**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997**

УДК 531.35

© 1997 г. **Ю.И. БЕРДЫШЕВ**

ОБ ОБЛАСТЯХ ДОСТИЖИМОСТИ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

Установлена структура областей достижимости материальной точки в ньютоновском поле при одноимпульсном переходе с эллиптической орбиты и получено аналитическое описание их границ.

Рассматривается материальная точка (МТ), движущаяся в ньютоновом поле [1, 2] по невертикальной эллиптической исходной орбите (ИО). Задача состоит в определении множества G всех точек в плоскости ИО, в которые МТ может попасть в произвольный момент времени с ИО с помощью импульса скорости, ограниченного по величине заданным числом c_1. Множество G будем называть областью достижимости. При фиксированной точке приложения импульса скорости область достижимости (в этом случае будем обозначать ее через D) построена и исследована при малых c_1 в [3], при любых – в [4, 5]. Там же приведено аналитическое описание ее границ. Очевидно, что G – суть объединение всех областей D, получаемых при перемещении точки приложения импульса по всей ИО. Используя вид и свойства области D (см. [4, 5]) можно убедиться, что при круговой ИО в зависимости от величины c_1 область G будет либо кольцом, ограниченным двумя окружностями с радиусами $r_+ = r_0(V_0+c_1)^2/(2V_0^2-(V_0+c_1))$, $r_- = r_0(V_0-c_1)^2/(2V_0^2-(V_0-c_1))$ (r_0 – длина радиуса круговой ИО, V_0 – величина скорости на ИО), либо совпадать с плоскостью ИО за вычетом круга с центром в точке притяжения и радиусом r_-, либо совпадать с плоскостью ИО. Первый случай реализуется при $c < 2^{1/2}-1$ $(c = c_1/V_0)$, второй – при $2^{1/2}-1 \leqslant c < 1$, третий – при $c \geqslant 1$. В случае эллиптической ИО граница области G деформируется. Перейдем к выводу необходимых условий принадлежности точек границе области G.

Пусть $l(\vartheta_1)$ – луч с началом в точке притяжения, который образует с линией апсид угол ϑ_1; $L(\vartheta, \lambda)$ – траектория, порожденная импульсом (λ, c_1), приложенным на исходной орбите в точке M с истинной аномалией ϑ:

$$\begin{gathered}
F_1 = W_n^2, \quad F_2 = W_n W_r, \quad c_0 = \mu(1-\cos\psi) \\
F_3 = c_0 + F_1\cos\psi - F_2\sin\psi \\
W_n = V_n(1+c\cos\lambda) - V_r c\sin\lambda \\
W_r = V_r(1+c\cos\lambda) + V_n c\sin\lambda \\
c = c_1/V, \quad V = (V_r^2+V_n^2)^{1/2} \\
r_0 = p/(1+e\cos\vartheta); \quad \psi = \vartheta_1 - \vartheta
\end{gathered} \tag{1}$$

где V_n, V_r – трансверсальная и радиальная составляющие векторы скорости МТ на ИО в точке M, p, e – параметры ИО.

Из условия Гоудела [6, стр. 117] вытекает соотношение (см. [4, стр. 27]):

$$r = r_0 F_1 / F_3 \tag{2}$$

определяющее зависимость длины радиус-вектора точки пересечения траектории $L(\vartheta, \lambda)$ с лучом $l(\vartheta_1)$. Выясним: каким условиям должны удовлетворять углы ϑ и λ, чтобы при фиксированном угле ϑ_1 величина $r(2)$ принимала экстремальное значение. Необходимым условием экстремума функции $(\vartheta, \lambda) \to r(2)$ является обращение в нуль частных производных этой функции по ϑ и λ. Как известно [4, 5], равенство нулю производной про λ эквивалентно соотношению

$$\alpha \sin \psi + \beta \cos \psi = \beta \tag{3}$$

$$\psi = \vartheta_1 - \vartheta, \qquad \alpha = V^2 F_1 (c + \cos\lambda)$$

$$\beta = 2\mu W_n (V_n \sin\lambda + V_r \cos\lambda) / r_0$$

Далее "штрих" сверху будет обозначать частную производную по переменной ϑ. После некоторых преобразований, которые здесь опускаются, получим

$$r' F_3^2 = A \sin\psi + B \cos\psi + K$$

$$A = -r_0' F_1 F_2 + r_0 F + \mu F_1 - r_0 F_1^2$$

$$K = \mu F_1' + 2\mu r_0 F_1 e \sin\vartheta / p \tag{4}$$

$$B = -K + \gamma, \qquad \gamma = F_1 (r_0' F_1 - r_0 F_2)$$

$$F = F_1 F_2' - F_1' F_2 = W_n (W_n W_r' - W_n' W_2)$$

$$W_n' = V_n'(1 + c\cos\lambda) - V_r' c \sin\lambda + c_1 (1/V)'(V_n \cos\lambda - V_r \sin\lambda)$$

$$W_r' = V_r'(1 + c\cos\lambda) + V_n' c \sin\lambda + c_1 (1/V)'(V_r \cos\lambda + V_n \sin\lambda)$$

$$V_n' = (\mu / p)^{1/2} e \sin\vartheta, \qquad V_r' = (\mu / p)^{1/2} e \cos\vartheta$$

$$(1/V)' = e \sin\vartheta / (V(1 + 2e\cos\vartheta + e^2))$$

Поэтому вторым (после (3)) необходимым условием экстремума функции $(\vartheta, \lambda) \to$ $\to r(2)$ является равенство

$$A \sin\psi + B \cos\psi = -K \tag{5}$$

Таким образом, для определения экстремальной точки (ϑ^0, λ^0) при фиксированном угле ϑ_1 имеем два уравнения (3), (5). Пусть $r^0(\vartheta_1)$ – значение $r(2)$ при $\vartheta = \vartheta^0, \lambda = \lambda^0$. Решая систему (3), (5) для каждого параметра ϑ_1 из отрезка $[0, 2\pi]$ получим множество точек

$$G_* = \{(\vartheta_1, r^0(\vartheta_1)), \quad 0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 2\pi\} \tag{6}$$

содержащих границу области достижимости G. Ввиду трансцендентности уравнений (3), (5) получение аналитических выражений для ϑ^0, λ^0 не представляется возможным. Заметим, что четыре точки из множества G_* (6) в полной системе ϑ, r (см. [4, 5])

можно указать сразу:

$$(0, R_1),\ (\pi, R_2),\ (0, Q_1),\ (\pi, Q_2) \tag{7}$$

$$R_i = r_i W_i^2 / (2\mu / r_i - W_i^2), \qquad W_1 = (\mu / p)^{1/2}(1-e) + c_1$$

$$W_2 = (\mu / p)^{1/2}(1+e) + c_1, \qquad r_1 = p / (1-e), \qquad r_2 = p / (1+e)$$

$$Q_i = r_i V_i^2 (2\mu / r_i - V_i^2), \qquad V_i = W_i - 2c_1 \quad (i = 1, 2)$$

Из них первые две будут принадлежать внешней границе, две последние – внутренней границе области G. При этом первой точке соответствуют $\vartheta^0 = \pi$, $\lambda^0 = 0$, второй – $\vartheta^0 = 0$, $\lambda^0 = 0$, третьей – $\vartheta^0 = \pi$, $\lambda^0 = \pi$, четвертой – $\vartheta^0 = 0$, $\lambda^0 = \pi$. Действительно, указанные тройки $(\vartheta^0, \lambda^0, \vartheta_1)$ удовлетворяют уравнениям (3), (5).

Можно показать справедливость следующих тождеств

$$r_0' V_n - r_0 V_r = 0, \qquad r_0' V_r + r_0 V_n = (\mu p)^{1/2} V^2 / V_n^2$$

$$2 V_n V_r r_0 - r_0'(V_n^2 - V_r^2) = \mu e V^2 \sin\vartheta / V_n^2 \tag{8}$$

$$V_r' V_n - V_r V_n' = \mu e(e + \cos\vartheta) / p$$

$$-r_0' V_n V_r - r_0 V_n^2 + r_0 e(e + \cos\vartheta)\mu / p + \mu = 0$$

После некоторых громоздких преобразований, которые здесь опускаются с использованием соотношений (8), формулы (4) существенно упрощаются

$$\gamma = W_n^3 c(\mu / p)^{1/2} V^2 \sin\lambda / V_n^2 \tag{9}$$

$$K = 2\mu W_n(-(\mu / p) ec(e + \cos\vartheta)\sin\lambda +$$

$$+ c(V_n \cos\lambda - V_r \sin\lambda) e \sin\vartheta / (1 + 2\cos\vartheta + e^2)$$

$$F = W_n^2 e(\mu / p)(c \sin\vartheta \sin\lambda + (e + \cos\vartheta)(1 + 2e\cos\vartheta + e^2))$$

$$A = -\mu W_n^2 c\{(2 + c) - e\sin\lambda[(1 + c)V^2 \sin\vartheta / V_n^2 + r_0((e + \cos\vartheta)c \sin\lambda + \sin\vartheta) / p]\}$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ соотношения (9) принимают следующий вид:

$$A = -\mu c(2 + c) W_n^2, \qquad \gamma = 0$$

$$B = -2\mu W_n V_n c e \sin\vartheta / (1 + 2e\cos\vartheta + e^2)$$

Теперь уравнение (5) представимо в виде

$$A_0 \cos(\psi / 2) - B_0 \sin(\psi / 2) = 0 \tag{10}$$

$$A_0 = (1 + c)(2 + c), \qquad B_0 = 2e \sin\vartheta / (1 + 2e\cos\vartheta + e^2)$$

Поскольку $\psi = \vartheta_1 - \vartheta$, то из (10) имеем

$$\vartheta_1 = \begin{cases} \vartheta + \pi - 2\,\mathrm{arctg}(A / B), & B \neq 0 \\ \vartheta + \pi, & B = 0 \end{cases} \tag{11}$$

При изменении параметра ϑ в пределах от нуля до 2π точка (ϑ_1, r), координаты которой определяются формулами (11), (2), описывает внешнюю границу области G в случае, когда используется лишь касательный импульс (т.е. такой импульс (λ, Δ),

$\Delta \leqslant c_1$, у которого $\lambda = 0$). Из (11) следует, что если $0 < \vartheta < \pi$, то $\psi < \pi$, если $\pi < \psi < 2\pi$, то $\psi > \pi$ и $\psi = \pi$ при $\vartheta = \pi$, $\vartheta = 0$. Положив в (9) угол $\lambda = \pi$ можно получить формулы, аналогичные (11), (2), описывающие внутреннюю границу области G.

Вернемся к исследованию общего случая: $\lambda \neq 0$. Заметим, что параметр ϑ_1 можно исключить из системы (3), (5) и получить одно уравнение, связывающее искомые величины ϑ^0, λ^0. Например, если положить $t = \mathrm{tg}(\psi/2)$, использовать равенство $t = \alpha/\beta$, вытекающее из (3) при $\beta \neq 0$, а затем выразить $\sin\psi$, $\cos\psi$ через t и подставить в (5), то после некоторых преобразований получим искомое уравнение

$$2\alpha_*\beta_*A_* - 2\alpha_*^2B_* + \gamma_*(\beta_*^2 - \alpha_*W_n^2) = 0 \tag{12}$$

$$\alpha_* = \alpha / W_n^2, \quad \beta_* = \beta / W_n, \quad \gamma_* = \gamma / W_n^3$$

$$A_* = A / W_n^2, \quad B_* = B / W_n$$

Тогда выбирая, например, ϑ в качестве параметра можно для каждого ϑ из отрезка $[0, 2\pi]$ определять соответствующее λ из уравнения (12). Затем по паре (ϑ, λ) находить углы ψ, $\vartheta_1 = \psi + \vartheta$ из (3) и величину r из (2). Найденная пара (ϑ_1, r) будет зависеть от параметра ϑ, а множество точек

$$G = \{(\vartheta_1, r), \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi\} \tag{13}$$

содержать границу области G.

Пусть N_1, N_2 – эллипсы, проходящие через точки (7), т.е. эллипсы

$$\rho = p_1 / (1 + e_1\cos\vartheta), \quad \rho = p_2 / (1 + e_2\cos\vartheta) \tag{14}$$

$$p_1 = 2R_1R_2 / (R_1 + R_2), \quad e_1 = (R_1 - R_2) / (R_1 + R_2)$$

$$p_2 = 2Q_1Q_2 / (Q_1 + Q_2), \quad e_2 = (Q_1 - Q_2) / (Q_1 + Q_2)$$

Пусть G_1, G_2 – внешняя и внутренняя границы области G при касательном импульсе. Проведенный численный эксперимент показал, что внешняя граница множества (13) лежит между эллипсом N_1 и линией G_1, а внутренняя граница – между эллипсом N_2 и линией G_2. Кроме того, оказывается, что уравнение (12) имеет два корня, первый из которых близок к нулю, второй к π. Поэтому линеаризуя это уравнение по λ можно найти его приближенное решение и выписать приближенные конечные формулы описания границы области достижимости G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
2. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 445 с.
3. *Кирпичников С.Н.* Область достижимости при одноимпульсном полете с кеплеровой орбиты // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 4. С. 42–46.
4. *Бердышев Ю.И.* О некоторых задачах построения областей достижимости в ньютоновском поле // Автоматика. 1992. № 5. С. 25–30.
5. *Бердышев Ю.И.* К вопросу о построении областей достижимости в ньютоновском поле // Изв. АН. МТТ. 1993. № 5. С. 3–7.
6. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. 448 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 04.01.1994