МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 534.13

© 1997 г. А.В. СТЕПАНОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.

Ч. 1. ГАШЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ НАИМЕНЬШЕЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

В ряде работ рассматривается задача ограничения коэффициента передачи гармонической силы для упругой системы, которая имеет одну степень свободы и к которой присоединен линейный упруго-вязкий гаситель колебаний. Имеется приближенное решение следующей задачи: для заданной массы гасителя найти такие значения коэффициентов жесткости и вязкости, чтобы минимизировать максимальное по всему диапазону значение коэффициента передачи [1] или его обобщения, если амплитуда внешней силы известным образом зависит от частоты, – амплитуда вынужденных колебаний [2]. Эта задача может быть обращена: найти минимально возможную массу гасителя и параметры связей таким образом, чтобы максимум обобщенного коэффициента передачи равнялся заданной величине. Для нескольких частных случаев зависимости амплитуды внешней силы от частоты автором найдены решения обратной задачи [3]. Ниже ставятся задачи оптимального гашения вынужденных колебаний в упругих системах с несколькими степенями свободы и даются способы решения этих задач.

Если упругая система имеет несколько степеней свободы, то коэффициент передачи является функцией не только частоты, но и двух точек: точки, к которой прикладывается внешняя сила, и точки, перемещение которой рассматривается. Поэтому задача гашения может иметь разные постановки и решения в зависимости от того, какие коэффициенты передачи необходимо ограничивать и в какой области частот.

Предположим, что упругая система общего вида занимает объем V, имеет массу $M < \infty$, N степеней свободы (возможно, $N = \infty$), собственные частоты $\Omega_1 < \Omega_2 < \ldots$ $\ldots < \Omega_N$ и нормированные на массу M собственные функции $\mathbf{u}_j(X)$ (X – произвольная точка объема V; $j = 1, 2, \ldots, N$). Пусть далее L, X, Y – точки объема V; к первой из них присоединен пружиной жесткости c и демпфером с коэффициентом вязкого трения h гаситель в виде точечной массы m, перемещающийся в направлении орта $\mathbf{n}$; к точке X приложена гармоническая сила $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 e^{i\Omega t}$, тогда перемещение точки Y также может быть гармоническим с частотой Ω: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 e^{i\Omega t}$, а $\mathbf{y}_0 = H(Y, X, \Omega)\mathbf{F}_0$ (фигура), где H – обобщенная матрица влияния (вообще говоря, комплексная, 3×3). Векторы $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{y}_0$ также могут быть комплексными. Все векторы предполагаются столбцами.

Введем безразмерные величины ($j = 1, 2, \ldots, N$):

$$\theta = mM^{-1}, \quad \sigma = c(m\Omega_1^2)^{-1}, \quad z = h(m\Omega_1)^{-1}$$

$$\nu = \Omega\Omega_1^{-1}, \quad \omega_j = \Omega_j\Omega_1^{-1}, \quad \upsilon_j = \mathbf{n}^T\mathbf{u}_j(L)$$

$$\upsilon_{jx} = \mathbf{n}_x^T \mathbf{u}_j(X), \quad \upsilon_{jy} = \mathbf{n}_y^T \mathbf{u}_j(Y), \quad w_j = \upsilon_{jx}\upsilon_{jy}$$

где буква (T) обозначает транспозицию.

Тогда

$$H(Y,X,\Omega) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \mathbf{u}_j(Y)\mathbf{u}_j^T(X)(\Omega_j^2 - \Omega^2)^{-1} + M^{-1}\varphi(\Omega) \sum_{j,k=1}^{N} \upsilon_j [\upsilon_k \mathbf{u}_j(Y) - \right.$$

$$\left. -\upsilon_j \mathbf{u}_k(Y)]\mathbf{u}_k^T(X)[(\Omega_j^2 - \Omega^2)(\Omega_k^2 - \Omega^2)]^{-1} \right\} \left[M + \varphi(\Omega) \sum_{j=1}^{N} \upsilon_j^2 (\Omega_j^2 - \Omega^2)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\varphi(\Omega) = -m\Omega^2 (ih\Omega + c)(-m\Omega^2 + ih\Omega + c)^{-1}$$

где $\varphi(\Omega)$ – передаточная функция гасителя [4].

К задаче об оптимизации параметров гасителя, приведенной в начале работы, ближе всего следующая. Зафиксируем точки X, Y, орты $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$; предположим, что $\mathbf{F_0} = F_0\mathbf{n}_x$, и будем рассматривать проекцию $\mathbf{y}(t)$ на $\mathbf{n}_y$.

Она будет равна

$$\mathbf{n}_y^T \mathbf{y}(t) = \mathbf{n}_y^T H(Y,X,\Omega)\mathbf{n}_x F_0 e^{i\Omega t}$$

Функция $h_*(Y,X,\mathbf{n}_y,\mathbf{n}_x,\Omega) = |\mathbf{n}_y^T H(Y,X,\Omega)\mathbf{n}_x|$ может служить обобщением коэффициента передачи, введенного для случая $N = 1$; в частном случае она может совпадать с модулем одного из элементов матрицы $H(Y, X, \Omega)$ (если векторы $\mathbf{n}_x$ и $\mathbf{n}_y$ имеют по одной компоненте, равной единице, а остальные – нулевые). Безразмерный коэффициент передачи равен

$$\rho(\nu) = M\Omega_1^2 h_*(Y,X,\mathbf{n}_y,\mathbf{n}_x,\Omega_1\nu) = |[\gamma_*(\nu) + f(\nu)q_*(\nu)][1 + f(\nu)\gamma(\nu)]^{-1}| \tag{1}$$

$$f(\nu) = p(\nu)q^{-1}(\nu), \quad p(\nu) = -\nu^2\theta(iz\nu + \sigma), \; q(\nu) = -\nu^2 + iz\nu + \sigma, \quad \gamma(\nu) = \sum_{j=1}^{N} \upsilon_j^2(\omega_j^2 - \nu^2)^{-1}$$

$$\gamma_*(\nu) = \sum_{j=1}^{N} w_j(\omega_j^2 - \nu^2)^{-1}$$

$$q_*(\nu) = \Sigma \begin{vmatrix} \upsilon_j & \upsilon_{jx} \\ \upsilon_k & \upsilon_{kx} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \upsilon_j & \upsilon_{jy} \\ \upsilon_k & \upsilon_{ky} \end{vmatrix} [(\omega_j^2 - \nu^2)(\omega_k^2 - \nu^2)]^{-1} \tag{2}$$

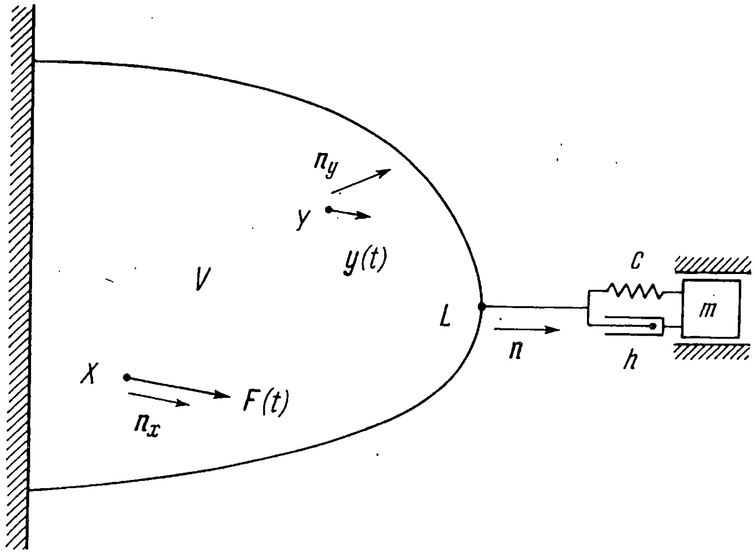
суммирование распространяется на все $1 \leqslant j < k \leqslant N$.

$$Q(\nu) = \prod_{j=1}^{N} [1 - (\omega_j^{-1}\nu)^2], \quad P(\nu) = Q(\nu)\gamma(\nu)$$

$$P_*(\nu) = Q(\nu)\gamma_*(\nu), \quad Q_*(\nu) = Q(\nu)q_*(\nu)$$

$$\rho(\nu) = |[q(\nu)P_*(\nu) + p(\nu)Q_*(\nu)][q(\nu)Q(\nu) + p(\nu)P(\nu)]^{-1}| \tag{3}$$

Здесь $f(\nu)$ – передаточная функция гасителя; $\gamma(\nu)$ – динамическая податливость упругой системы в точке L в направлении $\mathbf{n}$; $P(\nu)$, $Q(\nu)$, $P_*(\nu)$, $Q_*(\nu)$ – целые функции. Если также точка L совпадает с точкой X или Y и, кроме того, соответственно $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$ или $\mathbf{n} = \mathbf{n}_y$, то $Q_*(\nu) = 0$.



В частном случае $N = 1$, $\omega_1 = 1$, $P(\nu) = 1$, $Q_*(\nu) = 0$; если $P_*(\nu)$ – безразмерная функция, характеризующая зависимость амплитуды внешней силы от частоты, получаем выражение для обобщенного коэффициента передачи в системе с одной степенью свободы.

Задача оптимизации параметров гасителя может быть сформулирована так: найти в зависимости от параметра h_0 такие c и h и минимально возможное m, чтобы для всех Ω, принадлежащих заданной области частот (в частном случае такой областью может быть и весь диапазон), $h_*(Y, X, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_x, \Omega) \leqslant h_0$. Это равносильно следующему: найти как функции безразмерной величины $\alpha = h_0 M\Omega_1^2$ такие θ (минимально возможное), σ и z, чтобы $\rho(\nu) \leqslant \alpha$ для всех таких ν, что $\Omega = \Omega_1\nu$ принадлежит рассматриваемой области.

Значения $\rho(\nu)$ не зависят от параметров гасителя для $\nu = 0$ и для ν, удовлетворяющих условиях $P(\nu)P_*(\nu) = Q(\nu)Q_*(\nu)$. Максимальное из этих значений обозначим через α_+. Для $\alpha < \alpha_+$ сформулированная задача оптимизации параметров гасителя не имеет решения.

Рассмотрим сначала гашение колебаний на частотах, близких к первой собственной частоте упругой системы (или, что то же самое, при ν, близких к 1). Тогда, если α достаточно велико, то должны существовать такие ν_1 и ν_2, близкие

$$\rho(\nu_1) = \rho(\nu_2) = \alpha, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\nu}(\nu_1) = \frac{\partial\rho}{\partial\nu}(\nu_2) = 0 \tag{4}$$

а θ – минимально возможное; с уменьшением α θ, σ, z, ν_1 и ν_2 должны меняться непрерывно. Условия (4) представляют собой систему четырех уравнений относительно пяти неизвестных, указанных выше; эту систему необходимо дополнить условием минимума θ. Рассматривая изменения экстремальных значений $\rho(\nu)$ при малых изменениях θ, σ и z, находим, что это условие имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial\sigma}(\nu_1)\frac{\partial\rho}{\partial z}(\nu_2) - \frac{\partial\rho}{\partial\sigma}(\nu_2)\frac{\partial\rho}{\partial z}(\nu_1) = 0 \tag{5}$$

Решение системы (4) и (5) проще, чем приведенное в [3] решение с использованием множителей Лагранжа.

В частном случае $N = 1$ решение рассматриваемой задачи совпадает с решением задачи об ограничении величиной α обобщенного безразмерного коэффициента передачи во всем диапазоне частот.

Если ввести безразмерный параметр $\varepsilon = (\nu_2^2 - \nu_1^2)(\nu_1^2 + \nu_2^2)^{-1}$ и задаться той или иной его зависимостью от α, то система (4) станет замкнутой. Если, кроме того, эта зависимость выбрана достаточно удачно, то находимое решением системы (4) значение θ может быть близко к минимально возможному [3]. Это решение далее можно уточнить, варьируя ε.

При $\alpha \to \infty$ оптимальные значения параметров гасителя, ε и $\nu_0 = [\frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2)]^{\frac{1}{2}}$ имеют следующий вид с точностью до множителей вида $1 + O(\alpha^{-2})$:

$$\theta = 2(w_1^{-1} v_1 \alpha)^{-2}, \quad \sigma = 1, \quad z = \sqrt{3}\ |w_1| \alpha^{-1}$$

$$\varepsilon = |w_1| \alpha^{-1}, \quad \nu_0 = 1 \tag{6}$$

Рассмотрим задачу об ограничении амплитуды вынужденных колебаний (в частном случае – коэффициента передачи), когда точки X, Y, векторы $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ и амплитуда внешней силы F_0 известным непрерывным образом зависят от ν. Тогда в (2) необходимо правые части умножить на $F_0(\nu)$, а выражения (3) сохраняют силу. В (6) следует положить

$$w_1 = \lim_{\nu \to 1} (1 - \nu^2) \gamma_*(\nu) = P_*(1) \prod_{j=2}^{N} (1 - \omega_j^{-2})^{-1} \tag{7}$$

Рассмотрим теперь задачу об одновременном ограничении $S < \infty$ коэффициентов передачи $\rho_k(\nu)$, определяемых формулами (1) для разных точек X, Y и ортов $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ (здесь и далее $k = 1, 2, \ldots, S$). Каждый из этих коффициентов может быть представлен в виде (3), при этом знаменатели правой части будут одинаковыми для всех k, а $P_*(\nu)$ и $Q_*(\nu)$ – нет; снабдим эти функции индексом k. Введем

$$w_{1k} = P_{*k}(1) \prod_{j=2}^{N} (1 - \omega_1^{-2})^{-1}$$

Пусть требуется в зависимости от параметра α найти такие θ (минимально возможное), σ и z, чтобы для всех k $\rho_k(\nu) \leqslant \alpha$ при таких ν, что $\Omega_1 \nu$ принадлежит области, в которой рассматривается гашение. Предположим, что среди коэффициентов w_{1k} один существенно больше по модулю, чем все остальные; можно без ограничения общности считать, что таковым является w_{11}. Тогда достаточно решить задачу об ограничении величиной α только коэффициента $\rho_1(\nu)$, т.е. систему уравнений (4) и (5), в которой $\rho(\nu) = \rho_1(\nu)$. При $\alpha \to \infty$ асимптотика оптимальных значений параметров гасителя определяется формулами (6), в которых $w_1 = w_{11}$.

Если уменьшать α, то может оказаться, что при достижении этим параметром некоторого значения α_0 коэффициент $\rho_1(\nu)$ будет иметь два гладких максимума, равных α_0 и достигаемых при $\nu = \nu_1$ и ν_2 и, кроме того, еще один коэффициент передачи (например, $\rho_2(\nu)$) будет иметь такой же гладкий максимум, достигаемый при $\nu = \nu_3$. Для частот ν_1 и ν_3 (или ν_2 и ν_3) условие (5), вообще говоря, не выполняется (надо положить $\rho(\nu) = \rho_1(\nu)$, если $\nu = \nu_1$ или $\nu = \nu_2$, но $\rho(\nu) = \rho_2(\nu)$, если $\nu = \nu_3$). Поэтому при α, близких к α_0 снизу, аналитическим критерием оптимальности значений параметров гасителя будет соблюдение условий (4) для трех частот – ν_1, ν_2 и ν_3 ($\rho(\nu)$ – те же). Эта система содержит шесть уравнений относительно такого же количества неизвестных – указанных частот, θ, σ и z. При дальнейшем уменьшении α могут быть и другие аналитические критерии оптимальности значений параметров гасителя. Наконец, если какие-либо из наибольших модулей коэффициентов $|w_{1k}|$ близки друг к другу, то даже при больших α эти критерии могут отличаться от того, который установлен для случая одного коэффициента передачи: либо должны выполняться условия (4) и (5), но частотам ν_1 и ν_2 могут соответствовать разные коэффициенты передачи, либо условия (4) должны выполняться для трех частот, которым в общей сложности соответствуют не менее двух разных коэффициентов.

Если необходимо ограничить каждое $\rho_k(\nu)$ своей величиной α_k, то, умножая $\rho_2(\nu)$ на $\alpha_1\alpha_2^{-1}$, $\rho_3(\nu)$ – на $\alpha_1\alpha_3^{-1}$ и так далее, можно первоначальную задачу свести к задаче об ограничении всех обобщенных коэффициентов передачи одной и той же величиной α_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
2. *Коренев Б.Г., Резников Л.М.* Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 302 с.
3. *Степанов А.В.* Точное решение задачи об оптимальном гашении вынужденных колебаний // Динамика систем. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. С. 106–113.
4. *Степанов А.В.* О вынужденных колебаниях линейных упругих систем с затуханием // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 317–321.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
26.XII.1994