

УДК 539.214

© 1997 г. А.М. АЛИМЖАНОВ

### УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ИСКРИВЛЕННОЙ ТРУБЫ

Определение несущей способности элементов различных инженерных сооружений (облицовок туннелей, монолитных крепей шахтных стволов, магистральных трубопроводов и так далее) зачастую связано с расчетом толстостенных цилиндрических труб. Вместе с тем, в условиях практики возникает необходимость оценки несущей способности толстостенной трубы, ось которой на некоторых участках может иметь тот или иной радиус кривизны. Задача установления закономерностей формирования упругопластического напряженного состояния материала искривленной трубы является пространственной задачей упругопластического равновесия тела, решение которой связано со значительными трудностями математического характера. Эта задача еще больше усложняется в случае пластической неоднородности материала, связанной с накоплением повреждений в зоне неупругих деформаций (ЗНД) в результате внешних воздействий (роста внутреннего или внешнего давления, разупрочняющего воздействия агрессивных сред и так далее). В работе показана возможность определения упругопластического напряженного состояния искривленной трубы в линеаризированной постановке.

Толстостенная искривленная труба моделируется вращением кольца (поперечного сечения трубы) радиусов  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости кольца.

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} - \frac{\sigma_r \cos \theta}{C} + \frac{\tau_{r\theta} \sin \theta}{C} + \frac{\sigma_z \cos \theta}{C} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_\theta \sin \theta}{C} - \frac{\sigma_z \sin \theta}{C} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\tau_{r\theta} \cos \theta}{C} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

$$C = l^* - r \cos \theta, \quad l^* = l/b, \quad r = r/b$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты;  $l$  – расстояние от центра трубы до оси вращения.

Полагая  $\delta = 1/l^*$  и пренебрегая членами, содержащими  $\delta^2$  по сравнению с единицей, решение задачи вблизи искривленной трубы найдем в виде

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \delta \sigma'_r, \dots, \quad u_r = u_r^0 + \delta u'_r, \dots \quad (2)$$

Подставляя разложение (2), в условие пластичности Треска–Сен-Венана, и в уравнения (1) получим

$$\sigma'_{[r]} = \sigma'_{[\theta]} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} - \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0) \cos \theta}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau'_{\rho\theta}}{\rho} - \frac{(\sigma_{\theta}^0 - \sigma_{\rho}^0) \sin \theta}{2} = 0$$

За нулевое приближение примем напряженное состояние пластически неоднородной прямолинейной цилиндрической трубы при условии пластичности Треска – Сен-Венана, найденное в [1]:

$$\sigma_{[\rho]}^0 = 2K \ln \frac{\rho}{\alpha} + 2(K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ \ln \frac{\rho}{\alpha} + \frac{1}{n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n - \frac{1}{n} \left( \frac{\rho_0}{\alpha} \right)^n \right] + q$$

$$\sigma_{[\theta]}^0 = 2K \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + 2(K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ 1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} + \frac{1-n}{n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n - \frac{1}{n} \left( \frac{\rho_0}{\alpha} \right)^n \right] + q$$

$$\tau_{[\rho\theta]}^0 = 0, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_{[\rho]}^0 \\ \sigma_{[\theta]}^0 \end{matrix} \right\} = K\rho_0^2 (1 \mp \rho^{-2}) + P, \quad \tau_{[\rho\theta]}^0 = 0 \quad (5)$$

где  $\rho_0 = r_0/b$ ,  $r_0$  – радиус ЗНД для прямолинейной цилиндрической трубы;  $K$  – значение прочностной характеристики неповрежденного (целого) материала;  $K_0$  – минимальное значение прочностной характеристики поврежденного материала, что соответствует повышенному уровню накопленных повреждений на внутренней поверхности цилиндрической трубы при максимальном развитии ЗНД (т.е. когда эта зона выходит на внешнюю поверхность);  $\alpha = a/b$ ,  $P$  и  $q$  – соответственно внешнее и внутреннее давление на трубу,  $n$  – параметр аппроксимации.

Здесь круглыми скобками у индексов отмечены компоненты, относящиеся к области упругих деформаций (ОУД), а квадратными – к ЗНД. В [1] подробно показаны закономерности изменения прочностных характеристик в материале трубы в ЗНД в зависимости от различных геометрических и физических параметров.

Уравнения (4) определяющие напряжения в ЗНД, с учетом (3) и (5), примут вид

$$\frac{\partial \sigma'_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \left( K + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n \right] \right) \cos \theta = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{\rho}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \left( K + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n \right] \right) \sin \theta = 0$$

Полагая  $\sigma'_{[\rho]} = f(\rho) \cos \theta$ ,  $\tau'_{[\rho\theta]} = \psi(\rho) \sin \theta$  и подставляя эти выражения в (6), получим уравнения

$$f'(\rho) + \frac{\psi(\rho)}{\rho} + K + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n \right] = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{1}{\rho} f(\rho) + \psi'(\rho) + \frac{2\psi(\rho)}{\rho} + K + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n \right] = 0$$

Решая систему (7), получим выражение для функций  $f(\rho)$  и  $\psi(\rho)$ . Компоненты  $\sigma'_{[\rho]}$ ,

$\sigma'_{[\theta]}$ ,  $\tau'_{[\rho\theta]}$  примут вид

$$\begin{aligned}\sigma'_{[\rho]} &= \left[ \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} (\ln \rho + 1) - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left( \frac{1}{2-n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n - \frac{1}{2} \right) \rho \right] \cos \theta \\ \sigma'_{[\theta]} &= \left[ \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} (\ln \rho + 1) - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left( \frac{1}{2-n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n - \frac{1}{2} \right) \rho \right] \cos \theta \\ \tau'_{[\rho\theta]} &= \left[ \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} \ln \rho - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left( \frac{1}{2-n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n - \frac{1}{2} \right) \rho \right] \sin \theta\end{aligned}\quad (8)$$

При  $n = 2$  имеем

$$\begin{aligned}\sigma'_{[\rho]} &= \left[ \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} (\ln \rho + 1) - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \left( \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \rho \right] \cos \theta \\ \sigma'_{[\theta]} &= \left[ \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} (\ln \rho + 1) - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \left( \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \rho \right] \cos \theta \\ \tau'_{[\rho\theta]} &= \left[ \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} \ln \rho - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{\rho}{2} \right] \sin \theta\end{aligned}\quad (9)$$

Отметим, что полученное решение при  $K = K_0$  (в случае однородности пластических свойств материала трубы) переходит в решение, ранее полученное в [2].

Решение задачи в ОУД ищется, исходя из перемещений  $u = U(\rho) \cos \theta$ ,  $v = V(\rho) \sin \theta$ . Полагая материал несжимаемым, имеем для рассматриваемого случая уравнение [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{U}{\rho} + \frac{\partial V}{\rho \partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \cos \theta = 0 \quad (10)$$

где  $\mu$  – постоянная, определяемая из решения осесимметричной задачи.

Тогда

$$\sigma'_{(\rho)} - \sigma'_{(\theta)} = 4G \frac{dq}{d\rho} \cos \theta, \quad \tau'_{(\rho\theta)} = G \left[ \rho \frac{d^2 q}{d\rho^2} + \frac{dq}{d\rho} \right] \sin \theta \quad (11)$$

где  $G$  – модуль сдвига породы.

Используя (4), (5) и (11), получим уравнение для определения  $q(\rho)$ :

$$\rho^3 \frac{d^4 q}{d\rho^4} + 6\rho^2 \frac{d^3 q}{d\rho^3} + 3\rho \frac{d^2 q}{d\rho^2} - 3 \frac{dq}{d\rho} = 0 \quad (12)$$

Решение его имеет вид  $q(\rho) = C_3 \rho^2 + C_4 \ln \rho + C_5 / \rho^2 + C_6$ . Окончательно имеем для  $\sigma'_{(\rho)}$ ,  $\sigma'_{(\theta)}$ ,  $\tau'_{(\rho\theta)}$ :

$$\sigma'_{(\rho)} = 4G \left[ C_3 \rho - \frac{C_4}{\rho} + \frac{C_5}{\rho^3} + \frac{K\rho_0^2}{4G\rho} \right] \cos \theta$$

$$\sigma'_{(\theta)} = 4G \left[ 3C_3\rho - \frac{C_5}{\rho^3} + \frac{K\rho_0^2}{4G\rho} \right] \cos \theta \quad (13)$$

$$\tau'_{(\rho\theta)} = 4G \left( C_3\rho + \frac{C_5}{\rho^3} \right) \sin \theta$$

Граничные условия

$$\sigma'_{(\rho)} = 0, \quad \tau'_{(\rho\theta)} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \quad \rho = 1 \quad (14)$$

Поскольку радиус ЗНД ищем в виде

$$\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1 \quad (15)$$

то условия сопряжения напряжений примут вид

$$\sigma'_{[\rho]} = \sigma'_{(\rho)}, \quad \tau'_{[\rho\theta]} = \tau'_{(\rho\theta)} \quad (16)$$

$$\sigma'_{[\theta]} + \frac{d\sigma'_{[\theta]}}{d\rho} \rho_1 = \sigma'_{(\theta)} + \frac{d\sigma'_{(\theta)}}{d\rho} \rho_1 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0$$

Из (8), (13), (14) и (15) следует, что

$$C_1 = \frac{K\alpha^2}{2} - (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left( \frac{\alpha^2}{2-n} \left( \frac{\rho_0}{\alpha} \right)^n - \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (17)$$

$$C_2 = 0; \quad C_3 = -C_5; \quad C_4 = \frac{1}{4} K \rho_0^2 / G$$

$$C_3 = \frac{\rho_0^2}{4G(\rho_0^2 - 1)} \left( \frac{K}{2} (\alpha^2 - \rho_0^2) + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left( \frac{\rho_0^2 n}{2(2-n)} - \frac{\alpha^2}{2-n} \left( \frac{\rho_0}{\alpha} \right)^n - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right)$$

$$\rho_1 = \frac{C_1}{\rho} - \frac{K\rho}{2} + (K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left( \frac{\rho^2}{2-n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n - \frac{\rho^2}{2} \right) -$$

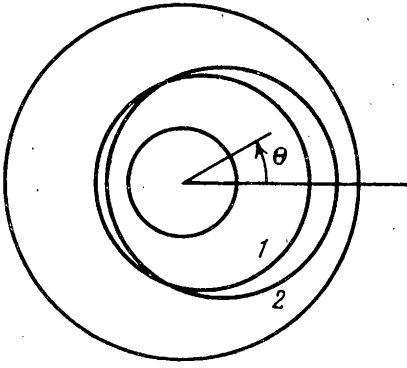
$$-4G \left( \frac{C_3(3\rho^4 + 1)}{\rho^3} + \frac{K\rho_0^2}{4G\rho} \right) / \frac{2(K_0 - K)}{\rho} \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \times$$

$$\times \left( \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1-n}{\rho} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n \right) - \frac{2K}{\rho} \left( \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - \alpha \right) \cos \theta$$

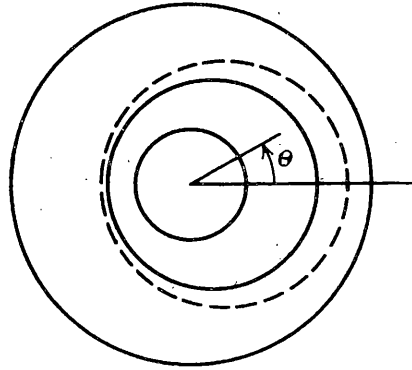
Таким образом, если известны значения  $a$ ,  $b$ , величины давлений  $P$  и  $q$  на трубу, ее прочностные характеристики, а также параметры, определяющие степень поврежденности материала в ЗНД, то внешний контур ЗНД определяется из уравнения (15), используя соотношение для определения радиуса ЗНД  $\rho_0$  пластически неоднородной цилиндрической неискривленной трубы [1]:

$$2K \ln \frac{\rho_0}{\alpha} + 2(K_0 - K) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \left[ \ln \frac{\rho_0}{\alpha} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left( \frac{\rho_0}{\alpha} \right)^n \right] + K(1 - \rho_0^2) - P + q = 0 \quad (18)$$

Из (17) следует, что при  $\theta = 0$  значение  $\rho_1 > 0$ . Это свидетельствует о том, что ЗНД стремится достичь внешней поверхности искривленной трубы в точках, лежащих на минимальном расстоянии от оси вращения. На фиг. 1 показаны конфигурации ЗНД в поперечном сечении однородной ( $K_0 = K$ ) искривленной трубы при различных значениях



Фиг. 1



Фиг. 2

$l^*$  (контур 1 соответствует значению  $l^* = 4$ ,  $2 - l^* = 3$ ). Таким образом, чем меньше радиус искривления  $l^*$ , тем большее развитие получает ЗНД в сторону оси вращения.

При наличии пластической неоднородности размеры ЗНД будут значительно больше. Это приводит к тому, что в случае пластической неоднородности толстостенная искривленная труба потеряет свою несущую способность раньше, при прочих равных условиях, чем пластически однородная.

На фиг. 2 показаны конфигурации ЗНД для случая  $l^* = 4$  при отсутствии (сплошной контур) и наличии (штриховой контур) пластической неоднородности, когда  $K_0 = 0,2 K$ ,  $n = 3$ . Из фиг. 2 следует, что пластическая неоднородность оказывает наибольшее влияние на размеры ЗНД в точках, лежащих на минимальном расстоянии от оси вращения и наименьшее – в точках, лежащих на максимальном расстоянии от оси вращения. Расчеты проведены при следующих данных:  $q = 0$ ,  $P = 4$  МПа;  $K = 2,2$  МПа,  $\alpha = 0,33$ .

Отметим, что при  $l^* \rightarrow \infty$  полученное решение переходит в решение (5) для пластически неоднородной прямолинейной цилиндрической трубы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимжанов М.Т. О накоплении повреждений и несущей способности элементов толстостенных конструкций // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. 1992. № 1. С. 58–64.
2. Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. Уругопластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 6. С. 45–51.

Алма-Ата

Поступила в редакцию  
14.II.1995