МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 539.214;539.374

© 1997 г. $\boxed{\text{В.В. МУЛЮКОВ}}$, П.В. ТРУСОВ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ В ТЕРМИНАХ ОТСЧЕТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Построение математических моделей процессов деформирования металлов возможно на основе описания движения сплошной среды как в терминах текущей конфигурации, так и в терминах отсчетной конфигурации. Последний вариант имеет ряд достоинств (например, неизменность исследуемой области, в силу чего облегчается исследование обобщенного решения на существование и единственность и так далее) и в ряде задач является более предпочтительным.

1. Введение. Публикуемая работа посвящена разработке некоторых из наиболее важных проблем, возникающих при построении соотношений геометрически нелинейной теории пластичности, т.е. теории, в которой градиенты перемещений не полагаются малыми. К указанным проблемам относятся: выбор способа описания движения тела и связанный с этим выбор мер напряженного и деформированного состояний, обеспечивающий корректный учет конечных поворотов; математическая постановка задачи, формулировка и выполнение условий, определенных требованиями существования и единственности обобщенного решения; формулировка определяющих соотношений, согласованных с фундаментальными термодинамическими положениями. Будем пользоваться отсчетным лагранжевым описанием квазистатического формоизменения упругопластического тела, записывая все соотношения в терминах отсчетной конфигурации. При постановке задачи теории пластичности при больших деформациях в альтернативной форме, то есть в терминах актуальной (текущей) конфигурации (см., например, [1–3]) возникает проблема выбора одной из многих коротационных производных, удовлетворяющих принципу индифферентности. Указанная проблема в силу ее сложности не имеет к настоящему времени однозначного решения. Современное состояние этого вопроса и варианты решения даны в [1–3]. Подобная проблема не возникает при записи соотношений в терминах отсчетной конфигурации с использованием инвариантных по отношению к наложенному жесткому движению мер и их производных по времени [4, 5], также инвариантных по отношению к наложенному жесткому движению, поскольку в этом случае в качестве скоростей изменения мер напряженного и деформированного состояний используется материальная производная по времени.

Для краткости принята символьная форма записи тензоров и операций над ними: векторы и тензоры выделяются жирным шрифтом, причем для векторов приняты строчные, для тензоров второго ранга и выше – прописные буквы. Точкой между символами обозначается скалярное произведение. Диадное (внутреннее) произведение векторов ничем не помечается. Определение используемых функциональных пространств и их норм можно найти в [6].

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим изотермическую нестационарную квазистатическую задачу деформирования твердого тела при больших пластических деформациях. Рассматриваемое тело в отсчетной конфигурации занимает область Ω трехмерного евклидова пространства $R^3(\Omega \subset R^3)$, с границей $S(\overline{\Omega} = \Omega \cup S)$. Нагружение заключается в приложении объемных $\mathbf{f}(\tau)$ и поверхностных $\mathbf{t}(\tau)$ сил, действующих на части граничной поверхности S_t. Здесь и далее τ обозначает параметр нагружения. Моменту $\tau = 0$ соответствует ненапряженное и недеформированное состояние тела; его конфигурация в этот момент принимается за отсчетную. Необходимо в каждый момент $\tau \in [0, T]$ определить решение системы уравнений, в которую входят:

уравнение равновесия

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{r} \in \Omega \tag{2.1}$$

определяющее соотношение

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_1\left(\mathbf{d}_i^\tau, \mathbf{r}\right) : \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{R}_1\left(\mathbf{d}_i^\tau, \mathbf{r}\right), \quad \mathbf{r} \in \overline{\Omega} \tag{2.2}$$

и граничные условия

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{t}(\tau), \quad \mathbf{r} \in S_t \tag{2.3}$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} \in S_v \tag{2.4}$$

где $\overset{\circ}{\nabla} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^i \partial / \partial \xi^i$ – набла-оператор, определенный в отсчетной конфигурации (см., например, [7]); $\mathbf{P}$ – первый тензор напряжений Пиола – Кирхгоффа; $\mathbf{d}_i = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ – проекция градиента скорости на ось базисного вектора e_i (в актуальной конфигурации); $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ – единичный вектор нормали к поверхности S_t при $\tau = 0$; $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}(\tau)$ – поле скоростей, заданное по части границы S_v $(S_t \cup S_v = S)$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{t}$ – интенсивности нагрузок, отнесенные соответственно к единице объема и единице площади в отсчетной конфигурации (номинальные усилия). Векторные функции $\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{f}, \mathbf{t}$ будем считать непрерывными в области их определения для любого $\tau \in [0, T]$. Вид тензоров упругопластических характеристик четвертого ранга $\mathbf{C}_1(\mathbf{d}_i^\tau, \mathbf{r})$ и второго ранга $\mathbf{R}_1(\mathbf{d}_i^\tau, \mathbf{r})$ зависит от принятой теории пластичности и способа ее обобщения на конечные деформации. Тензоры $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{R}_1$ в общем случае являются функционалами предшествующей истории деформации, на что указывает верхний индекс (τ) в аргументах. Предполагаем, что область Ω и граница S удовлетворяют условиям гладкости, необходимым для формулировки граничных условий в форме (2.3), (2.4) [8].

Классическим решением краевой задачи (2.1)–(2.4) будем называть определенную в цилиндре $\overline{D} = \overline{\Omega} \times [0, T] = \{(\mathbf{r}, \tau) | \mathbf{r} \in \overline{\Omega}, \quad \tau \in [0, T]\}$ совокупность тензорных функций $\{\mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau), \ \mathbf{P}(\mathbf{r}, \tau)\}$, удовлетворяющих следующим требованиям: $v^i \in C^{1,0}(\overline{D})$, $P^{ik} \in C^{1,0}(\overline{D})$ $(i, k = 1, 2, 3)$; уравнения (2.1) выполняются для всех $(\mathbf{r}, \tau) \in \Omega \times [0, T]$, уравнения (2.2) выполняются для всех $(\mathbf{r}, \tau) \in \overline{D}$; краевые условия (2.3) и (2.4) выполняются для всех $(\mathbf{r}, \tau) \in (S_t \cup S_v) \times [0, T]$.

Разрешимость задачи (2.1)–(2.4) в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций существенно зависит от гладкости границы S и регулярности функций $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{R}_1$ [6, 8]. Существующий в настоящее время математический аппарат не дает возможности получить классическое решение рассматриваемой задачи в достаточно общем случае. Поэтому рассмотрим обобщенное (слабое) решение задачи. Переход к некоторой расширенной функционально-аналитической постановке краевой задачи, с формулировкой обобщенного решения, допускает при менее жестких требованиях к функциям $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{R}_1$ изучение краевых задач при помощи методов вычислительной математики.

Как показано в ряде работ [3, 9], функционально-аналитическая постановка для краевой задачи вида (2.1)–(2.4) может быть записана в виде операторного уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{2.5}$$

с оператором $\mathbf{A}$, действующим из рефлексивного банахова пространства V в сопряженное пространство V^*, при условии, что функции $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{R}_1$ удовлетворяют следующим требованиям: $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} : \mathbf{C}_1 \in \mathbf{CAR}(p)$, $\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{R}_1 \in \mathbf{CAR}(p)$, $p > 1$.

Для некоторой функции $a(\mathbf{d}_i, \mathbf{r})$ запись $a \in \mathbf{CAR}(p)$ означает, что:

1. Некоторая функция $a(\mathbf{d}_i, \mathbf{r})$, определенная для почти всех $\mathbf{r} \in \Omega^\circ \subset R^N$ и для всех $\mathbf{d}_i \in R^m$ (в данном случае $m = N \cdot N$), обладает свойством Каратеодори ($a \in \mathbf{CAR}$), т.е. для всех $\mathbf{d}_i \in R^m$ функция $a_d(\mathbf{r}) = a(\mathbf{d}_i, \mathbf{r})$ измерима на Ω как функция переменной $\mathbf{r}$ и для почти всех $r \in \Omega^\circ$ функция $a_r(d_{ij}) = a(d_{ij}, \mathbf{r})$ является непрерывной в R^m по переменным d_{ij};

2. Существует функция $g \in L_q(\Omega^\circ)$ и константа $C \geqslant 0$, такие, что a удовлетворяет условию полиноминального роста $\left|a(\mathbf{d}_i, \mathbf{r})\right| \leqslant g(\mathbf{r}) + C \sum\limits_{i,j=1}^{3} \left|d_{ij}\right|^{p-1}$, в котором $q = p/(p-1)$.

Введем в рассмотрение линейное множество U функций $\mathbf{h}(\mathbf{r}, \tau)$, определенных в D и таких, что $\mathbf{h}|_{S_\upsilon} = \mathbf{0}$, т.е. $U = \{\mathbf{h} \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, \infty]);\ \mathbf{h}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{0}$ для $(\mathbf{r}, \tau) \in (S_\upsilon \times [\mathbf{0}, \infty])\}$.

Обозначим V замыкание множества U по норме $\|\cdot\|_{W_p^1}$ пространства Соболева $W_p^1(D)$, тогда можно показать, что $V = \{\mathbf{h} \in W_p^1(D);\ \mathbf{h}(\mathbf{r}, \tau) \in (S_\upsilon \times [0, \infty])\}$. Здесь равенство $\mathbf{h}(\mathbf{r}, \tau) = 0$ на границе S_υ следует понимать в смысле следов.

Пусть, наконец, граница S области и функция $\hat{\mathbf{v}}$ допускают продолжение $\hat{\mathbf{v}}$ в Ω в виде вектор-функции $\mathbf{w}$ из $W_p^1(\Omega \times [0, \infty])$. Функция $\mathbf{v} \in W_p^1(\Omega \times [0, \infty])$ является слабым решением краевой задачи (2.1)–(2.4), если $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in V$; $\forall \mathbf{h} \in V$:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left(\mathbf{C}_1 : \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} \right) : \left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{h} \right)^T + \mathbf{R}_1 : \left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{h} \right)^T \right] d\omega = \int\limits_{S} \mathbf{t} \cdot \mathbf{h}\, ds \tag{2.6}$$

Таким образом, граничное условие (2.4) удовлетворяется за счет выбора класса функций, на котором ищется решение, уравнения (2.1), (2.3) удовлетворяются в обобщенном смысле, определяющее соотношение (2.2) выполняется точно. Переход от классического к обобщенному решению позволил понизить порядок производных искомых функций, обобщенное решение рассматриваемой здесь задачи упругопластичности включает обобщенные производные по пространственным переменным не выше первого порядка.

Полагая, что существуют и единственны как обобщенное, так и классическое решение поставленной задачи упругопластичности (2.1)–(2.4), можно доказать ряд теорем.

Теорема 1. Классическое решение задачи (2.1)–(2.4) является также ее обобщенным решением.

Теорема 2. При удовлетворении требований на гладкость обобщенного решения $\mathbf{v}(\mathbf{v} \in C^2)$ последнее является также классическим решением задачи (2.1)–(2.4).

Для доказательства этих теорем может быть использована формула Грина или теорема Остроградского – Гаусса. Доказательства аналогичных теорем, сформулированных для постановок в терминах текущей конфигурации, приведены в монографии [3].

В дальнейшем обобщенное решение будем искать в классе функций $W_2^1(\Omega)$, т.е. предполагая $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} : \mathbf{C}_1 \in \mathbf{CAR}(2)$, $\quad \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_1 \in \mathbf{CAR}(2)$.

3. Условия существования и единственности обобщенного решения задачи. Вопросы существования и единственности обобщенного решения задач геометрически нелинейной теории упругости и пластичности рассматривались в [10–13]. Для доказательства существования и единственности слабого решения в этих работах используется вариационный подход, т.е. формулируются ограничения, обеспечивающие потенциальность нелинейного оператора, входящего в уравнение обобщенного решения. Условия потенциальности нелинейного оператора, в свою очередь, ведут к существенным ограничениям на вид определяющих соотношений (например, требование существования потенциала пластического течения), что, в конечном итоге, ограничивает возможности модели в исследовании сложного упруго-пластического деформирования. Другой подход, известный как топологический метод, позволяет сформулировать условия существования и единственности при менее строгих ограничениях на коэффициенты нелинейного оператора.

Опираясь на теорему Браудера можно сформулировать условия существования обобщенного решения рассматриваемой задачи.

Теорема Браудера. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, и $\mathbf{B}$ – оператор, действующий из X в X^*. Пусть также выполнены следующие условия:

a) $\mathbf{B}$ ограничен;

b) $\mathbf{B}$ деминепрерывен, т.е. для любого $\mathbf{u}_0 \in X$ и любой последовательности $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства X таких, что $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}_0$ в X имеем $\mathbf{B}\mathbf{u}_n \to \mathbf{B}\mathbf{u}_0$ в X^*;

c) $\mathbf{B}$ коэрцитивен;

d) $\mathbf{B}$ монотонен в X.

Тогда уравнение $\mathbf{Bu} = \mathbf{f}$ имеет, по крайней мере, одно решение при $\mathbf{f} \in X^*$.

Если к тому же $\langle \mathbf{Bu} - \mathbf{Bv},\ \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle > 0$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, то уравнение $\mathbf{Bu} = \mathbf{f}$ имеет единственное решение $\forall \mathbf{f} \in X^*$.

Условия (*a*) и (*b*) теоремы Браудера будут выполнены, если коэффициенты уравнения удовлетворяют условию полиномиального роста

$$\mathbf{C}_1 : \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} \in \mathbf{CAR}(2), \qquad \mathbf{R}_1 : \left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{h}\right)^T \in \mathbf{CAR}(2)$$

Условие (*d*) будет выполнено, если функции $C_{1\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ удовлетворяют условию монотонности

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\sum_{\beta=1}^{3} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j C_{1\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)\cdot \mathbf{d}_\beta - \sum_{\beta=1}^{3} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j C_{1\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\cdot \mathbf{b}_\beta\right]\cdot [\mathbf{d}_\alpha - \mathbf{b}_\alpha] \geqslant 0$$

для всех $\mathbf{d}_i, \mathbf{b}_i \in R^3$ и почти всех $\mathbf{r} \in \Omega^\circ \subset R^3$.

Условие (*c*) теоремы Браудера будет выполнено, если коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему равенству:

$$\lim_{\|\mathbf{v}\|_{W_2^1} \to \infty} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_{W_2^1}}\left[\int_{\Omega^\circ}\left[\mathbf{C}_1\left(\overset{\circ}{\nabla}(\mathbf{v}+\mathbf{w})\right) : \overset{\circ}{\nabla}(\mathbf{v}+\mathbf{w})\right] : \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\, d\omega + \int_{\Omega^\circ} (\overset{\circ}{\nabla}\cdot \mathbf{R}_1)\cdot \mathbf{v}\, d\omega\right] = \infty$$

Записанные условия позволяют сформулировать оценки, которые могут быть использованы для анализа приближенного решения непосредственно в численных алгоритмах. Так, условия полиномиального роста будут выполнены при

$R_i^{ji}(\mathbf{r}) \in W_2^1(\Omega)$, $\left|C_{1\alpha\cdot\cdot\beta}^{\cdot ij}(\mathbf{r};\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3)\right| \leqslant C$, $C>0$. Для выполнения условия монотонности достаточно, чтобы матрица составленная из компонент тензора

$$\mathbf{C}_2 = \left(C_{1_{i\alpha\gamma l}} \mathbf{e}^l \mathbf{e}^i + \frac{\partial C_{1_{i\alpha\beta j}}}{\partial d^{\gamma k}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j d_\beta^k \right) \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\gamma$$

вычисленных при любых $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \in R^9$ и почти для всех $\mathbf{r} \in \Omega°$, была положительно определена.

4. Определяющие соотношения геометрически нелинейной теории пластичности. В настоящей работе определяющие соотношения формулируются в терминах отсчетной конфигурации, с использованием инвариантных по отношению к наложенному жесткому движению мер напряжений и деформаций. При данной постановке задачи в качестве меры деформации наиболее целесообразным представляется использование тензора деформаций Генки $\mathbf{H} = \mathbf{L} : \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}$ (выражения для компонент $\mathbf{L}$ приведено в [9]), определенного в отсчетной конфигурации; выбор меры напряженного состояния не является однозначным.

В отличие от тензора Коши $\mathbf{S}$, тензоры, описывающие напряженное состояние в терминах отсчетной конфигурации (первый $\mathbf{P}$ и второй $\mathbf{K}$ тензоры напряжений Пиола – Кирхгоффа), не обладают ясным физическим смыслом. Для тензора $\mathbf{P}$ не удается записать достаточно простые соотношения, связывающие шаровую и девиаторную части этого тензора с гидростатическим давлением, которые используются во многих теориях пластичности в предположении об упругом изменении объема и пластическом формоизменении. Кроме того, тензор $\mathbf{P}$ несимметричен, что создает некоторые трудности в его использовании при решении прикладных задач. Уравнения равновесия, записанные с использованием тензора $\mathbf{K}$, нелинейны.

Ниже будет использоваться тензор напряжений $\mathbf{T}$, описывающий напряженное состояние в отсчетной конфигурации и определенный из энергетических соображений. Введем $\mathbf{T}$ как тензор, сопряженный к выбранной мере деформаций $\mathbf{H}$:

$$\dot{N} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{H}} \tag{4.1}$$

т.е. двойная свертка тензора $\mathbf{T}$ со скоростью тензора деформаций Генки $\dot{\mathbf{H}}$, определенного в отсчетной конфигурации, характеризует мощность напряжений единицы объема в отсчетной конфигурации $\dot{N}$. Несложно показать, что данный тензор связан с известными тензорами напряжений следующими соотношениями:

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}}^T + \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}^T \right) \tag{4.2}$$

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{K} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}}^T + \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}}^T \cdot \mathbf{K} \right) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{2}\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}}\left(\hat{\nabla} \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}}^T + \overset{\circ}{\nabla} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{r} \right) \tag{4.4}$$

Первый инвариант тензора $\mathbf{T}$ с точностью до множителя $\hat{\rho} / \overset{\circ}{\rho}$ совпадает с первым инвариантом $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} : \mathbf{E} = \left(\hat{\rho} / \overset{\circ}{\rho} \right) \mathbf{T} : \mathbf{E} \tag{4.5}$$

В настоящей работе уравнения состояния формулируются в терминах отсчетной конфигурации в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{R} \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) можно привести к виду (2.2). В этом случае тензоры $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{R}_1$, входящие в (2.2), связаны с $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$ следующими соотношениями: $\mathbf{C}_1 = C_{i \cdot k}^{\cdot j \cdot l} L_{l \cdot m}^{\cdot k \cdot n} L_{j \cdot r}^{\cdot j \cdot s} \mathbf{e}_s^{\circ} \mathbf{e}^{\circ t} \mathbf{e}^{\circ m} \mathbf{e}_n^{\circ}$, $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{R} : \mathbf{L})^T$.

Рассмотрим ограничения, накладываемые на тензоры упругопластических свойств общей теорией определяющих соотношений. Согласно принципу детерминизма и локального действия определяющие соотношения для простых материалов могут быть записаны в виде функционалов:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} = \mathbf{F}_S\left[\left(\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}}\right)^{\tau},\ \theta^{\tau}\right], \quad \eta = F_{\eta}\left[\left(\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}}\right)^{\tau},\ \theta^{\tau}\right] \\ &\varphi = F_{\varphi}\left[\left(\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}}\right)^{\tau},\ \theta^{\tau}\right], \quad \mathbf{q} = \mathbf{F}_q\left[\left(\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}}\right)^{\tau},\ \theta^{\tau}\right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\mathbf{T}$ – выбранная мера напряженного состояния, определенная в отсчетной конфигурации; φ – удельная свободная энергия; η – удельная энтропия; $\mathbf{q}$ – вектор теплового потока, определенный в отсчетной конфигурации; $\left(\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}}\right)^{\tau}$ – предыстория деформирования; θ^{τ} – предыстория изменения температуры; $\mathbf{F}_S$, F_{φ}, F_{η}, $\mathbf{F}_q$ – некоторые функционалы от указанных аргументов.

Градиент места $\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}}$ может быть представлен в виде:

$$\overset{\circ}{\nabla}\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} \tag{4.8}$$

где $\mathbf{R}$ – собственно ортогональный тензор; $\mathbf{U}$ – симметричный положительный определенный тензор.

Опираясь на принцип материальной индифферентности и используя инвариантность тензора напряжений $\mathbf{T}$, можно показать, что предыстория тензора $\mathbf{R}$ не оказывает влияние на напряженное состояние (теорема приведения Нолла). Таким образом, предыстория деформирования простых материалов может быть полностью описана с помощью левой меры искажений $\mathbf{U}$. На практике вместо тензора $\mathbf{U}$ используются производные от него тензоры деформации, например, тензор деформаций Генки $\mathbf{H} = \ln \mathbf{U}$.

Для дальнейшей конкретизации определяющих соотношений предположим, что функционалы $\mathbf{F}_S$, F_{φ}, F_{η}, $\mathbf{F}_q$ позволяют перейти от интегральной формы определяющих соотношений (4.7) к дифференциальной

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{H}, \theta, \alpha^j), \quad \varphi = \varphi(\mathbf{H}, \theta, \alpha^j), \quad \eta = \eta(\mathbf{H}, \theta, \alpha^j) \\ &\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{H}, \theta, \alpha^j), \quad \dot{\alpha}^j = A^j(\mathbf{H}, \theta, \alpha^j) \end{aligned} \tag{4.9}$$

т.е. что предыстория деформирования может быть описана тензором $\mathbf{H}$, скаляром θ и ограниченным набором функций α^j (внутренних параметров), удовлетворяющих некоторым эволюционным дифференциальным уравнениям.

Первый и третий законы термодинамики не накладывают каких-либо конструктивных ограничений на данные определяющие уравнения. Второй закон исключает процессы с отрицательной диссипацией энергии. Это условие сужает класс допустимых уравнений состояния, но не до желаемой степени. При формулировке конкретных определяющих соотношений законы термодинамики дополняют некоторыми гипотезами. Предположим, что:

1. Удельная свободная энергия представима в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi = \varphi_E(\mathbf{H}, \theta, \alpha^j) + \varphi_H(\theta, \alpha^j) \tag{4.10}$$

где φ_E – свяжем с обратимым деформированием, а φ_H – с изменением внутренней структуры материала.

2. Мощность механической работы можно разложить на следующие составляющие: $\dot{N} = \dot{N}_E + \dot{N}_H + \dot{N}_D$, где $\dot{N}_E = \mathbf{T}_E : \dot{\mathbf{H}}$ – необратимая составляющая; $\dot{N}_D = \mathbf{T}_D : \dot{\mathbf{H}}$ – диссипативная составляющая (часть механической энергии, перешедшей в тепловую во время пластического деформирования); $\dot{N}_H = \mathbf{T}_H : \dot{\mathbf{H}}$ – "запаянная" (или скрытая) энергия, которая расходуется на изменение внутренней структуры материала (накапливается в полях микронапряжений, соответствующих дефектам решетки).

3. Справедливо эволюционное уравнение для энтропии η (уравнение Гиббса – Циглера)

$$\mathring{\rho}\dot{u} = \mathring{\rho}\theta\dot{\eta} + \dot{N}_E + \dot{N}_H \tag{4.11}$$

Из этих предположений, воспользовавшись первым началом термодинамики, после несложных преобразований можно получить уравнения для напряжений $\mathbf{T}_E$, $\mathbf{T}_H$:

$$\mathbf{T}_E = \mathring{\rho}\frac{\partial\varphi_E(H, \theta, \alpha^i)}{\partial\mathbf{H}}, \quad \mathbf{T}_H = \mathring{\rho}\frac{\partial\varphi_H(\theta, \alpha^j)}{\partial\alpha^j}\frac{\partial\alpha^j}{\partial\mathbf{H}} \tag{4.12}$$

Для необратимых процессов схема описания, основанная на использовании термодинамических уравнений состояния, должна быть дополнена некоторыми предположениями, описывающими производство энтропии, зависящее от термодинамического процесса.

Сделаем следующее предположение: при заданном уровне напряжений в рассматриваемых процессах на множестве скоростей деформаций $\dot{\mathbf{H}}$, удовлетворяющих эволюционным уравнениям (4.9), максимум диссипации $N_D = \mathbf{T}_D : \dot{\mathbf{H}}$ достигается на истинных скоростях деформаций (принцип Г. Циглера). Проблема построения уравнений связи напряжений и деформаций сводится к отысканию решения следующей экстремальной задачи

$$\mathbf{T}_D(\mathbf{H}, \alpha^j) : \dot{\mathbf{H}} \to \max \tag{4.13}$$

с ограничениями в виде равенств

$$\dot{\alpha}^i = A^i(\mathbf{H}, \alpha^j) \tag{4.14}$$

Выбор внутренних параметров α^j, запись эволюционных уравнений (4.14) определяется сложностью исследуемого процесса, необходимостью описания отдельных эффектов деформирования. Например, предполагая существование некоторой поверхности текучести $F(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_D, \theta, \chi) = 0$, выбрав параметр упрочнения $\chi = \chi(\mathbf{H}^\tau)$, задав закон упругого деформирования $\dot{\mathbf{T}}_E = \mathbf{A}_E : \dot{\mathbf{H}}$ и закон изменения внутренних микронапряжений в виде $\dot{\mathbf{T}}_H = \mathbf{A}_H : \dot{\mathbf{H}}$, можем получить определяющие соотношения типа теории течения с анизотропным упрочнением. Аналогичные соотношения могут быть получены как следствие определения диссипативной функции

$$D = D(\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{H}, \theta, \alpha_j) \tag{4.15}$$

принципа максимума диссипации Г. Циглера и предположения, что функция D есть однородная функция первого порядка по компонентам $\dot{\mathbf{H}}$. Для описания более сложных процессов деформирования следует выбрать дополнительные внутренние параметры и, опираясь на результаты экспериментов или руководствуясь достаточно обоснованными предположениями, сформулировать для них эволюционные уравнения (4.14). Так, для процессов с траекторией деформаций средней кривизны в качестве дополнительных параметров можно взять кривизну траектории и угол запаздывания, а новое эволюционное уравнение записать исходя из гипотезы компланарности [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 231 с.
2. *Dafalias Y.F.* Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations. Pt 1. Kinematics // Acta mech. 1987. V. 69. No. 1–4. P. 119–138.
3. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
4. *Trusov P., Nyashin Y.* On the constitutive Ilyushin's theory relations for the case of large deformations. Pt 1 // J. Theor. and Appl. Mech. 1992. V. 23. No. 3. P. 65–74.
5. *Trusov P., Nyashin Y.* On the constitutive Ilyushin's theory relations. Pt 2 // J. Theor. and Appl. Mech. 1992. V. 23. No. 4. P. 63–86.
6. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
9. *Давыдов М.Г., Мулюков В.В., Трусов П.В.* Математическое моделирование и оптимизация процесса гидроформовки сферических сосудов // Металлургические и заготовительные производства: Процессы и машины. Свердловск: УрО АН СССР, 1992. С. 109–118.
10. *Reissner E.* Formulation of variational theorems in geometrically nonlinear elasticity // J. Eng. Mech. 1984. V. 110. No. 9. P. 1377–1390.
11. *Oden J.T., Whiteman J.R.* Analysis of some finite element methods for a class of problems in elastoplasticity // Intern. J. Eng. Sci. 1982. V. 20. No. 9. P. 977–988.
12. *Bufler H.* The principle of virtual displacements and the principle of virtual forces in the case of large deformations // Acta mech. 1984. V. 53. No. 1–2. P. 15–26.
13. *Bielski W., Telega J.J.* On existence of solutions for geometrically nonlinear shells and plates // ZAMM. 1988. Bd. 68. No. 4. S. 155–157.
14. *Ленский В.С., Ленский Э.В.* Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 111–115.

Пермь

Поступила в редакцию
22.VII.1994