

УДК 539.3

© 1997 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ
С УЧЕТОМ ЗОН ЛОКАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Классическая постановка контактных задач для упругих тел сильно идеализирована, что приводит к появлению нефизичных сингулярностей в выражении для контактного давления в местах резкого изменения формы оснований взаимодействующих тел. В частности известно, что в случае решения по классической схеме контактных задач с фиксированной краем штампа зоной контакта в выражении для контактного давления присутствует характерная корневая особенность, обращающая в бесконечность контактное давление на контуре области контакта. Предлагается новая постановка и решение таких контактных задач, учитывающие возникновение и развитие зон локального разрушения материала в окрестности контура области контакта. В случае идеального упругопластического материала разрушение моделируется коническими поверхностями скольжения. Такой подход приводит к ослаблению сингулярности контактного давления на контуре области контакта (вплоть до полного ее исчезновения) и более адекватному действительности распределению контактного давления по области контакта.

1. Рассмотрим классическую задачу о вдавлении жесткого штампа в полуплоскость в условиях плоской деформации (фиг. 1). Граничные условия задачи имеют вид

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (|x| < \infty), \quad \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (a < |x| < \infty) \quad (1.1)$$

$$v'_x(x, 0) = -[\alpha - f'(x)] \quad (|x| \leq a)$$

напряжения на бесконечности исчезают. Здесь a – полуширина области контакта, α – угол поворота штампа под действием вдавливающей силы P , приложенной с эксцентриситетом e , $f(x)$ – функция, описывающая форму основания штампа.

Чтобы исследовать распределение напряжений в полуплоскости под одним из краев штампа, растянем, например, окрестность точки $x = a$ и введем в ней цилиндрическую систему координат (r, φ) . Тогда придем к частному случаю задачи (1.1) с граничными условиями

$$\tau_{r\varphi}(r, 0) = 0, \quad v'_r(r, 0) = -g(r), \quad \tau_{r\varphi}(r, \pi) = \sigma_\varphi(r, \pi) = 0 \quad (1.2)$$

напряжения на бесконечности исчезают. Здесь функция $g(r)$ связана с функцией $\alpha - f'(x)$ очевидными преобразованиями и исчезает на бесконечности не слабее, чем r^{-1} . Решение задачи может быть легко получено с помощью интегрального преобразования Меллина. В частности, асимптотика этого решения при $r \rightarrow 0$ для напряжений имеет вид

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} Kr^{-1/2} \left(5 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{3}{2}Kr^{-1/2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2}Kr^{-1/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2}\right)$$

где коэффициент интенсивности напряжений $K > 0$.

Из (1.3) видим, что все напряжения имеют характерную корневую сингулярность при $r = 0$, контактное напряжение $\sigma_{\varphi}(r, 0) = -Kr^{-1/2}$, а напряжение $\tau_{r\varphi}$ при $r > 0$ достигает минимального значения, когда $\varphi = \varphi_* = 2\arccos(\sqrt{2/3}) \approx 70,53^\circ$. Из этого краткого анализа очевидно, что в окрестности точки $r = 0$ развиваются пластические деформации, причем первоначально они будут локализованы на линии $\varphi = \varphi_*$.

Далее будем предполагать, что материал идеально упругопластичный, и введем в рамках задачи (1.2) в рассмотрение линию скольжения, исходящую из точки $r = 0$ и занимающую часть линии $\varphi = \varphi_*$. Причем на линии скольжения $\tau_{r\varphi} = \tau_s$, где τ_s – предел текучести на сдвиг. Подобные линии скольжения вводились ранее с целью учета развития пластических деформаций в условиях плоской деформации вблизи устья трещины в идеально упругопластическом теле [1, 2].

С учетом сказанного граничные условия задачи (1.2) в цилиндрической системе координат, изображенной на фиг. 2, теперь примут вид

$$\tau_{r\varphi}(r, \beta - \pi) = 0, \quad v'_r(r, \beta - \pi) = -g(r), \quad \tau_{r\varphi}(r, \beta) = \sigma_{\varphi}(r, \beta) = 0 \quad (1.4)$$

$$\varphi = 0: \langle \tau_{r\varphi} \rangle = \langle \sigma_{\varphi} \rangle = \langle v \rangle = 0$$

$$\varphi = 0, \quad r < l: \tau_{r\varphi} = -\tau_s; \quad \varphi = 0, \quad r > l: \langle u \rangle = 0$$

напряжения на бесконечности исчезают. Здесь $\beta = \pi - \varphi_*$, l – длина линии скольжения. Такая задача с помощью интегрального преобразования Меллина и техники метода Винера – Хопфа рассмотрена в работе [3], причем для определения l использовалось условие ограниченности напряжений в точке $r = l$, $\varphi = 0$.

2. К сожалению анализ напряженного состояния в окрестности точки $r = 0$ в задаче (1.4) затруднен из-за сложной формы ее решения. Однако, необходимые данные об этом напряженном состоянии могут быть найдены из рассмотрения более простой однородной задачи с условиями

$$\tau_{r\varphi}(r, \beta - \pi) = v'_r(r, \beta - \pi) = 0, \quad \tau_{r\varphi}(r, \beta) = \sigma_{\varphi}(r, \beta) = 0 \quad (2.1)$$

$$\varphi = 0: \langle \tau_{r\varphi} \rangle = \langle \sigma_{\varphi} \rangle = \langle v \rangle = 0$$

$$\varphi = 0: \tau_{r\varphi} = 0$$

где напряжения на бесконечности исчезают.

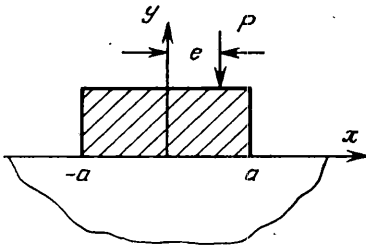
Разыскивая решение уравнений Ламе в виде

$$u_i = r^\gamma f_i(\varphi), \quad v_i = r^\gamma g_i(\varphi) \quad (2.2)$$

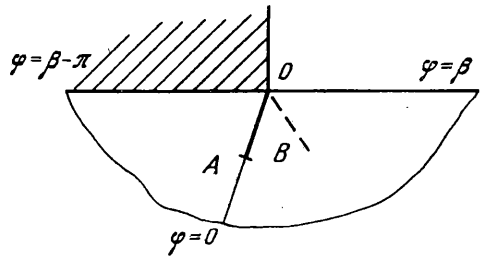
где $i = 1$ при $\varphi \in [0, \beta]$ и $i = 2$ при $\varphi \in [\beta - \pi, 0]$, найдем

$$f_i(\varphi) = (\kappa - \gamma)[a_i \sin(1 - \gamma)\varphi + b_i \cos(1 - \gamma)\varphi] - \quad (2.3)$$

$$-(1 + \gamma)[-c_i \sin(1 + \gamma)\varphi + d_i \cos(1 + \gamma)\varphi]$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$g_i(\varphi) = (\kappa + \gamma)[a_i \cos(1 - \gamma)\varphi - b_i \sin(1 - \gamma)\varphi] + (1 + \gamma)[c_i \cos(1 + \gamma)\varphi + d_i \sin(1 + \gamma)\varphi]$$

Здесь $\kappa = 3 - 4\nu$, ν – коэффициент Пуассона, a_i, b_i, c_i и d_i – произвольные постоянные. Определяя затем эти постоянные из граничных условий (2.1), убедимся, что нетривиальное решение задачи будет существовать, если γ ненулевой корень трансцендентного уравнения

$$[\gamma \sin 2\beta - \sin 2\gamma(\pi - \beta)](\gamma \sin 2\beta + \sin 2\gamma\beta) + \quad (2.4)$$

$$+ [\cos 2\beta - \cos 2\gamma(\pi - \beta)][1 - \cos 2\gamma\beta - \gamma^2(1 - \cos 2\beta)] = 0$$

Из энергетических соображений нужно взять корень, у которого $0 < \operatorname{Re} \gamma < 1$. Такой корень один, он является вещественным и значению $\beta = \pi - \varphi_* \approx 109,47^\circ$ отвечает $\gamma = 0,7716$.

Далее нетрудно убедиться, что

$$\sigma_\varphi(r, \beta - \pi) = -Nr^{-1+\gamma} \quad (2.5)$$

где коэффициент интенсивности $N > 0$. Именно такое представление будет иметь место в задаче (1.4) для контактного напряжения в окрестности точки $r = 0$.

Итак, введение линии скольжения, исходящей от края штампа, снизило сингулярность контактного напряжения, но не устранило ее полностью. Это означает, что не ликвидирована до конца причина, вызывающая развитие пластических деформаций в окрестности края штампа, и, следовательно, вслед за линией скольжения OA , направленной под углом φ_* к подошве штампа (фиг. 2), должны появиться другие линии скольжения: вторая OB , символически обозначенная на фиг. 2 пунктиром, затем третья и так далее до полного исчерпания сингулярности в точке $r = 0$. Может быть таких линий скольжения будет конечное число, а возможно, что линии скольжения в итоге образуют плотный веер в окрестности края штампа, как это, например, следует из классического идеально жесткопластического решения Хилла [4]. Сейчас на этот вопрос трудно ответить из-за значительных технических трудностей рассмотрения контактной задачи типа (1.4) с большим числом линий скольжения. Здесь, по-видимому, нужно рассчитывать на привлечение методов компьютерной алгебры [5]. Важно лишь отметить, что, сколько бы ни взяли линий скольжения, формула (2.5) будет сохраняться всякий раз. В ней лишь будет меняться величина γ , достигающая единицы в случае полного исчезновения сингулярности.

3. Заметим, что в пространственных контактных задачах с фиксированной краем штампа зоной контакта Ω вместо линий скольжения в окрестности контура L области Ω в деформируемом теле будут образовываться конические поверхности скольжения.

Для оценки влияния таких поверхностей на закон распределения контактных давлений нужно ввести локальную систему координат (n, s) , связанную с контуром L (см., например, [6]), и плавно склеить решение типа погранслоя (2.5) (с коэффициентом N зависящим от s) с проникающим решением – классическим решением задачи. Ниже приведем примеры такого построения.

В случае плоской деформации классическое решение контактной задачи о вдавлении силой P плоского наклонного штампа в полуплоскость для контактного давления $q(x)$ и угла поворота штампа под действием приложенного к нему момента Pe имеет вид [7]:

$$q(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 + \frac{2ex}{a^2} \right), \quad a = \frac{2Pe}{\pi a^2 \vartheta} \quad (3.1)$$

где $\vartheta = G / (1 - \nu)$ – контактная жесткость, G – модуль сдвига.

Допустим, что с учетом влияния линий скольжения, исходящих из краев штампа $x = \pm a$, и в силу (2.5) функцию $q(x)$ можно аппроксимировать выражением

$$q_*(x) = \frac{a^{1-2\gamma}}{(a^2 - x^2)^{1-\gamma}} \left(A + B \frac{x}{a} + C \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (3.2)$$

и используем для определения постоянных A, B, C следующие условия срачивания:

$$P = \int_{-a}^a q_*(\xi) d\xi, \quad Pe = \int_{-a}^a \xi q_*(\xi) d\xi, \quad q_*(0) = q(0) = \frac{P}{\pi a} \quad (3.3)$$

В результате для $q_*(x)$ получим

$$q_*(x) = \frac{Pa^{1-2\gamma}}{\pi(a^2 - x^2)^{1-\gamma}} \left[1 + \frac{\mu ex}{a^2} + (\mu - 1 - 2\gamma) \frac{x^2}{a^2} \right] \quad (3.4)$$

$$\mu = 2\sqrt{\pi} \Gamma(3/2 + \gamma) [\Gamma(\gamma)]^{-1}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Вторую формулу (3.1) принимаем неизменной, считая, что на интегральную зависимость между α и Pe учет линий скольжения оказывает слабое влияние.

В случае осесимметричной деформации классическое решение контактной задачи о вдавлении силой P плоского штампа в полупространство для контактного давления $q(r)$ и осадки штампа δ под действием силы P имеет вид [7]:

$$q(r) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \delta = \frac{P}{4a\vartheta} \quad (3.5)$$

где a – радиус области контакта. Здесь при учете влияния конической поверхности скольжения, отходящей от контура $r = a$ вглубь полупространства под углом φ_* к подошве штампа, с помощью описанной выше процедуры срачивания будем иметь

$$q_*(r) = \frac{Pa^{1-2\gamma}}{2\pi a (a^2 - r^2)^{1-\gamma}} \left[1 + (1 + \gamma)(-1 + 2\gamma) \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (3.6)$$

Вторую формулу (3.5) принимаем неизменной, считая, что на интегральную зависимость между δ и P учет конической поверхности скольжения оказывает слабое влияние.

В заключение заметим, что линии скольжения или поверхности скольжения должны исходить также от точек или линий резкого изменения формы оснований взаимодействующих тел, находящихся внутри области их контакта. Например, линии скольжения должны исходить от вершины клинообразного штампа (плоская задача), а поверхности скольжения – от вершины конусообразного штампа (осесимметричная задача). Ибо, как известно из классических решений этих задач [7], контактное давление в вершинах указанных штампов имеет логарифмическую особенность.

Работа выполнена в соответствии с программой гранта РФФИ (94-01-00133а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черепанов Г.П.* Пластические линии разрыва в конце трещины // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 720–728.
2. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 416 с.
3. *Александров В.М., Кипнис Л.А.* Линия скольжения в конце штампа, вдавливаемого в полуплоскость // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 266–271.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. *Климов Д.М., Руденко В.М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.
6. *Александров В.М.* Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 61–73.
7. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.11.1996