

УДК 539.3

© 1997 г. М.Д. КОВАЛЕНКО, С.В. ШИБИРИН

СТЫК ДВУХ ПОЛУПОЛОС

Рассматривается плоская задача теории упругости о сопряжении (стыке) по торцам двух прямоугольных полуполос одинаковой ширины.

Среди различных подходов к решению такого рода задач отметим метод Винера – Хопфа, с помощью которого в ряде случаев удается получить точное, а в других – надежное приближенное решение [1–4].

Предлагаемый в настоящей работе метод базируется на обычной схеме представления решения в виде интегралов Фурье и рядов (в общем случае) однородных решений теории упругости [5]. Тогда неизвестные коэффициенты разложений должны быть найдены из условий на стыке полуполос. Однако, так как в разложениях при этом с каждой стороны участвуют полные и минимальные системы функций, то их объединения в условиях стыка уже не будут минимальными. Следовательно, прямое, явное определение коэффициентов разложений из этих условий невозможно.

Основная идея используемого в работе метода заключается в выделении из участвующих в разложениях на стыке полуполос неминимальных систем функций – базисных. К ним строятся биортогональные системы функций, с помощью которых явно определяются искомые коэффициенты разложений.

С целью упрощения выкладок были выбраны такие типы граничных условий по продольным сторонам полуполос, при которых в разложениях участвуют обычные тригонометрические системы функций. В более общем случае, когда в разложениях присутствуют однородные решения теории упругости, схема построения решения сохраняется. Сохраняются также и схемы доказательств теорем базисности, однако базисность при этом понимается не в классическом смысле, а в смысле статьи [6].

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости в бесконечной полосе $\{|y| \leq 1, |x| \leq \infty\}$ при следующих граничных условиях на продольных сторонах полосы

$$\begin{aligned} \text{а) } u(x, \pm 1) &= 0 & (x > 0) \\ \text{б) } \sigma_y(x, \pm 1) &= p^+(x) & (x > 0) \\ \text{в) } u(x, \pm 1) &= \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 & (x < 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u и v – соответственно, продольное и поперечное смещения.

Обозначим $p(x) \in L_2(R)$ – некоторое продолжение функции $p^+(x)$ на всю вещественную ось R . Нулевые граничные функции а) и в) в (1.1) будем считать продолженными нулем на R . После этого решения в левой $\{\Pi^-: x \leq 0, |y| \leq 1\}$ и правой $\{\Pi^+: x \geq 0, |y| \leq 1\}$ полуполосах будем искать в форме рядов и интегралов Фурье. Соответствующие представления для перемещений (без жесткого смещения) и напряжений в левой и правой полуполосах имеют вид

$$1) U = \frac{1-m}{2} A_0 x - \frac{1+m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k^2 + B_k q_k + B_k q_k^2 x) e^{q_k x} \cos q_k y$$

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+m}{2} A_k q_k^2 + 2B_k q_k + \frac{1+m}{2} B_k q_k^2 x \right) e^{q_k x} \sin q_k y$$

$$\sigma_x = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)A_k q_k^3 + 2B_k q_k^2 + (1+m)B_k q_k^3 x] e^{q_k x} \cos q_k y \quad (1.2)$$

$$\sigma_y = mA_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)A_k q_k^3 + 2(2+m)B_k q_k^2 + (1+m)B_k q_k^3 x] e^{q_k x} \cos q_k y$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)A_k q_k^3 + (3+m)B_k q_k^2 + (1+m)B_k q_k^3 x] e^{q_k x} \sin q_k y, \quad q_k = k\pi$$

$$2) \cdot U = -\frac{1+m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k p_k^2 + b_k p_k + b_k p_k^2 x) e^{p_k x} \cos p_k y + U^0$$

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+m}{2} a_k p_k^2 + 2b_k p_k + \frac{1+m}{2} b_k p_k^2 x \right) e^{p_k x} \sin p_k y + V^0$$

$$\sigma_x = -\sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)a_k p_k^3 + 2b_k p_k^2 + (1+m)b_k p_k^3 x] e^{p_k x} \cos p_k y + \sigma_x^0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)a_k p_k^3 + 2(2+m)b_k p_k^2 + (1+m)b_k p_k^3 x] e^{p_k x} \cos p_k y + \sigma_y^0$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)a_k p_k^3 + (3+m)b_k p_k^2 + (1+m)b_k p_k^3 x] e^{p_k x} \sin p_k y + \tau^0, \quad p_k = -\frac{2k-1}{2}\pi$$

В формулах (1.2), (1.3) введены следующие обозначения: $U = Gu$, $V = Gv$, G – модуль сдвига, m – коэффициент Пуассона. Градусом помечены соответствующие факторы решения в интегралах Фурье для бесконечной полосы с граничными условиями $U(x, \pm 1) = 0$, $\sigma_y(x, \pm 1) = p(x)$.

Это решение легко находится, поэтому будем считать его известным.

2. Перейдем к вопросу об определении искомых коэффициентов разложений $\{A_k, B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Они должны быть найдены из условий непрерывности перемещений U, V и напряжений σ_x, τ_{xy} на стыке полуполос $\{\Gamma: x = 0, |y| < 1\}$:

$$a) \quad U^-(0, y) = U^+(0, y), \quad b) \quad V^-(0, y) = V^+(0, y)$$

$$c) \quad \sigma_x^-(0, y) = \sigma_x^+(0, y), \quad d) \quad \tau_{xy}^-(0, y) = \tau_{xy}^+(0, y). \quad (2.1)$$

Значками $\pm$ помечены факторы, относящиеся к соответствующим полуполосам $\Pi^{\pm}$.

Раскрывая в равенствах (2.1) выражения для входящих сюда функций, согласно их представлениям (1.2), (1.3), получим четыре функциональных уравнения, содержащих четыре полные и минимальные системы функций $\{1, \cos q_k y\}$, $\{\sin q_k y\}$, $\{\cos p_k y\}$, $\{\sin p_k y\}$ ($k \geq 1$). Но объединения систем функций $\{1, \cos q_k y\} \cup \{\cos p_k y\}$ в уравнения а) и с) из (2.1) и систем функций $\{\sin q_k y\} \cup \{\sin p_k y\}$ в уравнения б) и d) из (2.1) не минимальны. Следовательно, не существует систем функций биортогональных к этим объединениям [7]. Поэтому искомые неизвестные не могут быть найдены явно непосредственно из уравнений (2.1). Необходимо избавиться в этих уравнениях от "лишних" функций. Для этого перейдем от равенств (2.1) к следующим:

$$\Phi^+(y) = \Phi^-(y), \quad \Psi^+(y) = \Psi^-(y), \quad y \in \Gamma \quad (2.2)$$

в которых функции $\Phi^\pm(y)$ и $\Psi^\pm(y)$ вводятся по формулам

$$\Phi^\pm(y) = \frac{i}{2} \left(2(1+m) \frac{dV^\pm}{dy} - (1-m) \sigma_x^\pm \right) - \tau_{xy}^\pm \quad (2.3)$$

$$\Psi^\pm(y) = (1+m) \frac{dU^\pm}{dy} - \frac{3+m}{2} \tau_{xy}^\pm + i \left(m \sigma_x^\pm + 2(1+m) \frac{dV^\pm}{dy} \right)$$

Разворачивая равенства (2.2), получим следующую систему из двух функциональных уравнений

$$\begin{aligned} & -(1-m) \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m) A_k q_k^3 + (3+m) B_k q_k^2] e^{iq_k y} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m) a_k p_k^3 + (3+m) b_k p_k^2] e^{ip_k y} = \frac{\Phi^o(y)}{i} \\ & mA_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m) A_k q_k^3 + (4+2m) B_k q_k^2] e^{iq_k y} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m) a_k p_k^3 + (4+2m) b_k p_k^2] e^{ip_k y} = \frac{\Psi^o(y)}{i} \\ & \left(y \in \Gamma, \quad q_k = k\pi, \quad p_k = -\frac{2k-1}{2} \pi \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функции Φ^o и Ψ^o определяются по формулам (2.3), но для факторов, помеченных градусом. Введем новые обозначения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= q_1, \quad \omega_2 = p_1, \quad \omega_3 = q_2, \quad \omega_4 = p_2, \dots \\ D_1 &= A_1, \quad D_2 = -a_1, \quad D_3 = A_2, \quad D_4 = -a_2, \dots \\ C_1 &= B_1, \quad C_1 = -b_1, \quad C_3 = B_2, \quad C_4 = -b_2, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

После этого уравнения (2.4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & -(1-m) \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m) D_k \omega_k^3 + (3+m) C_k \omega_k^2] \exp(i\omega_k y) = \frac{1}{i} \Phi^o(y) \\ & mA_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1+m) D_k \omega_k^3 + (4+2m) C_k \omega_k^2] \exp(i\omega_k y) = \frac{1}{i} \Psi^o(y) \quad (y \in \Gamma) \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Докажем, что система функций

$$E = \{\exp(i\omega_k y)\}_{k=1}^{\infty} \quad (3.1)$$

участвующая в разложениях (2.6), полна в $L_2(\Gamma)$ и существует биортогональная к ней на Γ система функций $\{\psi_v(y)\}_{v=1}^{\infty}$. Тогда коэффициенты разложений (2.6) могут быть найдены явно при помощи этой системы функций.

Лемма. Бесконечное произведение

$$L(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k} \right), \quad \omega = \xi + i\zeta \quad (3.2)$$

сходится и представляет собой целую функцию экспоненциального типа равного 1. На вещественной оси R :

$$L(\xi) \approx O(|\xi|^{-1/2}) \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

так, что $L(\xi) \notin L_2(R)$.

Доказательство. Сходимость бесконечного произведения (3.2) следует из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k}$$

Порядок функции $L(\omega)$ равен [8]:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = 1$$

где $n(r)$ – число нулей функции $L(\omega)$ в круге радиуса r . Согласно [8] (см. теорему 2 на стр. 121) индикатор целой функции $L(\omega)$ равен $|\sin \theta|$ и, значит, ее тип равен 1.

Осталось установить оценку (3.3). Воспользовавшись формулой из [1] (стр. 147), можно получить

$$L(\omega) = \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) \Gamma(1/2 + \omega/\pi) \right]^{-1} \quad (3.4)$$

Требуемая оценка следует теперь из асимптотических равенств для гамма-функции при $|\xi| \rightarrow \infty$ [9].

Теорема 1. Система функций E (3.1) полна в $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Допустим, что система функций E не полна в $L_2(\Gamma)$ и, следовательно, существует финитная функция $\chi(y) \in L_2(\Gamma)$, $\text{supp } \chi(y) \in \Gamma$ такая, что

$$\int_{\Gamma} \exp(i\omega_k y) \chi(y) dy = 0 \quad (k \geq 1) \quad (3.5)$$

Образует целую функцию

$$S(\omega) = \int_{\Gamma} \exp(i\omega y) \chi(y) dy \quad (3.6)$$

Согласно (3.5) $S(\omega_k) = 0$ ($k \geq 1$). Следовательно, тип функции $S(\omega)$, по крайней мере, равен 1 (так как она имеет нулями все нули целой функции $L(\omega)$, тип которой, согласно лемме, равен 1).

С другой стороны, по теореме Пэли – Винера [8], тип функции $S(\omega)$ не больше чем 1. Поэтому $S(\omega) = L(\omega)c(\omega)$, где $c(\omega)$ – целая функция минимального типа.

Так как функция $\chi(y) \in L_2(\Gamma)$, то, по теореме Пэли – Винера, целая функция $S(\xi) \in L_2(R)$. Поэтому

$$|c(\xi)| \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

По теореме Адамара целая функция минимального типа с этим свойством постоянная. Очевидно, ее можно положить равной 1. Таким образом, $S(\omega) \equiv L(\omega)$. Но по лемме $L(\xi) \notin L_2(R)$ и, значит, не существует функции $\chi(y) \in L_2(\Gamma)$, со свойством (3.5), т.е. система функций E полна в $L_2(\Gamma)$.

Теорема 2. Существует единственная система функций $\{\psi_v(y)\}_{v=1}^{\infty}$, $\psi_v(y) \in L_2(\Gamma)$, $\text{supp } \psi_v(y) \in \Gamma$ биортогональная на Γ к системе экспонент E . Функции биортогональной системы находятся по формулам

$$\psi_v(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega) \exp(-i\omega y)}{(\omega - \omega_v) L'_v} d\omega \quad (3.7)$$

$$L'_v = \left. \frac{dL(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_v} \quad (v \geq 1)$$

Доказательство. По лемме $L(\xi) \approx O(|\xi|^{-1/2})$, $|\xi| \rightarrow \infty$. Следовательно, на вещественной оси

$$\frac{L(\omega)}{(\omega - \omega_v)L'_v} \in L_2(R) \quad (v \geq 1) \quad (3.8)$$

Тогда, по теореме Пэли–Винера, имеется такой набор функций $\psi_v(y)$ из $L_2(\Gamma)$, $\text{supp } \psi_v \in \Gamma$, что

$$\int_{\Gamma} \exp(i\omega y) \psi_v(y) dy = \frac{L(\omega)}{(\omega - \omega_v)L'_v} \quad (v \geq 1) \quad (3.9)$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Gamma} \exp(i\omega_k y) \psi_v(y) dy = \begin{cases} 1, & k = v \\ 0, & k \neq v \end{cases} \quad (3.10)$$

т.е. система функций $\{\psi_v(y)\}_{v=1}^{\infty}$ биортогональна к полной в $L_2(\Gamma)$ системе экспонент E . Представление (3.7) получается из (3.9) при помощи обратного преобразования Фурье.

Осталось доказать единственность биортогональной системы функций $\{\psi_v(y)\}_{v=1}^{\infty}$. Она не единственна, если найдется целая функция минимального типа $c(\omega)$ такая, что на вещественной оси

$$c(\omega) \frac{L(\omega)}{(\omega - \omega_v)L'_v} \in L_2(R) \quad (v \geq 1)$$

По уже упоминавшейся теореме Адамара это возможно лишь в том случае, когда $c(\omega) = \text{const}$. Все доказано.

Из теорем 1 и 2 получаем следующее

Следствие. Система функций E (3.1) образует базис в $L_2(\Gamma)$.

4. При помощи биортогональной системы функций $\{\psi_v(y)\}_{v=1}^{\infty}$ найдем коэффициенты C_k и D_k ($k \geq 1$) разложений (2.6). Примем для простоты $p^+(x) = p = \text{const}$, а продолжение функции $p^+(x)$ на всю вещественную ось $p(x) = p$. В этом случае решение в интегралах Фурье имеет вид

$$U^0 = 0, \quad V^0 = \frac{1}{2}(1-m)py, \quad \sigma_x^0 = pm, \quad \sigma_y^0 = p, \quad \tau^0 = 0$$

и, следовательно, в соответствии с формулами (2.3):

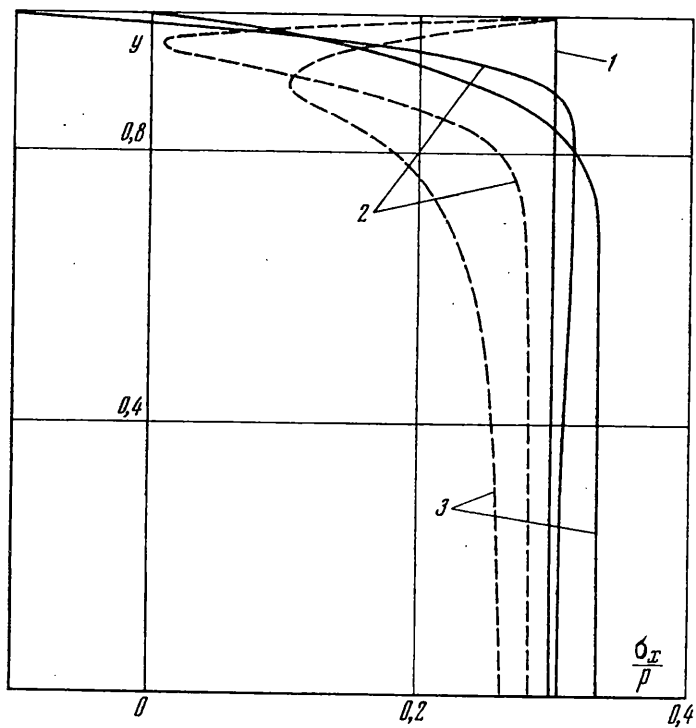
$$\Phi^0(y) = (1-m)pi/2, \quad \Psi^0(y) = pi$$

Кроме того, из условия на бесконечности $\sigma_x^- = \sigma_x^0$ ($x \rightarrow -\infty$) находим, что $A_0 = mp$. Теперь система уравнений (2.6) принимает вид

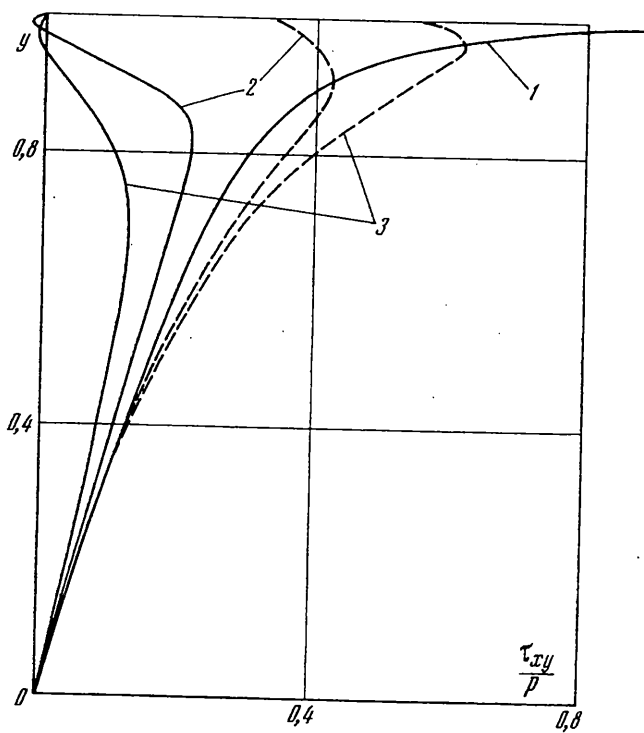
$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)D_k\omega_k^3 + (3+m)C_k\omega_k^2] \exp(i\omega_k y) = \frac{(1-m^2)}{2} p \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1+m)D_k\omega_k^3 + (4+2m)C_k\omega_k^2] \exp(i\omega_k y) = (1-m^2)p$$

Домножая равенства (4.1) на функцию $\psi_k(y)$ и интегрируя по Γ , для каждого номера



Фиг. 1



Фиг. 2

$k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений относительно неизвестных C_k и D_k :

$$(1+m)D_k\omega_k^3 + (3+m)C_k\omega_k^2 = -\frac{(1-m^2)}{2\omega_k L'_k} p$$

$$(1+m)D_k\omega_k^3 + (4+2m)C_k\omega_k^2 = -\frac{(1-m^2)}{\omega_k L'_k} p \quad (k \geq 1)$$

Откуда находим

$$D_k = \frac{(1-m)p}{(1+m)\omega_k^4 L'_k}, \quad C_k = -\frac{(1-m)p}{2\omega_k^3 L'_k}$$

или, в первоначальных обозначениях (2.5) имеем

$$A_k = \frac{(1-m)p}{(1+m)q_k^4 L'_k(q_k)}, \quad B_k = -\frac{(1-m)p}{2q_k^3 L'_k(q_k)} \quad (4.2)$$

$$a_k = -\frac{(1-m)p}{(1+m)p_k^4 L'_k(p_k)}, \quad b_k = \frac{(1-m)p}{2p_k^3 L'_k(p_k)}$$

Коэффициенты (4.2) можно преобразовать к форме более удобной для вычислений, если воспользоваться представлением (3.4) для функции $L(\omega)$.

Определим значения производной функции $L(\omega)$ в точках множества $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ (2.5) пользуясь указанным представлением. Тогда

$$L'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{f(1-\omega/\pi)}{\Gamma(1-\omega/\pi)\Gamma(1/2+\omega/\pi)} - \frac{f(1/2+\omega/\pi)}{\Gamma(1-\omega/\pi)\Gamma(1/2+\omega/\pi)} \right] \quad (4.3)$$

где $f(\omega) = \Gamma'(\omega)/\Gamma(\omega)$ – логарифмическая производная гамма-функции. Воспользуемся известными асимптотическими представлениями функций $f(\omega)$ и гамма-функций в окрестности точек ω_n ($n \geq 1$) [9]. Будем иметь

$$f(1-\omega/\pi) = [\omega/\pi - n]^{-1} + \Omega_1(\omega)$$

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{\pi}\right) = \left[\frac{\omega}{\pi} + n - \frac{1}{2}\right]^{-1} + \Omega_2(\omega)$$

$$\Gamma\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left[n - \frac{\omega}{\pi}\right]^{-1} + \Omega_3(\omega) \quad (4.4)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{\pi}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{\omega}{\pi} + n - \frac{1}{2}\right]^{-1} + \Omega_4(\omega) \quad (n=1, 2, \dots)$$

где Ω_n ($n=1, 2, 3, 4$) – функции правильные в окрестностях рассматриваемых точек.

Переходя в равенстве (4.3) к пределам при $\omega \rightarrow n\pi$ и $\omega \rightarrow -(n-1/2)\pi$, на основании соотношений (4.4) получим

$$L'(n\pi) = -L'\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\right) = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \quad (n \geq 1)$$

Введем функцию

$$\Phi(n) = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \quad (n \geq 1)$$

и выпишем окончательные формулы для напряжений (1.2) и (1.3) в полосе.

В полуполосе Π^- имеем

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{p} &= m + \frac{x}{2}(1-m^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n\pi x)}{\phi(n)} \cos n\pi y \\ \frac{\sigma_y}{p} &= m^2 - (1-m^2) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n\pi} + \frac{x}{2} \right\} \frac{\exp(n\pi x)}{\phi(n)} \cos n\pi y \\ \frac{\tau_{xy}}{p} &= -\frac{(1-m^2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n\pi} + x \right\} \frac{\exp(n\pi x)}{\phi(n)} \sin n\pi y\end{aligned}\quad (4.5)$$

В полуполосе Π^+ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{p} &= m + \frac{x}{2}(1-m^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi(n)} \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \cos \frac{2n-1}{2}\pi y \\ \frac{\sigma_y}{p} &= 1 + (1-m^2) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{(2n-1)\pi} - \frac{x}{2} \right\} \frac{1}{\phi(n)} \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \cos \frac{2n-1}{2}\pi y \\ \frac{\tau_{xy}}{p} &= -\frac{(1-m^2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{(2n-1)\pi} - x \right\} \frac{1}{\phi(n)} \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \sin \frac{2n-1}{2}\pi y\end{aligned}\quad (4.6)$$

5. В качестве иллюстрации на фиг. 1 и 2 показаны распределения напряжений $\sigma_x(x, y)/p$ и $\tau_{xy}(x, y)/p$ на стыке полуполос $x = 0$ (кривые 1), а также в сечениях $x = \pm 0,05$ (кривые 2) и $x = \pm 0,1$ (кривые 3). Штриховым кривым соответствует решение в правой полуполосе Π^+ , а сплошным – в левой полуполосе Π^- . Считается, что коэффициент Пуассона $m = 0,3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 94-01-01561-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
3. Koiter W.T. Approximate solution of Wiener–Hopf type integral equations with applications. Pts I–III // Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. 1954. В. 57. № 5. P. 558–579.
4. Koiter W.T. On the flexural rigidity of a beam weakened by transverse saw cuts. Pts I–II // Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. 1956. В. 59. № 4. P. 354–374.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Коваленко М.Д. Биортогональные разложения в первой основной задаче теории упругости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 956–963.
7. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.
8. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
9. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.X.1995