

УДК 539.3

© 1997 г. В.П. ЛЕВИЦКИЙ, В.М. ОНЫШКЕВИЧ, И.Т. ЯСЬКЕВИЧ

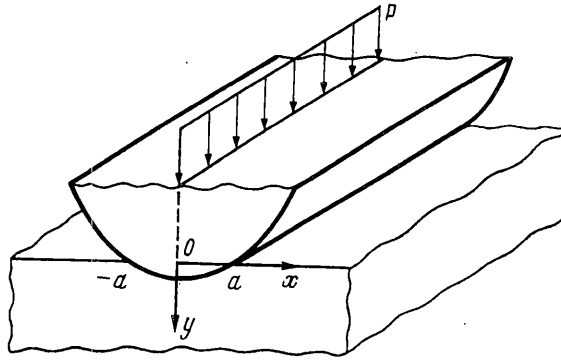
ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ О ДАВЛЕНИИ НАГРЕТОГО ШТАМПА

Рассматривается плоская контактная задача о вдавливании нагретого штампа в упругое полупространство. Тепловой контакт между штампом и полупространством неидеальный. Вне зоны контакта осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Решение задачи термоупругости для полупространства строится с помощью преобразования Фурье. Установлено существование зон отставания полупространства от штампа. В зоне штампа неидеальный теплообмен осуществляется на участках с полным контактом и в зонах отставания с разными коэффициентами термического сопротивления. Найдены температурные поля, тепловые потоки и контактные напряжения, приведены соответствующие графики.

Показано, что сближение или отдаление штампа как жесткого целого, пропадающее у некоторых авторов при дифференцировании граничных условий, имеет существенное значение для правильного понимания механики контактного взаимодействия.

Впервые решение плоской задачи термоупругости о давлении штампа с неполным контактом получено в [1]. В настоящем исследовании результаты о неполном контакте, полученные для осесимметричной задачи в [2], перенесены на случай плоской контактной задачи термоупругости. Полученные нами решения осесимметричных контактных задач [3, 4] показывают, что при постановке необходимо осторожно относиться к заданию перемещений. В данной работе мы опять возвращаемся к этой проблеме, но уже для плоских задач, поскольку в известных публикациях, например [5] и их предшественников, вместо выполнения граничного условия равенства нормальных перемещений под штампом используют равенство первой производной от этих перемещений по горизонтальной координате. В предлагаемой работе этот недостаток устранен: граничные условия не дифференцируются. Полученное решение демонстрирует зависимость искомых характеристик от вертикального смещения штампа как жесткого целого. Это смещение может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Равновесие штампа при одной и той же силе и разных температурах осуществляется на различных уровнях размещения штампа. При отрицательном жестком перемещении и положительной силе и температуре наблюдается неполный контакт между взаимодействующими телами.

1. Постановка задачи. Рассматривается жесткий штамп с основанием, описываемым кривой $f(x)$, который вдавливается силой P в упругое полупространство (фиг. 1). Полупространство находится в условиях плоской деформации. Основание штампа нагрето (или охлаждено) до температуры t_s . Вне штампа учитывается теплообмен полупространства с внешней средой по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена γ_0 , а в зоне штампа имеет место неидеальный тепловой контакт с полупространством с коэффициентом термической проводимости α . Температуру внешней среды считаем нулевой.



Фиг. 1

Для решения задачи необходимо проинтегрировать уравнения термоупругости для полупространства

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial x - \beta \partial t / \partial x = 0 \quad (1.1)$$

$$\mu \Delta v + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial y - \beta \partial t / \partial y = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta t = 0 \quad (1.3)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$, u и v – компоненты вектора перемещений, λ и μ – коэффициенты Ляме, $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$, α_T – температурный коэффициент линейного расширения при следующих температурных граничных условиях:

$$\lambda_T \partial t(x, 0) / \partial y = \alpha[t(x, 0) - t_s], \quad |x| \leq a \quad (1.4)$$

$$\partial t(x, 0) / \partial y = \gamma_0 t(x, 0), \quad |x| > a \quad (1.5)$$

и силовых граничных условиях

$$v(x, 0) = f(x) + \delta, \quad |x| \leq a \quad (1.6)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad |x| \geq a \quad (1.7)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty \quad (1.8)$$

Здесь δ – заданная величина осадки штампа, λ_T – коэффициент теплопроводности полупространства, a – полуширина штампа.

2. Решение уравнений термоупругости. Частное решение уравнений (1.1) и (1.2) ищем в виде

$$\bar{u} = \partial \Phi / \partial x, \quad \bar{v} = \partial \Phi / \partial y \quad (2.1)$$

Тогда будем иметь

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T t \quad (2.2)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(\xi, y) \exp(-i\xi x) d\xi \quad (2.3)$$

соотношения (2.2) и (1.3) в пространстве трансформант можно представить

$$d^2 t^F / dy^2 - \xi^2 t^F = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 \Phi^F}{dy^2} - \xi^2 \Phi^F = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T t^F \quad (2.5)$$

Поскольку имеет место

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda\theta - \beta t, \quad \tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} - \lambda\theta - \beta t \quad (2.6)$$

то согласно (2.2) получим

$$\sigma_x = -2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

Запишем решение уравнения теплопроводности для полупространства ($y \geq 0$) в форме

$$t^F = C_0 \exp(-|\xi|y) \quad (2.8)$$

Частное решение (2.5) ищем в виде

$$\Phi^F = Ay \exp(-|\xi|y)$$

Определив неизвестную константу A , получим

$$\Phi^F = -\frac{\beta C_0 y}{2|\xi|} \exp(-|\xi|y) \quad (2.9)$$

Используя (2.7) и (2.1), придем к соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{u}^F &= \text{sign } \xi \frac{i\beta C_0 y}{2} \exp(-|\xi|y), \quad \bar{v}^F = -\frac{\beta C_0}{2|\xi|} (1-|\xi|y) \exp(-|\xi|y) \\ \bar{\sigma}_x^F &= -\mu\beta C_0 (2-|\xi|y) \exp(-|\xi|y), \quad \bar{\sigma}_y^F = -\mu\beta C_0 |\xi|y \exp(-|\xi|y) \\ \bar{\tau}_{xy}^F &= i \text{sign } \xi \mu\beta C_0 (1-|\xi|y) \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.10)$$

На частное решение (2.10) следует наложить общее решение соответствующей однородной системы, которая в пространстве трансформант имеет вид

$$\mu \frac{d^2 u^F}{dy^2} - (\lambda + 2\mu)\xi^2 u^F - i(\lambda + \mu)\xi \frac{dv^F}{dy} = 0 \quad (2.11)$$

$$-i(\lambda + \mu)\xi \frac{du^F}{dy} + (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v^F}{dy^2} - \mu\xi^2 v^F = 0$$

В общем виде последние уравнения можно переписать в форме

$$a_1 \frac{d^2 u^F}{dy^2} + b_1 \frac{du^F}{dy} + c_1 u + d_1 \frac{d^2 v^F}{dy^2} + e_1 \frac{dv^F}{dy} + f_1 v = 0 \quad (2.12)$$

$$a_2 \frac{d^2 u^F}{dy^2} + b_2 \frac{du^F}{dy} + c_2 u + d_2 \frac{d^2 v^F}{dy^2} + e_2 \frac{dv^F}{dy} + f_2 v = 0 \quad (2.13)$$

где $a_1 = \mu$, $b_1 = 0$, $c_1 = -(\lambda + 2\mu)\xi^2$, $d_1 = 0$, $e_1 = -i(\lambda + \mu)\xi$, $f_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = -i(\lambda + \mu)\xi$, $c_2 = 0$, $d_2 = \lambda + 2\mu$, $e_2 = 0$, $f_2 = -\mu\xi^2$.

Решение уравнений (2.12) ищем в виде

$$u^F = \left(d_1 \frac{d^2}{dy^2} + e_1 \frac{d}{dy} + f_1 \right) f = -i(\lambda + \mu)\xi \frac{df}{dy} \quad (2.14)$$

$$v^F = -\left(a_1 \frac{d^2}{dy^2} + b_1 \frac{d}{dy} + c_1 \right) f = -\left(\mu \frac{d^2}{dy^2} - (\lambda + \mu)\xi^2 \right) f$$

Тогда уравнение (2.12) удовлетворяется автоматически, а с (2.13) получим уравнение

$$(\mu d^2 / dy^2 - \xi^2)^2 f = 0$$

решение которого для полупространства имеет вид

$$f = (C_1 + C_2 y) \exp(-|\xi| y) \quad (2.15)$$

Тогда из (2.14) с учетом (2.15) получим

$$u^F = -i(\lambda + \mu)\xi[-|\xi|C_1 + C_2(1-|\xi|y)] \exp(-|\xi|y) \quad (2.16)$$

$$v^F = ((\lambda + \mu)\xi^2 C_1 + 2\mu|\xi|C_2 + (\lambda + \mu)\xi^2 C_2 y) \exp(-|\xi|y)$$

а согласно соотношению (2.7):

$$\begin{aligned} \sigma_x^F &= \lambda dv^F / dy - i\xi(\lambda + 2\mu)u^F = \\ &= -\mu\xi^2(-2(\lambda + \mu)|\xi|C_1 + 2(2\lambda + \mu)C_2 - 2(\lambda + \mu)|\xi|yC_2) \exp(-|\xi|y) \\ \sigma_y^F &= (\lambda + 2\mu)dv^F / dy - i\xi\lambda u^F = \\ &= -\mu\xi^2(2(\lambda + \mu)|\xi|C_1 + 2\mu C_2 + 2(\lambda + \mu)|\xi|yC_2) \exp(-|\xi|y) \\ \tau_{xy}^F &= \mu du^F / dy - i\xi\mu v^F = -i\mu\xi(2(\lambda + \mu)\xi^2 C_1 - 2\lambda|\xi|C_2 + 2(\lambda + \mu)\xi^2 yC_2) \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Следовательно, общее решение уравнений термоупругости для полупространства имеет вид

$$t^F = C_0 \exp(-|\xi|y) \quad (2.18)$$

$$-q^F / \lambda_T = dt^F / dy = -|\xi|C_0 \exp(-|\xi|y) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u^F &= \bar{u}^F + \overline{\bar{u}}^F = \frac{1}{2}i \operatorname{sign} \xi \beta C_0 y \exp(-|\xi|y) - \\ &- i(\lambda + \mu)\xi[-|\xi|C_1 + C_2(1-|\xi|y)] \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} v^F &= \bar{v}^F + \overline{\bar{v}}^F = -\frac{\beta C_0}{2|\xi|}(1-|\xi|y) \exp(-|\xi|y) + \\ &+ ((\lambda + \mu)\xi^2 C_1 + 2\mu|\xi|C_2 + (\lambda + \mu)\xi^2 C_2 y) \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^F &= \bar{\sigma}_x^F + \overline{\bar{\sigma}}_x^F = -\mu\beta C_0[2-|\xi|y] \exp(-|\xi|y) - \\ &- \mu\xi^2(-2(\lambda + \mu)|\xi|C_1 + 2(2\lambda + \mu)C_2 - 2(\lambda + \mu)|\xi|yC_2) \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^F &= \bar{\sigma}_y^F + \overline{\bar{\sigma}}_y^F = -\mu\beta C_0 y |\xi| \exp(-|\xi|y) - \\ &- \mu\xi^2(2(\lambda + \mu)|\xi|C_1 + 2\mu C_2 + 2(\lambda + \mu)|\xi|yC_2) \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^F &= \bar{\tau}_{xy}^F + \overline{\bar{\tau}}_{xy}^F = i \operatorname{sign} \xi \mu \beta C_0 (1-|\xi|y) \exp(-|\xi|y) - \\ &- i\mu\xi(2(\lambda + \mu)\xi^2 C_1 - 2\lambda|\xi|C_2 + 2(\lambda + \mu)\xi^2 yC_2) \exp(-|\xi|y) \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. Сведение задачи к системе парных интегральных уравнений. Удовлетворяя граничному условию (1.8), получим

$$C_2 = -\beta C_0 / (2\lambda|\xi|^2) + (\lambda + \mu)|\xi|C_1 / \lambda \quad (3.1)$$

Используя (3.1) и удовлетворяя граничным условиям (1.6), (1.7), получим парные

интегральные уравнения

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\beta C_0}{2|\xi|} + \frac{(\lambda + \mu)C_1}{\lambda} \xi^2 \right) \exp(-i\xi x) d\xi = f(x) + \delta, \quad |x| \leq a \quad (3.2)$$

$$\frac{\mu}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu\beta C_0}{2} - (\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi| C_1 \right) \exp(-i\xi x) d\xi = 0, \quad |x| > a \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha + \lambda_T |\xi|) C_0 \exp(-i\xi x) d\xi = \alpha_{ts}, \quad |x| \leq a \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0 + |\xi|) C_0 \exp(-i\xi x) d\xi = 0, \quad |x| > a \quad (3.5)$$

4. Решение системы парных интегральных уравнений. Продлевая соотношения (3.3) и (3.5) на участок $|x| < a$ с помощью функции Хевисайда $H(x)$, получим

$$\frac{\mu}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu\beta C_0}{2} - (\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi| C_1 \right) \exp(-i\xi x) d\xi = \sigma_y(x) H(a - |x|) \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0 + |\xi|) C_0 \exp(-i\xi x) d\xi = \chi(x) H(a - |x|) \quad (4.2)$$

Тогда согласно прямой формулы интегрального преобразования Фурье

$$C_0 = \frac{1}{\gamma_0 + |\xi|} \int_{-a}^a \chi(x) \exp(i\xi x) dx \quad (4.3)$$

$$C_1 = \frac{\mu\beta C_0}{2(\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi|} - \frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi|} \int_{-a}^a \sigma_y(x) \exp(i\xi x) dx \quad (4.4)$$

Представляя неизвестные контактные напряжения $\sigma_y(x)$ и неизвестную функцию $\chi(x)$ в виде рядов Фурье

$$\sigma_y(x) = \sum_{k=-K}^K a_k \exp(ik\pi x / a) \quad (4.5)$$

$$\chi(x) = \sum_{k=-K}^K b_k \exp(ik\pi x / a) \quad (4.6)$$

$$\int_{-a}^a \sigma_y(x) \exp(i\xi x) dx = 2a \sum_{k=-K}^K a_k \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{a\xi + \pi k} \quad (4.7)$$

$$\int_{-a}^a \chi(x) \exp(i\xi x) dx = 2a \sum_{k=-K}^K b_k \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{a\xi + \pi k} \quad (4.8)$$

$$C_0 = \frac{2a}{\gamma_0 + |\xi|} \sum_{k=-K}^K b_k \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{a\xi + \pi k} \quad (4.9)$$

$$C_1 = \frac{\mu\beta a}{(\gamma_0 + |\xi|)(\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi|} \sum_{k=-K}^K b_k \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{a\xi + \pi k} - \frac{\lambda a}{\mu(\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi|} \sum_{k=-K}^K a_k \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{a\xi + \pi k} \quad (4.10)$$

Подставляя (4.9), (4.10) в (3.2) и (3.4), приходим к соотношениям

$$\frac{m}{\mu} \sum_{k=-K}^K a_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|} \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x) d\xi + \quad (4.11)$$

$$+ \beta m \sum_{k=-K}^K b_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|(\gamma_0 + |\xi|)} \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x) d\xi = -2\pi(\delta + f(x))$$

$$\sum_{k=-K}^K b_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + \lambda_T |\xi|}{\gamma_0 + |\xi|} \frac{\sin(a\xi + \pi k)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x) d\xi = \alpha f, \quad (4.12)$$

где $m = (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$. Используя метод точечной коллокации при $x = x_j$, $x_j = -a + a(j-1)/K$, $j = 1, \dots, 2K+1$, получим систему нелинейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a_k и b_k .

5. Вычисление несобственных интегралов. Для определения указанных коэффициентов необходимо вычислить следующие интегралы

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi + \pi k / a)}{|\xi|(\xi + \pi k / a)} \exp(-i\xi x_j) d\xi \quad (5.1)$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|(\gamma_0 + |\xi|)} \frac{\sin(\xi + \pi k / a)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x_j) d\xi \quad (5.2)$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + \lambda_T |\xi|}{\gamma_0 + |\xi|} \frac{\sin(\xi + \pi k / a)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x_j) d\xi \quad (5.3)$$

Для вычисления интегралов (5.1) и (5.2) найдем

$$A' = -i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \xi \frac{\sin(\xi + \pi k / a)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x_j) d\xi \quad (5.4)$$

$$B' = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } \xi}{\gamma_0 + |\xi|} \frac{\sin(\xi + \pi k / a)}{\xi + \pi k / a} \exp(-i\xi x_j) d\xi \quad (5.5)$$

После преобразований (5.4), (5.5), (5.3) получаем

$$A' = \frac{(-1)^{k+1}}{2} (A'_1 - A'_2), \quad B' = \frac{(-1)^{k+1}}{2} (B'_1 - B'_2) \quad (5.6)$$

$$C = \lambda_T I + (\alpha - \gamma_0 \lambda_T) J = \lambda_T I + \frac{(-1)^{k+1}}{2} (J_1 - J_2) \quad (5.7)$$

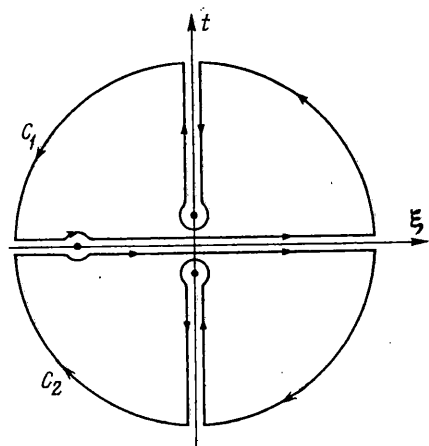
$$A'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } \xi \exp(i\xi(a-x)) d\xi}{\xi + \pi k / a}, \quad A'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } \xi \exp(-i\xi(a+x)) d\xi}{\xi + \pi k / a} \quad (5.8)$$

$$B'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } \xi \exp(i\xi(a-x)) d\xi}{(\gamma_0 + |\xi|)(\xi + \pi k / a)}, \quad B'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } \xi \exp(-i\xi(a+x)) d\xi}{(\gamma_0 + |\xi|)(\xi + \pi k / a)} \quad (5.9)$$

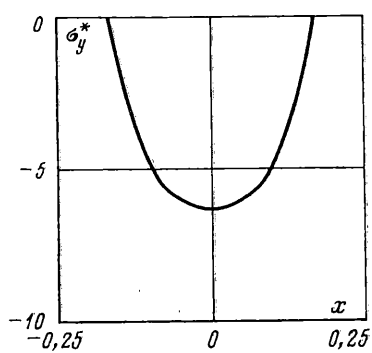
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin((\xi + \pi k / a)a) \exp(-i\xi x) d\xi}{(\gamma_0 + |\xi|)(\xi + \pi k / a)} \quad (5.10)$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\xi(a-x)) d\xi}{(\gamma_0 + |\xi|)(\xi + \pi k / a)}, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\xi(a+x)) d\xi}{(\gamma_0 + |\xi|)(\xi + \pi k / a)} \quad (5.11)$$

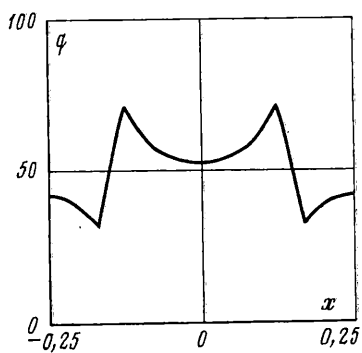
$$I = \exp(i\pi k / a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta a}{\eta} \exp(-i\eta x) d\eta \quad (5.12)$$



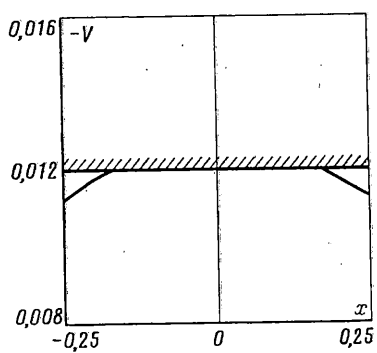
Фиг. 2



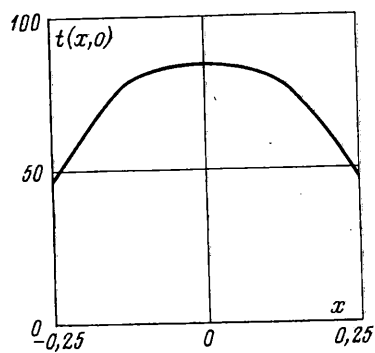
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Применяя для A'_1 , B'_1 , J_1 интегрирование по контуру C_1 , а для A'_2 , B'_2 , J_2 – по контуру C_2 (фиг. 2), получаем

$$A' = (-1)^{k+1} i \left\{ \int_0^\infty \frac{(\pi k / a - it) \exp(-(a-x)t)}{(\pi k / a)^2 + t^2} dt + \int_0^\infty \frac{(\pi k / a + it) \exp(-(a+x)t)}{(\pi k / a)^2 + t^2} dt \right\} + \\ + \operatorname{sign} k \pi i \exp(i \pi k x / a) \quad (5.13)$$

$$B' = (-1)^{k+1} i \gamma_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{(\pi k / a - it) \exp(-(a-x)t)}{((\pi k / a)^2 + t^2)(\gamma_0^2 + t^2)} dt - \int_0^\infty \frac{(\pi k / a + it) \exp(-(a+x)t)}{((\pi k / a)^2 + t^2)(\gamma_0^2 + t^2)} dt \right\} + \\ + \operatorname{sign} k \frac{\exp(i \pi k x / a)}{\gamma_0 + \pi k / a} \quad (5.14)$$

$$J = (-1)^{k+1} \left\{ \int_0^\infty \frac{(\pi k / a - it) t \exp(-(a-x)t)}{((\pi k / a)^2 + t^2)(\gamma_0^2 + t^2)} dt - \int_0^\infty \frac{(\pi k / a + it) t \exp(-(a+x)t)}{((\pi k / a)^2 + t^2)(\gamma_0^2 + t^2)} dt \right\} - \\ - \frac{i \pi \exp(i \pi k x / a)}{\gamma_0 + \pi k / a} \quad (5.15)$$

Интеграл (5.12) согласно [6] равен

$$I = \exp(i \pi k / a) \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ \frac{\pi}{2}, & |x| = a \end{cases} \quad (5.16)$$

Используя [6], полученные интегралы можно записать через функции Ei , но более удобным оказалось непосредственное вычисление интегралов с использованием численных методов. Для вычисления A и B необходимо проинтегрировать (5.4) и (5.5) по x . При этом вертикальное перемещение принималось равным нулю на некотором удалении $L - a$ от штампа: $u(L, 0) = 0$. Для численного интегрирования использовался метод Филона [7].

6. Численный анализ. Числовые расчеты проведены для случая, когда материал полупространства – алюминий ($\lambda = 5,6 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 2,6 \times 10^{10}$ Н/м²), $\alpha_T = 23,8 \times 10^{-6}$ 1/К, $\lambda_T = 209$ Вт/(м · К), $a = 0,25$ м, $\alpha = 20$ кВт/(м² · К), $\delta = -0,012$ м, $f(x) \equiv 0$, $\gamma_0 = 10$ 1/м, $N = 23$, $t_s = 373^\circ\text{К}$ (этот случай ($t_s = 100^\circ\text{С}$) соответствует нагретому штампу), $L = 10a$. В случае вычислений выявлено изменение знака σ_y на участке $[-a; a]$, что свидетельствует о существовании зон отставания штампа от полупространства. Следовательно, контакт между телами происходит на участке $[-b, b]$, и условия контакта (1.4), (1.6) следует отнести только к $|x| \leq b$. На участке $b < |x| \leq a$ поверхности контактирующих тел считаются свободными от внешних нагрузок, и требуется удовлетворение следующих граничных условий

$$\lambda_T \partial t(x, 0) / \partial y = \alpha_0 [t(x, 0) - t_s], \quad \sigma_y(x, 0) = 0, \quad b < |x| \leq a \quad (6.1)$$

где α_0^{-1} – термическое сопротивление контакта на участке $b < |x| \leq a$. При этом первоначальные граничные условия, соответствующие $|x| > a$, остаются без изменений.

Процесс уменьшения размера границы контактирования b осуществляется до тех пор, пока напряжения σ_y не перестанут изменять знак.

Окончательные числовые результаты приведены на фиг. 3–6 для силы P , вычисляемой по формуле

$$P = - \int_{-a}^a \sigma_y(x) dx = \sum_{k=-K}^K a_k \exp(i \pi k x / a) = 2a a_0 \quad (6.2)$$

На фиг. 3 отображено распределение приведенных напряжений $\sigma_y^* = 2a\sigma_y/P$. В случае $\alpha_0 = 2,5 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ имеем $b \approx 0,17 \text{ м}$. Тепловые потоки на границе полупространства и вертикальные перемещения представлены на фиг. 4 и фиг. 5 соответственно. Распределение температуры в полупространстве приведено на фиг. 6. С уменьшением отрицательного δ при неизменной температуре зона контакта уменьшается. Уменьшается также и значение силы P . В граничном случае $P = 0$ и зона контакта вырождается в точку $x = 0$. При заданной силе P с уменьшением положительной температуры происходит увеличение зоны контакта. Жесткое перемещение штампа вверх при этом уменьшается и может достигать положительных значений. Поэтому дифференцирование граничных условий по горизонтальной координате, уничтожающее константу δ , исключает возможность анализировать реальную картину напряженно-деформированного состояния взаимодействующей пары.

Таким образом, учет сближения или отдаления пары, как уже отмечалось в [4], является обязательным условием правильного понимания механики контактного взаимодействия. При одинаковых температурах и различных силах уровень взаимодействия тел δ будет различным. При одинаковых уровнях δ , но различных температурах штампа, площадки контакта могут оказаться равными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Comninou M., Barber J.R., Dundurs J.* Heat conduction through flat punch // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. № 4. P. 871–874.
2. *Левицкий В.П., Оньишкевич В.М.* Давление жесткого штампа с плоским основанием, нагретым до постоянной температуры, на упругое полупространство // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 7. С. 43–50.
3. *Levytsky V.P.* Interaction of rigid cylinder with elastic half-space by heat generation of the contact area // Intern. J. Engng Sci. 1994. V. 32. № 11. P. 1693–1702.
4. *Левицкий В.П., Яськевич И.Т., Оньишкевич В.М.* Тепловые эффекты в контактных задачах термоупругости // Трение и износ. 1994. Т. 15. № 3. С. 358–365.
5. *Yevtushenko A.A., Ukhanska O.M.* Plane contact problem of thermelasticity with quasi-steady frictional heating // Intern. J. Engng Sci. 1993. V. 31. № 11. P. 1565–1573.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Львов

Поступила в редакцию
5.XII. 1994