МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. И.А. СОЛДАТЕНКОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗНАШИВАНИИ ТОНКОЙ ПОЛОСЫ СВЯЗАННОЙ С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

В [1] был использован метод последовательных приближений для решения контактной задачи о взаимодействии контртела с упругой полосой связанной с упругой полуплоскостью. Ниже также с использованием метода последовательных приближений строится решение задачи о контакте движущегося контртела с упругой композицией полоса-полуплоскость при наличии износа. Ранее задача о контактном взаимодействии движущегося контртела с многослойным основанием при наличии необратимого формоизменения границы контакта решалась в [2] с использованием численных методов.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим композицию сцепленных друг с другом упругих полосы 1 и полуплоскости 2, с которой взаимодействует дисковое контртело 3 (диск), совершающее одновременно поступательное и вращательное движения и находящееся под действием нормальной нагрузки P (фиг. 1).

В результате взаимодействия диска с полосой, последняя испытывает необратимое формоизменение. Будем интерпретировать это формоизменение как износ и воспользуемся для описания соответствующего процесса уравнением вида [3]:

$$dw_\xi(t)/dt = \alpha|V_s|p_\xi(t) \tag{1.1}$$

где w_ξ и p_ξ – линейный износ и контактное давление в некоторой точке ξ верхней границы полосы, α – константа износостойкости полосы, V_s – скорость относительного скольжения границ диска и полосы.

Свяжем с диском систему координат Oxy так, как это показано на фиг. 1, при этом форму контактирующей с полосой границы диска опишем параболической зависимостью

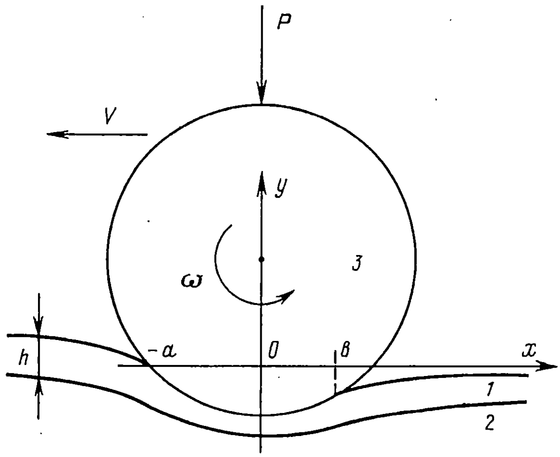
$$y = -g(x) \equiv -k\left(a^2 - x^2\right), \quad k = (2R)^{-1} \tag{1.2}$$

Будем считать, что поступательное движение диска осуществляется с постоянной скоростью $V > 0$ в противоположном оси x направлении. Вращение диска происходит также с постоянной угловой скоростью ω, однако его направление может быть произвольным, причем за положительное принимается вращение против часовой стрелки (фиг. 1). При таких условиях имеет место следующее выражение для скорости V_s, фигурирующей в (1.1):

$$V_s = \omega R - V \tag{1.3}$$

Не ограничивая общности рассмотрения будем полагать диск абсолютно жестким и неизнашиваемым.

Обозначим через $p(x)$, $w(x)$, $v(x)$ распределения по области контакта в системе $0xy$,



Фиг. 1

соответственно, контактного давления, износа полосы, упругого перемещения верхней границы полосы и заметим, что функции $w(x)$ и $\upsilon(x)$ связаны друг с другом условием контакта [4]:

$$\upsilon(x) - w(x) = -g(x) \tag{1.4}$$

в правой части которого стоит выражение для формы диска из равенства (1.2).

Относительно распределения $p(x)$ будем полагать, что оно является непрерывной функцией и принимает значения равные нулю на концах области контакта

$$p(x) \in C[-a, b], \quad p(-a) = 0, \quad p(b) = 0 \tag{1.5}$$

Кроме того, функция $p(x)$ должна удовлетворять условию равновесия диска:

$$P = \int_{-a}^{b} p(x)dx \tag{1.6}$$

Несложные выкладки с уравнением (1.1) при учете выражения (1.3) дают следующую связь функций $p(x)$ и $w(x)$ [4]:

$$w(x) = \beta \int_{-a}^{x} p(s)ds, \quad \beta = \alpha \frac{|\omega R - V|}{V} \tag{1.7}$$

Учитывая, что в силу (1.7) $w(-a) = 0$, получим из (1.4) при $x = -a$:

$$\upsilon(-a) = 0 \tag{1.8}$$

Прежде чем перейти к определению функции $\upsilon(x)$, наложим следующее ограничение на размер области контакта. А именно, будем считать отношение ширины h полосы к длине $d = a + b$ области контакта много меньшим единицы, в силу чего деформационные свойства полосы могут быть описаны моделью винклеровского основания [1, 5, 6]. Данное обстоятельство позволяет записать следующее выражение для υ, удовлетворяющее условию (1.8):

$$\upsilon(x) = -Bhp(x) + \upsilon_2(x), \quad B = (1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)\left[E_1(1 - \nu_1)\right]^{-1} \tag{1.9}$$

в котором первое слагаемое соответствует деформации полосы, а второе – деформации полуплоскости и имеет вид [7]:

$$\upsilon_2(x) = -\chi_2 \int_{-a}^{x} \tau_{xy}(s)ds + \theta_2 \int_{-a}^{b} p(s)\ln\left|\frac{s-x}{s+a}\right|ds \tag{1.10}$$

$$\chi_2 = \frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{E_2}, \quad \theta_2 = \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2}$$

где E_i, ν_i – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для полосы ($i = 1$) и полуплоскости ($i = 2$).

Фигурирующее в (1.10) касательное контактное напряжение τ_{xy} связано с контактным давлением равенством [3]:

$$\tau_{xy}(x) = f \operatorname{sgn} V_s p(x), \quad \operatorname{sgn} V_s = \begin{cases} -1, & V_s < 0 \\ 0, & V_s = 0 \\ 1, & V_s > 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Подстановка (1.11) в (1.10) дает:

$$\upsilon_2(x) = \left(\hat{G}p\right)(x) \equiv -\chi_2^0 \int_{-a}^{x} p(s)ds + \theta_2 \int_{-a}^{b} p(s)\ln\left|\frac{s-x}{s+a}\right|ds \tag{1.12}$$

где $\chi_2^0 = \chi_2 f \operatorname{sgn} V_s$, $\hat{G}$ – линейный оператор.

Записанные выше равенства будут использоваться далее для решения следующей задачи: по известной нагрузке P найти распределение контактного давления $p(x)$ и размеры a, b области контакта. Сформулируем систему равенств, позволяющих решить такую задачу.

Для этого подставим в условие контакта (1.4) вместо $w(x)$ и $\upsilon(x)$ выражения (1.7) и (1.9). В результате получим:

$$p(x) + m\int_{-a}^{x} p(s)ds = \Phi(x) \tag{1.13}$$

$$m = \varkappa\beta, \quad \varkappa = (Bh)^{-1}, \quad \Phi(x) = \varkappa(g(x) + \upsilon_2(x))$$

Правая часть равенства (1.13) содержит неизвестную функцию $\upsilon_2(x)$, которая, в свою очередь, определяется равенством (1.12) через $p(x)$ и, поэтому, (1.13) может рассматриваться как уравнение относительно $p(x)$.

Входящие в (1.13) неизвестные величины a и b будем определять из условия равновесия (1.6) и последнего равенства (1.5) $p(b) = 0$. Отметим, что первое равенство (1.5) $p(-a) = 0$ выполняется в силу уравнения (1.13), в чем можно убедиться, положив в (1.13) $x = -a$ и приняв во внимание, что $g(x) = k(a^2 - x^2)$, а $\upsilon_2(x)$ определяется равенством (1.12).

Таким образом, система уравнений для поставленной выше задачи включает равенства (1.13), (1.6) и $p(b) = 0$.

Прежде чем приступить к построению алгоритма решения этой системы, преобразуем уравнение (1.13). Для этого формально продифференцируем (1.13) по x и затем, используя метод вариации постоянной [8], разрешим полученное дифференциальное уравнение относительно $p(x)$, рассматривая правую часть $\Phi'(x)$ как некоторую заданную функцию. В результате можно получить

$$p(x) = \left(\hat{H}\Phi\right)(x) \equiv \Phi(x) - me^{-mx}\int_{-a}^{x} \Phi(s)e^{ms}ds \tag{1.14}$$

причем $\hat{H}$ – линейный оператор. Нетрудно установить эквивалентность полученного подобным образом уравнения исходному уравнению (1.13), т.е. доказать, что любое решение (1.14) является решением (1.13) и наоборот. При дальнейшем анализе будет использоваться именно уравнение (1.14).

2. Построение приближенного решения задачи. В ходе проделанных выше выкладок было установлено, что

$$p(x)=\left(\hat{H}\Phi\right)(x),\quad \Phi(x)=\varkappa\left(g(x)+\upsilon_2(x)\right),\quad \upsilon_2(x)=\left(\hat{G}p\right)(x) \tag{2.1}$$

причем операторы $\hat{G}$ и $\hat{H}$ определяются равенствами (1.12) и (1.14).

Подставим последнее равенство (2.1) во второе, исключив тем самым функцию $\upsilon_2(x)$, после чего подставим полученное выражение для $\Phi(x)$ в первое равенство (2.1). В результате, учитывая линейность операторов $\hat{G}$ и $\hat{H}$, придем к следующему уравнению для $p(x)$:

$$p(x)=\left(\hat{L}p\right)(x)\equiv p_0(x)+\left(\hat{N}p\right)(x) \tag{2.2}$$

$$p_0(x)\equiv\varkappa\left(\hat{H}g\right)(x),\quad \hat{N}=\varkappa\hat{H}\hat{G}$$

Как указывалось выше (см. (1.5)), решение $p(x)$ уравнения (2.2) ищется в пространстве $C[-a, b]$ непрерывных на отрезке $[-a, b]$ функций. В связи с этим отметим следующее свойство операторов $\hat{G}$ и $\hat{H}$, доказательство которого не составляет труда:

$$\left(\hat{G}\varphi\right)(x)\in C[-a,b] \text{ и } \left(\hat{H}\varphi\right)(x)\in C[-a,b], \text{ если } \varphi(x)\in C[-a,b] \tag{2.3}$$

Т.е. операторы $\hat{G}$ и $\hat{H}$ отображают $C[-a, b]$ в себя.

Учитывая определения функции $p_0(x)$ и оператора $\hat{L}$ и то, что $g(x)$ является непрерывной функцией, получим из (2.3):

$$\left(\hat{L}\varphi\right)(x)\in C[-a,b], \text{ если } \varphi(x)\in C[-a,b] \tag{2.4}$$

т.е. оператор $\hat{L}$ также отображает пространство $C[-a, b]$ в себя.

Кроме указанных свойств операторов $\hat{G}$ и $\hat{H}$, результат их действия на произвольные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из $C[-a, b]$ удовлетворяет неравенствам

$$\rho\left(\hat{G}\varphi_1,\hat{G}\varphi_2\right)\leqslant\left(\chi_2^0+3\theta_2\right)d\rho\left(\varphi_1,\varphi_2\right) \tag{2.5}$$

$$\rho\left(\hat{H}\varphi_1,\hat{H}\varphi_2\right)\leqslant 2\rho\left(\varphi_1,\varphi_2\right),\quad \rho\left(\varphi_1,\varphi_2\right)=\max_{x\in[-a,b]}\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|$$

где $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ – расстояние в пространстве $C[-a, b]$. Основываясь на определении оператора $\hat{L}$ через $\hat{G}$ и $\hat{H}$ (см. (2.2)), нетрудно установить, что $\hat{L}$ также удовлетворяет неравенству, которое имеет вид

$$\rho\left(\hat{L}\varphi_1,\hat{L}\varphi_2\right)\leqslant\varepsilon\rho\left(\varphi_1,\varphi_2\right),\quad \varepsilon=2\varkappa\left(\chi_2^0+3\theta_2\right)d \tag{2.6}$$

Свойства (2.4) и (2.6) оператора $\hat{L}$ позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Для произвольных a и b, оператор $\hat{L}$ отображает пространство $C[-a, b]$ в себя. Кроме того, оператор $\hat{L}$ является сжимающим, если только

$$\varepsilon\equiv 2\varkappa\left(\chi_2^0+3\theta_2\right)d<1 \tag{2.7}$$

Данная теорема дает возможность при произвольных a, b и $\varepsilon < 1$ использовать для нахождения решения $p(x) \in C[-a, b]$ уравнения (2.2) метод последовательных приближений и в результате получить [9]

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x), \quad p_n(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{N}^i p_0\right)(x) \tag{2.8}$$

где $p_n(x)$ – n-е приближение, а запись $\hat{N}^i$ означает i-кратное действие оператора $\hat{N}$.

Отметим, что любое приближение $p_n(x)$, а следовательно и $p(x)$, равно нулю при $x = -a$, в чем нетрудно убедиться приняв во внимание определения оператора $\hat{N}$ и функции $p_0(x)$.

Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем малых ε удовлетворяющих неравенству (2.7) и возьмем в качестве решения $p(x)$ его первое приближение $p_1(x)$, которое с учетом определений $\hat{N}$ и $p_0(x)$ имеет вид

$$p_1(x) = \varkappa\left(\hat{H}g\right)(x) + \varkappa^2\left(\hat{H}\hat{G}\hat{H}g\right)(x) \tag{2.9}$$

Подставим в правую часть (2.9) функцию $g(x) = k(a^2 - x^2)$, после чего, учитывая определения (1.12), (1.14) операторов $\hat{G}, \hat{H}$ можно получить

$$\begin{aligned}
p_1(x) = \frac{2k\varkappa}{m^2}\Bigg\{&\left[(1+ma)\left(1-e^{-m(x+a)}\right) - m(x+a)\right] - \\
&-\varkappa\chi_2^0\left[\frac{2}{m} - x - \left(a + \frac{2}{m} + (1+ma)(x+a)\right)e^{-m(x+a)}\right] + \\
&+\varkappa\theta_2\Bigg[\left((1+ma)e^{-m(x+a)}+1\right)\left((x-b)\ln\left|\frac{x-b}{d}\right| - (x+a)\ln\left|\frac{x+a}{d}\right|\right) + \\
&+(1+ma)e^{-m(x+a)}\Big((x-b)E_0(m(x-b)) - (x+a)E_0(m(x+a)) + E_0(-md)d\Big) + \\
&+\left(1-e^{-m(x+a)}\right)d + \left(b - \frac{2}{m}\right)\left(1-e^{-m(x-b)}\right)\ln\left|\frac{x-b}{d}\right| + \\
&+\left(a + \frac{2}{m}\right)\left(1-e^{-m(x+a)}\right)\ln\left|\frac{x+a}{d}\right| - \left(a + \frac{2}{m}\right)e^{-m(x+a)}E_0(m(x+a)) + \\
&+\left(b - \frac{2}{m}\right)e^{-m(x-b)}\Big(E_0(-md) - E_0(m(x-b))\Big) + \\
&+\left(a + \frac{1}{m}\right)\left(1-e^{-m(x+a)}\right)\left(1-e^{-md}\right)\Bigg]\Bigg\}, \quad E_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{kk!}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Для нахождения неизвестных величин a и b, фигурирующих в (2.10), следуя изложенному в предыдущем пункте, воспользуемся условием равновесия (1.6) и вторым равенством (1.5), полагая в них $p(x) = p_1(x)$. Таким образом, придем к следующим уравнениям для a и b:

$$P = \int_{-a}^{b} p_1(x)dx, \quad p_1(b) = 0 \tag{2.11}$$

в которых $p_1(x)$ определяется равенством (2.10).

Найденные из (2.11) величины a и b, совместно с выражением (2.10) решают поставленную в п. 1 задачу в первом приближении по малому параметру ε. Ниже будут представлены некоторые результаты численной реализации системы (2.10), (2.11).

Замечание 1. Если в равенствах (2.10), (2.11) перейти к безразмерным величинам

$$\tilde{x} = x / R, \quad \tilde{a} = a / R, \quad \tilde{b} = b / R, \quad \tilde{p}_1 = p_1 / (\varkappa R) \tag{2.12}$$

то окажется, что оставшиеся параметры задачи входят в эти равенства в виде безразмерных комбинаций

$$z_0 = \varkappa\chi_2^0 R, \quad z_1 = \varkappa\theta_2 R, \quad z_2 = \varkappa\beta R \equiv mR, \quad \tilde{P} = P / (\varkappa R^2)$$

Это, в свою очередь, означает, что неизвестные $\tilde{p}_1(\tilde{x}), \tilde{a}, \tilde{b}$, которые находятся из (2.10), (2.11) и дают решение поставленной задачи в безразмерных переменных (2.12), зависят только от параметров z_0, z_1, z_2 и $\tilde{P}$.

Данное свойство полученного приближенного решения рассматриваемой задачи будет использоваться при изложении результатов численного анализа, т.к. оно позволяет более компактно описывать влияние на это решение параметров χ_2^0, θ_2, $\varkappa$, β, R, P путем использования вместо них безразмерных параметров z_0, z_1, z_2, P.

3. Результаты численного анализа. Представленные ниже результаты были получены в результате численного решения уравнений (2.11) совместно с выражением (2.10) при $\tilde{P} = 1{,}68 \cdot 10^{-4}$.

На фиг. 2 изображены функции $\tilde{p}_1(\tilde{x})$, при различных z_2 (0,6,12,18,24) и $z_0 = -0{,}075$, $z_1 = 0{,}716$. Изменение параметра z_2 может быть связано с изменением константы α износостойкости полосы. Как это видно из фиг. 2, повышенный износ приводит к существенному смещению эпюры контактного давления, оказывая слабое влияние на ее форму.

Фиг. 3 иллюстрирует влияние параметра z_2 на длину $\tilde{d} = d / R$ области контакта. Кривая *1* соответствует случаю абсолютно жесткой полуплоскости ($z_0 = z_1 = 0$), тогда как для кривой *2*: $z_0 = -0{,}075$, $z_1 = 0{,}716$. Уровень штриховой линии соответствует значению размера области контакта $\tilde{d} = 2\left(2z_1\tilde{P}\right)^{1/2} \equiv \tilde{d}_e$ при внедрении диска в полуплоскость без трения и износа под действием той же нагрузки $\tilde{P}$.

Обращает на себя внимание то, что переход от абсолютно жесткой полуплоскости к упругой приводит на фиг. 3 к несущественному (около 2,5%) возрастанию размера области контакта, хотя упругие свойства самой полуплоскости обеспечивают более значительный размер области контакта с ней диска – значение $\tilde{d}_e$ составляет около 25% от уровня кривой *2*.

В заключение сделаем ряд замечаний.

Замечание 2. Для решения поставленной задачи можно использовать несколько отличное от (1.13) уравнение. А именно, если ввести $m_* = m + \varkappa\chi_2^\circ$ и в условии контакта (1.4) сгруппировать интеграл из выражения (1.7) для $w(x)$ с первым интегралом из выражения (1.12) для $v_2(x)$, то можно получить уравнение относительно $p(x)$ эквивалентное (1.13):

$$p(x) + m_* \int_{-a}^{x} p(s)ds = \Phi_*(x) \tag{3.1}$$

$$\Phi_*(x) = \varkappa(g(x) + v_{2*}(x)), \quad v_{2*}(x) = \theta_2 \int_{-a}^{b} p(s) \ln\left|\frac{s-x}{s+a}\right| ds$$

Для нахождения решения уравнения (3.1) допустимо использовать процедуру, изложенную выше в отношении уравнения (1.13), однако, при этом следует иметь в виду, что параметр m_* в (3.1) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В результате нетрудно получить следующее выражение для $p(x)$ (ср. с (2.8)):

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} p_{n*}(x), \quad p_{n*}(x) = p_{0*}(x) + \sum_{i=1}^{n} (\hat{N}_*^i p_{0*})(x) \tag{3.2}$$

где $\hat{N}_* = \varkappa \hat{H}_* \hat{G}_*$, $p_{0*}(x) = \varkappa(\hat{H}_* g)(x)$, причем операторы $\hat{H}_*$ и $\hat{G}_*$ получаются соответственно из операторов $\hat{H}$ и $\hat{G}$, если в $\hat{H}$ заменить m на m_*, а в $\hat{G}$ положить $\chi_2^\circ = 0$.

Условие, обеспечивающее правомерность использования выражения (3.2), для $p(x)$ отличается от (2.7) и имеет вид:

$$\varepsilon_* = 3\varkappa\theta_2\sigma_2(d)d < 1 \tag{3.3}$$

где $\sigma_2(d) = 2$ при $m \geqslant -\varkappa\chi_2^\circ$ и $\delta_2(d) = \exp(|\varkappa\chi_2^\circ|d)$ при $m < -\varkappa\chi_2^\circ$.

Замечание 3. Условия (2.7) и (3.3) отличаются друг от друга. В частности, при $m \geqslant -\varkappa\chi_2^\circ$ неравенство (3.3) в отличие от (2.7) не содержит явно параметра χ_2°, определяющего фрикционное взаимодействие контртела с полосой.

При выполнении как условия (2.7), так и (3.3), приближения $p_n(x)$ и $p_{n*}(x)$ сходятся к общему решению $p(x)$. Однако сами величины ε и ε_* левых частей (2.7) и (3.3), в которых фигурирует одна и та же величина d длины области контакта, отличаются, вообще говоря, друг от друга. Последнее означает, что скорости сходимости $p_n(x)$ и $p_{n*}(x)$ к $p(x)$ также могут быть различными [9].

Замечание 4. Согласно сформулированной в п. 2 теореме, условие применимости метода последовательных приближений для решения уравнения (2.2) (или (3.1)) имеет вид (2.7) (или (3.3)). Однако фигурирующий в (2.7) и (3.3) размер d области контакта является неизвестным и, поэтому, произвести проверку выполнения условий (2.7) и (3.3) можно только после решения поставленной задачи и нахождения величины d. Выходом из подобной ситуации может служить оценка величины d, которую можно было бы затем подставить в условия (2.7) или (3.3) для их проверки. В силу того, что левые части неравенств (2.7) и (3.3) возрастают с увеличением d, вышеупомянутая оценка дожна быть оценкой сверху.

Возьмем исходное уравнение в виде (3.1) и проинтегрируем его по x от $-a$ до b. Кроме того, положим в (3.1) $x = b$. В результате получим два соотношения, исключая из которых интеграл по области контакта от функции $p(s)\ln|(b-s)/(a+s)|$, придем к равенству:

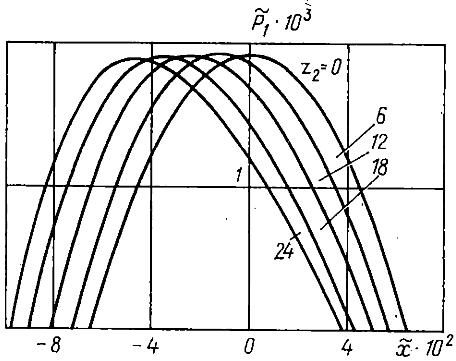
$$Q[1 + (\tfrac{1}{2}|m_*| + \varkappa\theta_2)d] = \tfrac{1}{6}\varkappa k d^3 + r_1 + r_2 \tag{3.4}$$

$$r_1 = \varkappa\theta_2 \int_{-a}^{b} p(s)\left(\frac{b-a}{2} - s\right)\ln\left|\frac{b-s}{a+s}\right| ds$$

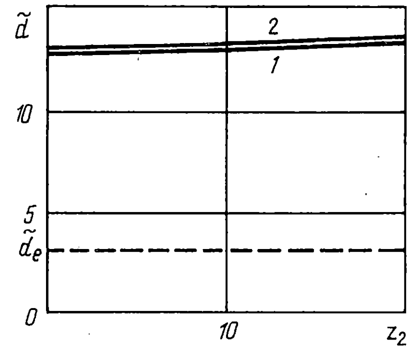
$$r_2 = \int_{-a}^{b} \left[\frac{|m_*| - m_*}{2}(b-s) + \frac{|m_*| + m_*}{2}(a+s)\right] p(s) ds$$

Из (3.4) для d вытекает следующее соотношение: $z(d) \equiv \tfrac{1}{6}\varkappa k d^3 [1 + (\tfrac{1}{2}|m_*| + \varkappa\theta_2)d]^{-1} = Q - C_*$, в котором $C_* = (r_1 + r_2)[1 + (\tfrac{1}{2}|m_*| + \varkappa\theta_2)d]^{-1}$, причем $C_* \geqslant 0$, т.к. $r_{1,2} \geqslant 0$.

Функция $z(s)$ является монотонно возрастающей при $s \geqslant 0$, поэтому корень d_m уравнения $z(d) = Q$ дает оценку величине d сверху $d \leqslant d_m$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Замечание 5. Необратимое формоизменение поверхности полосы описывалось выше уравнением (1.1) и интерпретировалось как износ. Не составляет труда в рамках прежней постановки задачи рассмотреть дополнительный механизм необратимого формоизменения полосы, связанный с ползучестью, скорость которой пропорциональна контактному давлению. В этом случае уравнение (1.1) трансформируется в уравнение вида

$$\frac{dw_\xi(t)}{dt} = \left(\alpha|V_s| + \alpha_0\right)p_\xi(t) \tag{3.5}$$

в котором слагаемое $\alpha|V_s|p_\xi$ соответствует износному формоизменению полосы, а слагаемое $\alpha_0 p_\xi$ – формоизменению вследствие ползучести [6]. Очевидно, что все полученные выше результаты остаются в силе и для уравнения (3.5).

Выводы. *1*. Получено выражение для точного решения задачи о контактном взаимодействии движущегося диска с композицией полоса – полуплоскость при наличии износа.

2. Выписано и проанализировано первое приближение точного решения для контактного давления по параметру малости ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Горячева И.Г., Горячев А.П., Садеги Ф.* Контактирование упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения или скольжения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 634–641.
3. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
4. *Солдатенков И.А.* Задача об изнашивании полуплоскости дисковым контртелом // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 107–110.
5. *Александрова Г.П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
6. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175 с.
7. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
8. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1976. 255 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.VIII.1995