^- = -p_{\Gamma} = \\ &= -\frac{\Delta x^- \cdot \rho^- \cdot \Delta x^+ \cdot \rho^+}{\Delta x^+ \rho^+ + \Delta x^- \rho^-} \left[\frac{u_i^+ - u_i^-}{\Delta t} + \frac{\sigma_{ni-1}^-}{\Delta x^- \rho^-} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_{ni+1}^+}{\Delta x^+ \rho^+} + \frac{\sigma_{\tau i-1}^-}{x^- \rho^-} - \frac{\sigma_{\tau i+1}^+}{x^+ \rho^+} - \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{(\Delta t)^2} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

где величины со знаками плюс и минус относятся к поверхностям тел, расположенным справа и слева от газового слоя, разделяющего тела; n, τ – индексы взаимно ортогональных составляющих нормальных компонент тензора напряжений; x – радиус кривизны поверхности; Δx – характерный размер ячейки в направлении нормали к поверхности контакта.

Проверка точности результатов, получаемых при решении системы уравнений (1)–(14) по разработанному алгоритму, выполнялась путем сравнения с известными из литературы данными. Отмечена быстрая сходимость алгоритма к решению задачи при малом числе ячеек по толщине оболочки.

Исследование контактного взаимодействия упругопластических тел выполнено на примере системы двух цилиндров, изображенных на фиг. 1 (ввиду симметрии относительно вертикальной плоскости показана половина изображения). Как видно из рисунка, система является существенно трехмерной, если цилиндры имеют конечную длину и несоосны, что обычно наблюдается в реальных условиях.

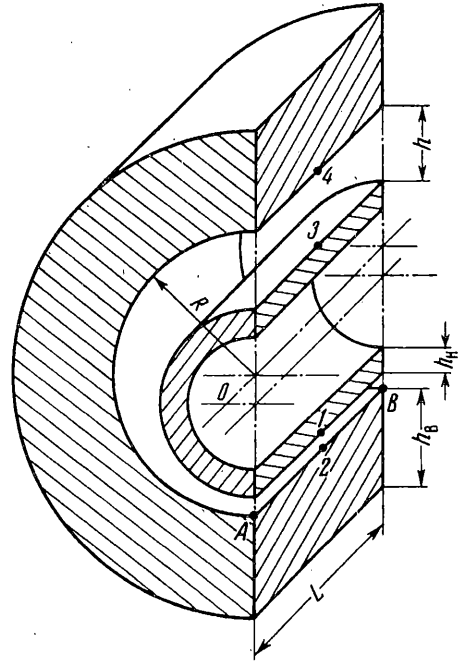
Влияние закона нагружения упругопластических цилиндров, начальной толщины зазора между ними h , толщины внутреннего слоя h_B , наличия в зазоре газа на рассматриваемый процесс исследовано на примере взаимодействия соосных бесконечно длинных цилиндров, равномерно нагруженных в осевом и окружном направлениях.

Нагрузка на внутренний цилиндр задавалась в виде экспоненциально убывающей зависимости $p = p_m \exp(-t/T)$.

Внешняя поверхность внешнего цилиндра не нагружена, материал цилиндров – алюминий.

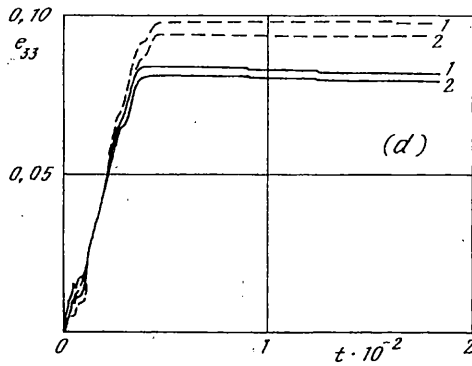
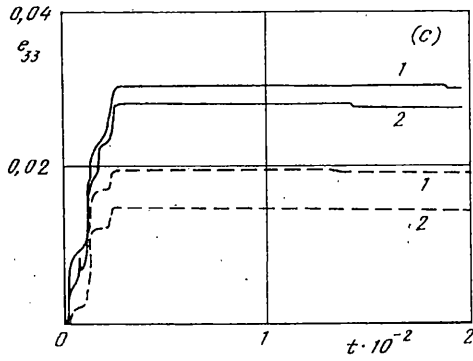
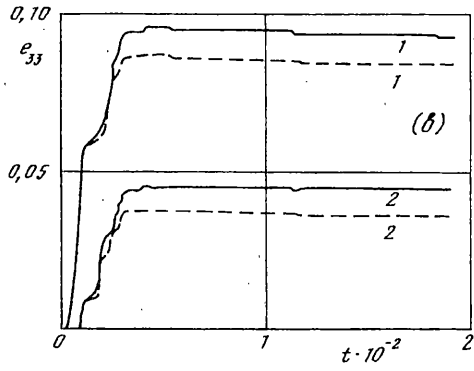
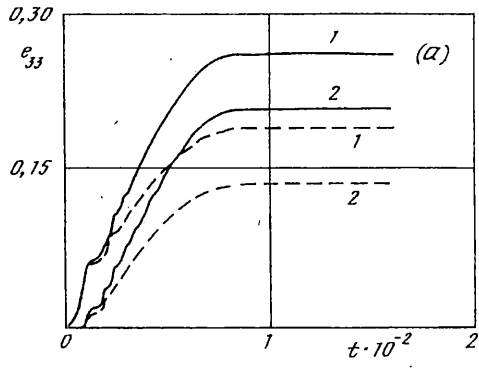
Влияние изменения нагрузки оценивалось в диапазоне значений параметра T : от $T \rightarrow \infty$ до $T = 40$ мкс. Этим предельным величинам соответствуют результаты, приведенные на фиг. 2, а и 2, б, где номера кривых совпадают с номерами точек на фиг. 1. Штриховыми линиями показаны зависимости, полученные при начальном давлении воздуха в зазоре $p_{\Gamma} = 0$, сплошными – при $p_{\Gamma} = 0,1$ МПа. Параметры системы имеют следующие значения: $R = 20$ мм, $h_H = 25$ мм, $h_B = 5$ мм, начальный зазор между цилиндрами $h_0 = 1$ мм.

Как и следовало ожидать, при уменьшении T остаточные деформации существенно (в 2,5–4 раза) уменьшаются, причем деформации внутреннего цилиндра изменяются в большей степени, чем внешнего.



Фиг. 1

Δx – характерный размер ячейки в направлении нормали к поверхности контакта.



Фиг. 2

Существенное влияние на процесс деформирования цилиндров оказывает величина начального зазора h_0 . Уменьшение h_p от 1 мм до 0,1 мм приводит к уменьшению остаточных деформаций в два – три раза. При этом более явно проявляется волновой характер взаимодействия цилиндров, приводящий к ступенчатому изменению деформаций (фиг. 2, *c*, $h_0 = 0,1$ мм, остальные параметры соответствуют фиг. 2, *a*), и деформации внутреннего и внешнего цилиндров становятся сравнимы по величине.

Уменьшение толщины внутреннего цилиндра в два раза ($h_B = 2,5$ мм, остальные параметры такие же, как в расчете, результаты которого приведены на фиг. 2, *b*) вызывает увеличение остаточных деформаций в 3–5 раз (фиг. 2, *d*). Деформации внутреннего и внешнего цилиндров отличаются на 15–20%.

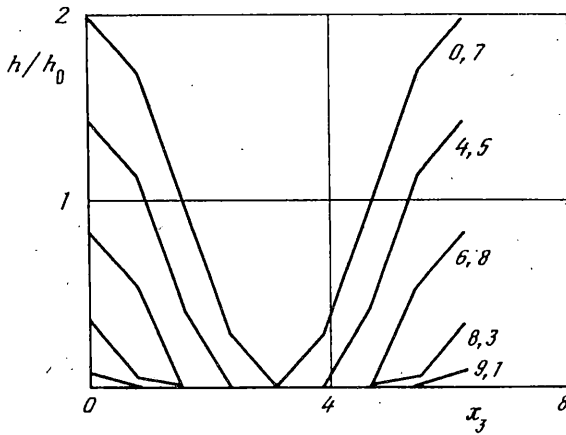
В большинстве случаев при реализации рассматриваемой схемы в экспериментах и производственной практике зазор между цилиндрами заполнен воздухом. Обычно исследователи пренебрегают этим обстоятельством, полагая влияние воздуха несущественным, поэтому при выполнении расчетов принимают допущение об отсутствии воздуха в зазоре. В связи с этим представляет интерес оценить влияние воздуха, находящегося в зазоре между соударяющимися телами, на примере схемы, приведенной на фиг. 1.

Учитывая, что, как правило, процессы контактного взаимодействия тел происходят в атмосферных условиях, полагали $p_r = 0,1$ МПа. Результаты расчета вариантов, аналогичных рассмотренным ранее, приведены на фиг. 2, *a* – 2, *d* сплошными линиями. Анализ полученных результатов свидетельствует о значительном влиянии воздуха на пластическое деформирование цилиндров [10]. Наличие воздуха в зазоре вызывает изменение пластических деформаций в пределах от 20 до 50%. Причем существенное значение имеют закон нагружения, величина зазора и толщина внутреннего цилиндра.

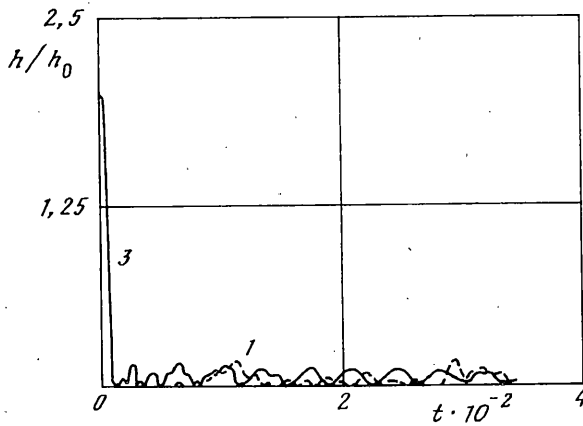
Наличие воздуха в зазоре при уменьшении толщины внутреннего цилиндра, вызывает уменьшение пластических деформаций. Причем, это изменение происходит быстрее, чем при отсутствии воздуха. В случае, если относительная толщина цилиндра $\bar{h}_B = h_B / R \approx 1/7$, величина пластических деформаций практически не зависит от наличия воздуха в зазоре. При $\bar{h}_B < 1/7$ пластические деформации меньше, а при $\bar{h}_B > 1/7$ больше, чем при отсутствии воздуха в зазоре. Это связано с непропорциональным изменением запасаемой слоем кинетической энергии ($\approx \bar{h}_B^2$) и силами сопротивления растяжению цилиндров ($\approx \bar{h}_B$). Поэтому, при уменьшении \bar{h}_B воздух в зазоре сообщает цилиндру импульс торможения при меньших давлениях воздуха, чем во время контактного торможения цилиндров при отсутствии воздуха, что, в свою очередь, вызывает уменьшение пластических деформаций внешнего цилиндра, тем самым ограничивая свободу деформирования внутреннего.

Воздух в зазоре между цилиндрами препятствует их непосредственному контакту, вызывая колебания величины зазора. При отсутствии в зазоре воздуха внутренний и внешний цилиндры остаются в контакте после ≈ 30 мкс от начала процесса деформирования. Величина контактного напряжения σ_{11} при этом колеблется около среднего значения 10 МПа. Наличие воздуха в зазоре примерно вдвое увеличивает среднее значение σ_{11} , но контакт цилиндров отсутствует.

Результаты, приведенные на фиг. 2, *a* – 2, *d*, получены в предположении, что цилиндры соосны и имеют неограниченную длину, что практически невозможно обеспечить в реальных процессах. Поэтому представляет интерес оценить, в какой мере эти допущения оправданы. Для этого рассмотрим контактное взаимодействие цилиндров конечной длины ($L = 60$ мм) при условии, что до начала нагружения они контактируют между собой по линии АВ (фиг. 1). Контактные поверхности цилиндров свободны от нагрузок. Остальные параметры соответствуют значениям, при которых получены результаты, приведенные на фиг. 2, *d* ($p_r = 0$). В такой постановке задача становится существенно трехмерной.



Фиг. 3



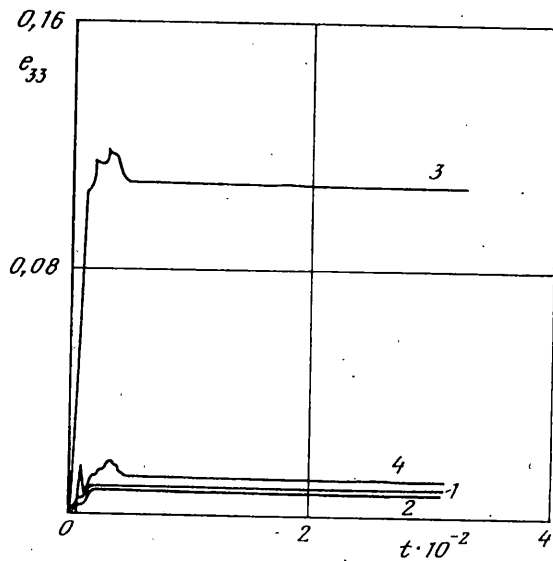
Фиг. 4

Как видно из фиг. 3, где изображена форма зазора между цилиндрами в направлении x_3 при $x_2 = L/2$ в различные моменты времени (x_1, x_2, x_3 — соответственно радиальная, осевая и угловая координаты; начало координат находится в точке 0 на фиг. 1), поверхности цилиндров полностью входят в контакт через 10 мкс после приложения нагрузки. Последним соприкасаются участки поверхностей с координатой $x_3 = \pi$, и здесь же наблюдается первое нарушение контакта.

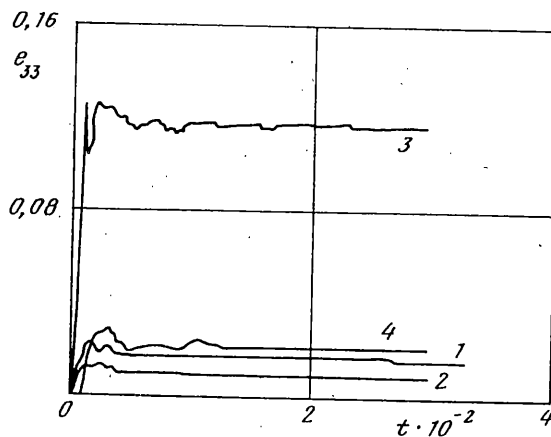
Первоначально величина зазора существенно изменялась в направлении оси x_3 . Но дальнейшее деформирование цилиндров приводит к уменьшению как величины зазора, так и зависимости h от x_3 (фиг. 4; 1 — относительный зазор при $x_2 = L/2, x_3 = \pi$; 3 — относительный зазор при $x_2 = L/2, x_3 = 2\pi$). То есть наблюдается процесс калибровки цилиндров.

Уменьшение зависимости величины зазора между цилиндрами от угла происходит за счет существенной неравномерности распределения остаточных деформаций (фиг. 5; номера кривых соответствуют номерам точек на фиг. 1). Как следует из рисунка, остаточные деформации в точках 1 и 3 отличаются на порядок. По отношению к ним деформации соосных цилиндров занимают промежуточное положение (фиг. 2, *d*).

В осевом направлении неравномерность распределения деформаций существенно меньше (фиг. 6; обозначения такие же, как на фиг. 5, но соответствуют сечению $x_2 = L$ в точках аналогичных точкам 1, 2, 3 и 4).



Фиг. 5



Фиг. 6

На основании полученных результатов можно заключить, что использование допущения о соосности цилиндров и конечности их длины дает лишь приближенные средние значения деформаций, которые тем ближе к действительности, чем меньше величина первоначального зазора между цилиндрическими слоями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Медведовский А.Л., Тарлаковский Д.В. Наклонный удар абсолютно твердого цилиндра по упругому полупространству // Изв. АН МТТ. 1994. № 1. С. 27–37.
2. Садырин А.И. Конечно-разностная аппроксимация граничных условий в динамической контактной задаче // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1979. Вып. 13. С. 51–56.
3. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. Новосибирск, 1987. 37 с. (Препринт / СО АН СССР. Ин-т теор. и прикл. механики; № 12–87).

4. *Иващенко К.Б.* Алгоритм расчета контактных границ при взаимодействии деформируемых твердых тел // Проблемы прочности. 1989. № 12. С. 79–82.
5. *Орешенков А.И., Головащенко С.Ф., Тихонов А.В.* Математическое моделирование процессов динамического формообразования тонкостенных деталей из листовых материалов и труб. Л., 1990. 47 с. (Препринт / Ленингр. филиал ин-та машиноведения. № 37).
6. *Барбашова Г.А., Жирнов М.В., Косенков В.М.* Контактные задачи упругопластического деформирования оболочек и пластин, нагружаемых электрическим разрядом в воде // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий. Киев: Наук. думка, 1995. Вып. 2. С. 37–41.
7. *Лучко И.А., Плаксий В.А., Ремез Н.С. и др.* Механический эффект взрыва в грунтах/Под ред. И.А. Лучко. Киев: Наук. думка, 1989. 232 с.
8. *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
9. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 502 с.
10. *Ковалев В.Г., Косенков В.М.* Влияние газового слоя на динамическое контактное взаимодействие упругопластических цилиндрических слоев // Тез. докл. Всерос. симпоз.: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. М.: РИЦ МГАТУ, 1995. С. 28–29.

Николаев

Поступила в редакцию
1.VIII.1995