МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 533.6.013.42

© 1997 г. М.А. ИЛЬГАМОВ, В.Н. МИШИН

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЕГУЩИХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

Рассмотрены нелинейные поперечные колебания трубопровода, шарнирно закрепленного по концам. Возбуждение осуществляется бегущими волнами давления в жидкости, заполняющей полость трубы. Найдены режимы колебаний в зависимости от соотношения длин волн в жидкости и в трубе, радиуса и толщины стенки, затухания и массовых характеристик, амплитуды волн давления. Колебания системы меняются от периодических до хаотических.

1. Введение. Исследование упругой статической устойчивости прямолинейной формы трубки и ее поперечных колебаний под действием внутреннего потока несжимаемой идеальной жидкости началось с работ [1,2]. В них и в последующих работах теоретически и экспериментально изучена роль центробежных и кориолисовых сил, обусловленных движением жидкости, кривизной упругой линии и поворотом поперечного сечения. Можно указать на обзор [3].

Влияние постоянного по времени давления в жидкости на устойчивость и колебания трубки учитывалось в работах [4,5] и в последующих публикациях. Это влияние особенно значительно для статики и динамики гибких шлангов [6,7], а также вертикальных длинных труб [8,9].

Величина давления в жидкости входит в уравнение изгиба тонкой трубки так же, как ее осевое сжатие приложенными по концам силами, т.е. в виде произведения силового фактора и кривизны упругой линии. В свою очередь нелинейной динамике статически выпученного стержня (стойки) посвящена значительная литература, например, [10,11]. При этом применяются как аналитические методы анализа нелинейных колебаний [12], так и численные методы [13].

При достаточно сильном поперечном возбуждении выпученного стержня имеют место как предельный цикл, так и хаотические поперечные колебания. Режимы таких колебаний реализуются также в сжатой пластине, находящейся в сверхзвуковом потоке газа (флаттер) [14], и в других механических системах [15]. Общим для рассматриваемых систем является наличие в них взаимодействия бифуркаций и поперечных нелинейных колебаний.

В [16] осуществляется более точный учет влияния внутреннего давления на поперечные колебания консольной трубки, из которой вытекает жидкость. Действующие на стенки поперечные и продольные силы со стороны жидкости определяются в зависимости от отношения площадей отверстия плоского сопла (размещенного в выходном сечении) и поперечного сечения трубки. Кроме того, построенная модель позволяет определить силу воздействия свободной струи жидкости на концевое сечение. Изучены флаттер вертикальной консольной трубки и хаотические колебания при возбуждении внешней поперечной силой. Экспериментальные данные по пространственным колебаниям опертой трубы, находящейся под внутренним давлением газа, и сравнение с расчетами приведены в [17].

2. Постановка задачи. В данной статье рассматриваются нелинейные свободные и параметрические колебания трубы и содержащейся в ней жидкости. Предполагается, что упругая труба представляет собой часть длинного трубопровода постоянного проходного сечения, неподвижно закреплена по концам, но с возможностью свободного поворота сечения. В силу этого деформации ее происходят независимо от остальной части трубопровода. Статический и динамический изгиб происходит в плоскости действия веса трубопровода. Учет пространственного движения дает дополнительные эффекты [17]. Они здесь не рассматриваются.

Принимаются обычные допущения для тонких стержней и трубок (трубчатых стержней): при изгибе поперечное сечение не изменяет своей формы, поворот его происходит как абсолютно твердой плоскости, остающейся нормальной к осевой линии. Кроме того прогиб $w(x, t)$ мал по сравнению с длиной L, угол поворота мал по сравнению с единицей. При этих условиях инерционную силу в осевом направлении можно не учитывать.

От источника, находящегося слева от рассматриваемого участка трубы, распространяется гармоническая волна давления. Предположим, что она проходит через этот участок без отражений и изменений. Учет имеющегося в действительности влияния колебаний трубы на волны в жидкости сильно усложнил бы анализ [5]. С целью более детального изучения роли внутреннего давления в возбуждении колебаний трубы среднюю скорость движения жидкости принимаем равной нулю. Роли скорости движения жидкости в этих задачах уделено достаточно внимания [3,7].

В соответствии со сказанным, постоянная распределенная нагрузка на горизонтальную трубку равна

$$q_0 = g(m + m_f) \tag{2.1}$$

где $m = \pi(r^2 - r_0^2)\rho$, $m_f = \pi r_0^2 \rho_f$, r и r_0 – внешний и внутренний радиусы трубки, ρ и ρ_f – плотности материала стенки и жидкости, g – гравитационное ускорение. Избыточное давление в жидкости состоит из постоянной части и бегущей волны давления

$$p(x,t) = p_0 + p\sin(\omega t - \alpha x) \tag{2.2}$$

где $\alpha = 2\pi / l = \omega / c$ – волновое число, ω, c, l – круговая частота, скорость и длина волны давления, x, t – координатная линия и время.

При изгибе трубки возникает боковая распределенная сила на нее, зависящая от внутреннего избыточного давления и кривизны упругой линии [5,7]. Предполагается, что давление не действует на торцевые сечения трубки и поэтому не создает осевой сжимающей силы. Ее воздействие исключается также отсутствием осевого перемещения на опорах. С учетом инерционной силы общая распределенная боковая нагрузка на трубку со стороны жидкости равна

$$q = -m_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \pi r_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right] \tag{2.3}$$

В том случае, когда учитывается радиальная раздача трубы под действием внутреннего давления, а на торцах ее отсутствует осевое смещение ($u = 0$), возникает осевая растягивающая сила [18], равная $\pi r_0^2(1 + r / r_0)\nu p$, где ν – коэффициент Пуассона. При этом пренебрегаем продольными волновыми эффектами, обусловленными переменной частью давления. Тогда в (2.3) вместо p будет фигурировать величина $[1-(1+r/r_0)\nu]p$. Если трубка тонкостенная и можно принять $1+r/r_0 \approx 2$, то имеем $(1-2\nu)p$. Таким образом, для труб из плохо сжимаемых материалов (типа резиновых), когда $\nu \approx (1+r/r_0)^{-1}$ или $\nu \to 1/2$, параметрический член в (2.3) исчезает, и тогда изгиб трубки не зависит от внутреннего давления. Такие случаи здесь не рассматриваются.

Нелинейное уравнение изгиба трубчатого стержня под действием поперечных сил $q_0 + q$ имеет вид

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[\frac{EF}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \in\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{m\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 + q \tag{2.4}$$

где F, I – площадь и момент инерции сечения, E – модуль упругости, ϵ – коэффициент трения.

При получении (2.4) использовано условие отсутствия осевых перемещений ($u = 0$) на опорах $x = 0, L$. Остальные условия принимаются в виде

$$w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \;\; (x = 0, L) \tag{2.5}$$

Начальные условия при $t = 0$ состоят в задании значений прогиба и скорости движения трубки. Конкретный вид их задается ниже.

В случае вертикального расположения трубки q_0 обращается в нуль. Если при этом не учитывать влияние собственных весов материала трубки и жидкости, направленных вдоль оси, выражения (2.2), (2.3) не изменяются. Уравнение (2.4) с правой частью q также сохраняет свой вид.

3. Метод решения. Функция прогиба по координате $x(0 < x < L)$ приближенно может быть задана в виде

$$w = W_1(t)\sin\frac{\pi x}{L} + W_2(t)\sin\frac{2\pi x}{L} + W_3(t)\sin\frac{3\pi x}{L} \tag{3.1}$$

удовлетворяющем условиям (2.5). Применение процедуры Бубнова – Галеркина к уравнению (2.4) с учетом (2.1), (2.2), (2.3), (3.1) приводит к системе трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$, вывод которой осуществлен в компьютерной системе *REDUCE* [19]. При интегрировании случай кратных отношений длин волн L/l необходимо рассматривать отдельно. Введем обозначения

$$w_1 = W_1 / r, \;\; w_2 = W_2 / r, \;\; w_3 = W_3 / r$$

$$q_0^* = q_0 / Er, \;\; p_0^* = p_0 / p_I, \;\; p^* = p / p_I, \;\; \tau = \omega_0 t \tag{3.2}$$

$$p_1 = \frac{\pi EI}{r_0^2 L^2 (1 - 2\nu)}, \;\; \epsilon = \frac{\epsilon\omega_0 L^4}{EI}, \;\; \omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho F}}$$

и представим эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{w}_1 + \epsilon^* \dot{w}_1 + f_1(w_1, w_2, w_3) = 0 \\ &\ddot{w}_2 + \epsilon^* \dot{w}_2 + f_2(w_1, w_2, w_3) = 0 \\ &\ddot{w}_3 + \epsilon^* \dot{w}_3 + f_3(w_1, w_2, w_3) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь и далее точкой над буквой обозначается дифференцирование по τ.

Вводя вектор $Z = (w_1, w_2, w_3, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3)$, запишем (3.3) в виде системы шести дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{Z} = \epsilon^* AZ + f(Z) \tag{3.4}$$

где структура матрицы A и вектора $f(Z)$ ясна из (3.3). Система (3.4) решается далее методом Рунге – Кутта.

В качестве начальных условий естественно взять равновесное положение трубки под действием распределенной нагрузки (2.1) и статического внутреннего давления p_0. В случае параметров, дающих малые значения прогибов, из линейных статических уравнений имеем

$$w_1 = \frac{4q_0^* L^4}{\pi^5 I(1-p_0^*)},\quad w_2 = 0,\quad w_3 = \frac{4q_0^* L^4}{27\pi^5 I(9-p_0^*)} \tag{3.5}$$

При нарушении условий $q_0^* L^4 / \pi^4 I \ll 1$, $p_0^* \ll 1$ статические решения необходимо определять из нелинейных уравнений. При этом сохраняется оценка $w_3/w_1 \sim 3^{-3}$ (если $p_0^* \ll 1$, то $w_3 / w_1 \sim 3^{-5}$). Поэтому для w_3 можно пользоваться решением (3.5), а значение w_1 определяется из нелинейного уравнения, куда подставляется w_3 из (3.5).

Для дальнейшего представляет интерес область изменений p_0^* около единицы. Значение $p_0^* = 1$ или $p_0 = p_l$ является критическим. Для тонкостенной трубки (толщина стенки $h \ll r_0$), $I = (\pi / 4)(r^4 - r_0^4) \simeq \pi r_0^3 h$ и согласно (3.2):

$$p_l = \frac{\pi^2 E r_0 h}{L^2(1-2\nu)} \tag{3.6}$$

Если $q_0^* = 0$ (трубка расположена вертикально или силой тяжести пренебрегаем для горизонтального ее положения), то из нелинейного уравнения для w_1 получаем ($w_2 = w_3 = 0$):

$$w_1 = \pm\sqrt{(p_0^* - 1)(1 + r_0^2 / r^2)} \tag{3.7}$$

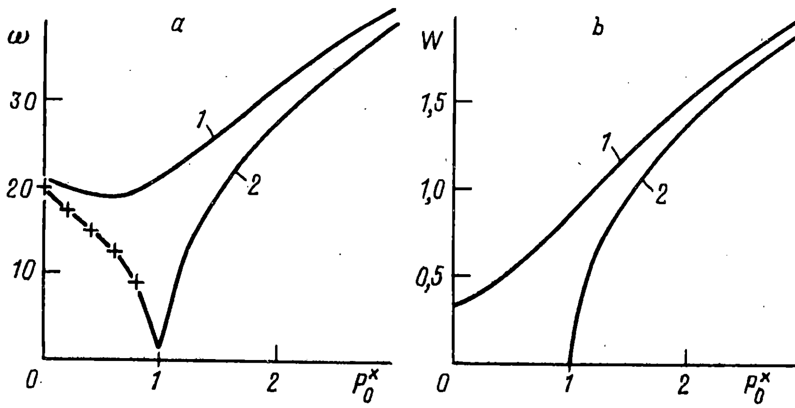
Для тонкостенных трубок справедливо $w_1 = \pm\sqrt{2(p_0^* - 1)}$. Для w_3 (при $w_1 = w_2 = 0$) имеем соответственно

$$w_3 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{(p_0^* - 9)(1 + r_0^2 / r^2)},\quad w_3 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2(p_0^* - 9)}$$

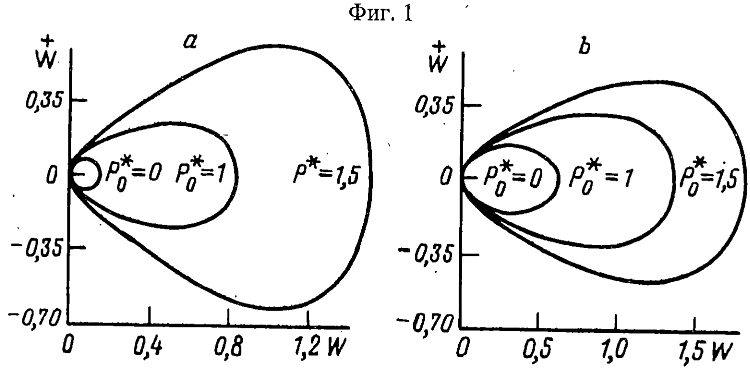
4. Свободные колебания. На фиг. 1, *а* дана зависимость низшей частоты свободных колебаний от безразмерного внутреннего давления. Приняты следующие данные: L = 1м, r = 0,01м, r_0 = 0,0095м, E = 0,69×10[10] Н/м, ρ = 2700 кг/м^3, ρ_f = 1000 кг/м^3, ν = 0. При этом собственная круговая частота колебаний пустой трубы равна ω_0 = 40,74 рад/с. Цифре *1* соответствует горизонтальное положение трубы, цифре *2* – вертикальное. Крестиками нанесена собственная наинизшая частота колебаний вертикальной трубы с жидкостью [5]:

$$\omega_l = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - p_0^*}{1 + m_f / m}} \tag{4.1}$$

Таким образом, в случае вертикальной трубы при значениях $p_0^* < 1$ наблюдается хорошее соответствие численного решения нелинейного уравнения и аналитического решения (4.1) линейного уравнения. Возрастание частот с увеличением p_0^* после p_0^* = = 1 объясняется натяжением закрепленной по концам трубы в результате выпучивания. Частота колебаний около этого прогнутого статического положения горизонтальной трубы находятся выше, чем для вертикальной трубы. Отличие между ними обусловлено также действием натяжения и большей кривизной упругой линии в случае горизонтального положения. Наибольшая разница имеет место около $p_0^* = 1$.



Фиг. 1



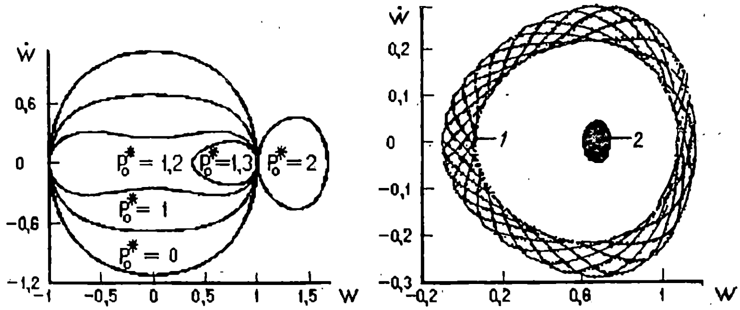
Фиг. 2

Прогибы при выпучивании показаны на фиг. 1,*b*. Кривые в сторону увеличения p_0^* ограничиваются значением $p_0^* = p_b / p_l$, где разрывающее трубу давление равно $p_b = \sigma_b h / r_0$, σ_b – предел прочности материала трубы.

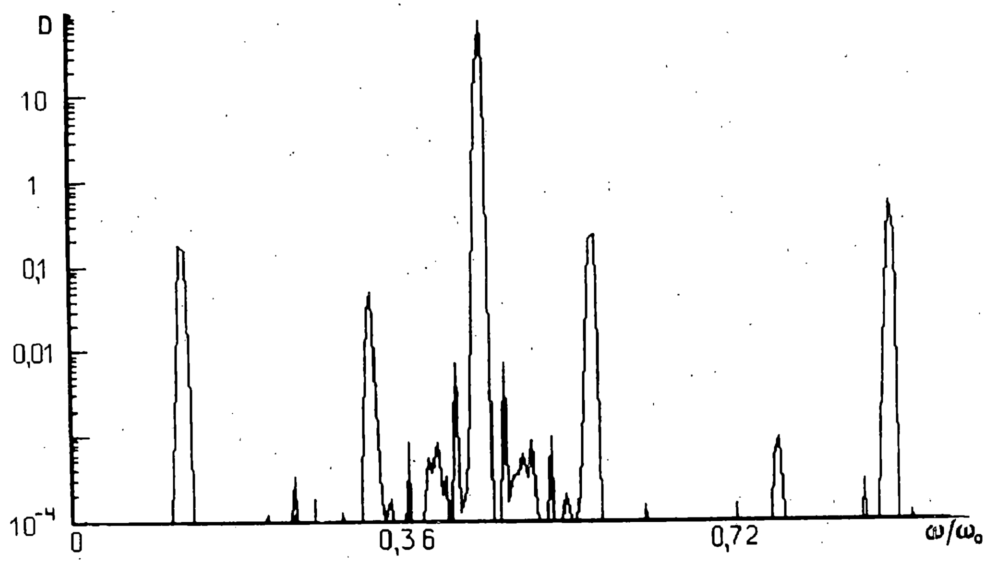
Представляет интерес зависимость нелинейных свободных колебаний от внутреннего постоянного давления p_0^* при одних и тех же начальных условиях. На фиг. 2,*a* дана фазовая картина колебаний середины пролета ($x = L/2$) горизонтальной трубы без жидкости (или с газом, для которого принято $\rho_f = 0$) и без трения ($\epsilon = 0$). Задаются нулевые начальные условия ($w_i(t=0)=0,\ \dot{w}_i(t=0)=0$). Таким образом, труба приводится в движение собственным весом.

При $p_0^* = 0$ колебания происходят около статически прогнутого положения трубки, приблизительно определяемого по (3.5). Перемещения и скорости относительно малы. С увеличением давления до $p_0^* = 1$ происходит деформация траектории так, что колебания совершаются относительно нового прогнутого положения, однако, несимметрично относительно этого положения.

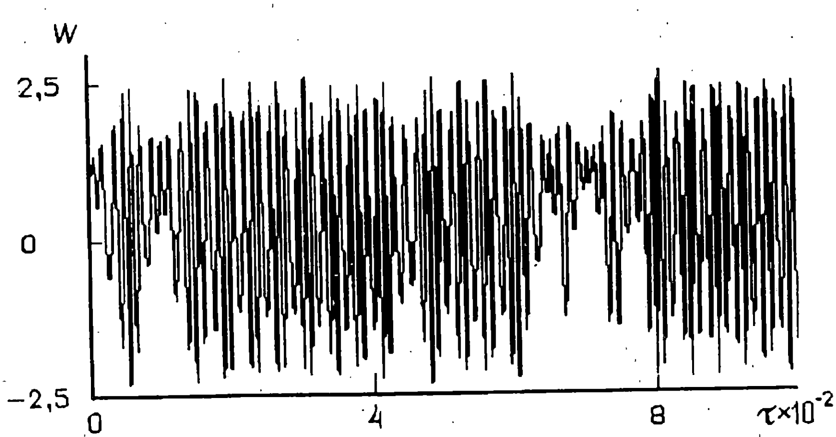
Как видно из фиг. 2,*a*, в закритической области значений p_0^* происходит дальнейшая деформация фазовой траектории. Например, при $p_0^* = 1{,}5$ прогиб изменяется в пределах $0 < w < 1{,}5$, а скорость $|\dot{w}| < 0{,}62$. Фазовые траектории для трубы с жидкостью плотности $\rho_f = 1000$ кг/м^3 в зависимости от безразмерного внутреннего давления приведены на фиг. 2,*b*. Как видно, прогибы средней точки больше, чем в случае пустой трубы, в то время как скорости – меньше.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В случае вертикальной трубы (с водой) при изменении давления в пределах $0 < p_0^* < 1{,}2$ амплитуда колебаний, определяемая начальными условиями (на фиг. 3,*a* начальные условия $w_1(0) = 1$, $w_2(0) = w_3(0) = 0$, $\dot{w}_i(0) = 0$), не меняется. Уменьшаются лишь скорости. С переходом в закритическую область $(1 < p_0^* < 1{,}2)$ колебания происходят по-прежнему симметрично относительно прямолинейного положения трубки, охватывая оба образовавшихся выпученных состояния (два центра). При неизменных значениях амплитуд перемещений скорости еще более уменьшаются по сравнению с докритическим случаем. Однако, при $p_0^* > 1{,}2$ при тех же начальных условиях фазовая картина сильно меняется. Колебания происходят только около одного центра. Но этот центр в зависимости от p_0^* может располагаться ближе или дальше от прямолинейной формы, чем начальное условие $w(0)$. Этим объясняется переход фазовой траектории в правую область при $p_0^* = 2$.

В целом имеется сильная зависимость решения от начальных условий. Учет трения $(\epsilon \neq 0)$ естественно приводит к затуханию решения. При этом траектории стремятся к центрам, определяемым выражениям (3.7). Из приведенных расчетов видно, что имеется также сильная зависимость колебаний от внутреннего давления в трубе.

5. Периодические параметрические колебания. Колебания горизонтальной трубы под действием волн давления в жидкости происходят около статического положения, определяемого собственным весом и постоянным внутренним давлением p_0^*. Как видно из (3.5), это давление увеличивает статический прогиб. Наличие начального прогиба обусловливает возбуждение как параметрических, так и вынужденных колебаний трубы при всех частотах и амплитудах волн давления. Расчеты показывают, что при этом основной является форма колебаний, описываемая первым членом в (3.1), а остальные члены вносят малый вклад. Поскольку при этом колебания носят характер стоячей волны, то достаточно следить за поведением во времени средней точки пролета ($x = L/2$). Это утверждение справедливо, в основном, для случая длин волн в жидкости, больших по сравнению с длиной упругой трубы ($L/l << 1$).

Варьируя эффективной жесткостью трубы и ее массой (т.е. частотами свободных колебаний), длиной волны давления, можно найти режимы с заметным вкладом второй гармоники в (3.1). Они имеют место, в основном, при малых длинах волн давления по сравнению с длиной трубы и, в частности, при кратных отношениях длин (L/l = 1,2,3). Тогда имеется взаимодействие первой и второй гармоник, что порождает некоторую бегущую волну по длине трубы. Скорость ее распространения меньше, чем скорость волны давления. При этом нужно следить за изменением во времени в нескольких точках пролета (как минимум, в точках $x = L/4$, $L/2$, $3L/4$).

Ввиду широкого диапазона возможных значений L/l, а также других входных параметров, основная трудность состоит в информативном представлении результатов по исследованию параметрических колебаний. Ниже ограничиваемся их изложением для малых значений L/l и соответственно слежением за движением только средней точки пролета. Приведенные выше численные значения параметров трубы остаются без изменения.

Наиболее интересным представляется случай колебаний вблизи главного параметрического резонанса, когда $\omega/\omega_p \simeq 2$, где ω_p частота свободных нелинейных колебаний трубы. Поскольку ω_p существенно зависит от амплитуды, определение резонансной частоты представляет самостоятельную задачу. Один из найденных случаев иллюстрируется на фиг. 3*b*, где точками показаны значения прогиба w и скорости $\dot{w}$ через промежутки времени, равные периоду волн в жидкости T_v (сечение Пуанкаре), для двух вариантов начальных условий при $\epsilon^* = 0$, $p_0^* = 0$, $p^* = 0{,}09$.

Первому из них, когда труба начинает движение из прямолинейного положения без начальной скорости ($w_i(0) = \dot{w}_i(0) = 0$), соответствует сложный периодический колебательный режим (показан цифрой *1*). Облако точек в центре фигуры (показано цифрой 2) представляет сечение Пуанкаре для начальных условий, соответствующих положению статического равновесия при $p_0^* = 0{,}722$ ($w_1(0) = 0{,}663$, $w_2(0) = 0$, $w_3(0) = 0$, $\dot{w}_i(0) = 0$). Безразмерный период пульсации давления в обоих случаях $T_\nu = 7{,}184$.

При установлении предельного цикла колебаний трубы с периодом T_ν на плоскости w, $\dot{w}$ все изображающие точки собираются в одном месте. В случае предельного цикла колебаний с периодом $2T_\nu$, точки собираются в двух местах. В первом из рассмотренных случаев (нулевые начальные условия) они образуют сложную картину, напоминающую фазовые траектории. Однако при слежении за возникновением этих точек видно, что они появляются на плоскости w, $\dot{w}$ не друг за другом, а в разных местах. Эту динамику не видно на статических фигурах – сечениях Пуанкаре.

Из фиг. 3,*b* видно сильное влияние начальных условий как на вид сечения Пуанкаре, так и на характер самого движения, несмотря на то, что значение $p_0^* + \left|p^*\right|$ еще достаточно далеко от 1. Анализ спектра мощности колебаний для этого случая свидетельствует о трехчастотном периодическом движении во втором случае. В первом случае наряду с возросшим числом субгармоник и ультрагармоник возникает область сплошного спектра (фиг. 4). Можно говорить о зарождающемся хаотическом движении.

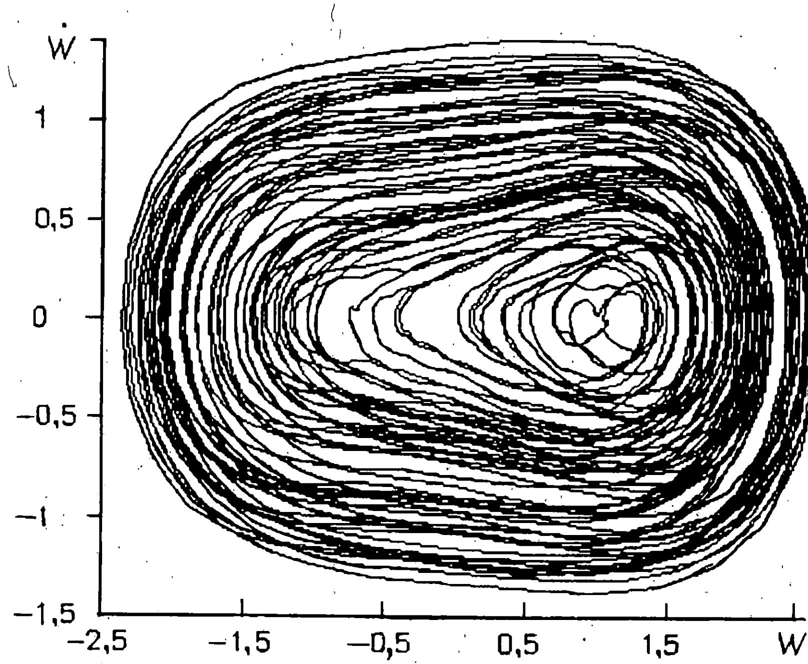
6. Хаотические колебания. При дальнейшем увеличении p_0^* до значений, приближающихся к 1 и превосходящих ее, сильная зависимость от начальных условий сохраняется, включая случаи $\epsilon^* < 0{,}5$, при изменении частоты возбуждения в широких пределах. Вычисления показывают, что при закритических значениях постоянной части внутреннего давления p_0^* практически при многих реально возможных значениях амплитуд и частот возбуждения можно наблюдать хаотические колебания, характеризуемые, в частности, удвоением периода, пересечением и незамкнутостью фазовых траекторий, соответствующей структурой сечений Пуанкаре и сплошным спектром мощности [11, 12, 14, 15].

В качестве примера на фиг. 5 и 6 приведены изменение прогиба средней точки по времени и соответствующая фазовая картина. Приняты данные: $p_0^* = 1{,}3$, $p^* = 0{,}5$; $\epsilon^* = 0{,}1$; $l/L = 3{,}6$, $\omega \simeq 2587$ рад/с. Движение трубы начинается из положения статического равновесия ($w_1(0) = 1{,}08$; $w_2(0) = w_3(0) = \dot{w}_i(0) = 0$). Колебания около положения статического равновесия нерегулярным образом чередуются с колебаниями около прямолинейного положения трубы и забросом вверх (отрицательные значения w).

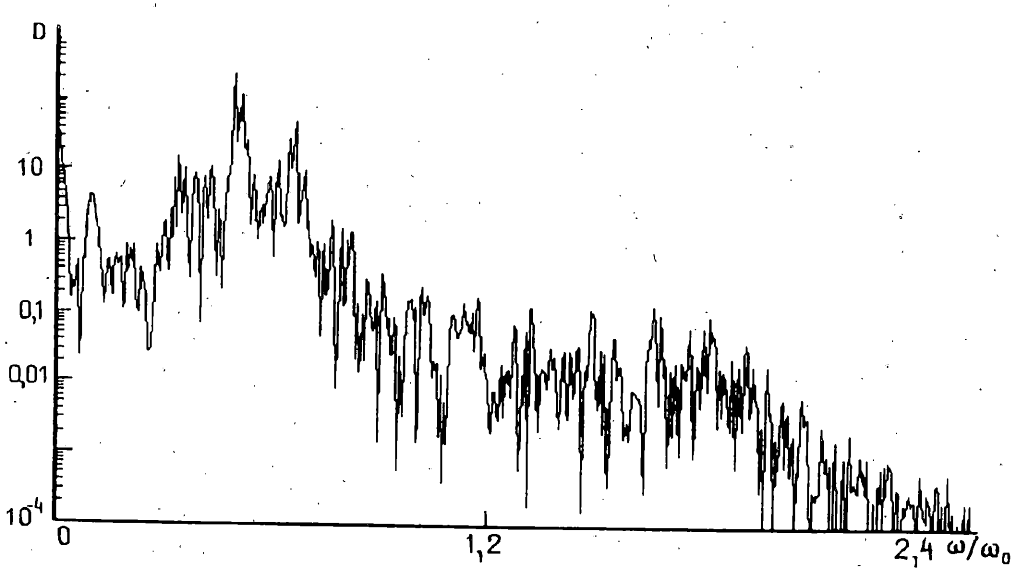
Отметим, что указанное положение статического равновесия представляет собой особую точку типа центра, прямолинейное положение – типа неустойчивого узла, а верхнее положение (куда происходит заброс в отдельные моменты) – особую точку типа седла. Характер последней может меняться в зависимости от значения p_0^*. Например, при больших p_0^* она может стать центром.

Фазовые траектории (фиг. 6) демонстрируют точки пересечения и удвоения периода. На фиг. 7 дан соответствующий спектр мощности.

Если p_0^* и p^* таковы, что не только $p_0^* + \max\left|p^*\right| > 1$, но и $p_0^* - \max\left|p^*\right| > 1$, то в течение всего времени движения давление в трубе будет превышать критическое. В этом случае возможны колебания, траектории которых на фазовой плоскости охватывают указанные центр и седло.



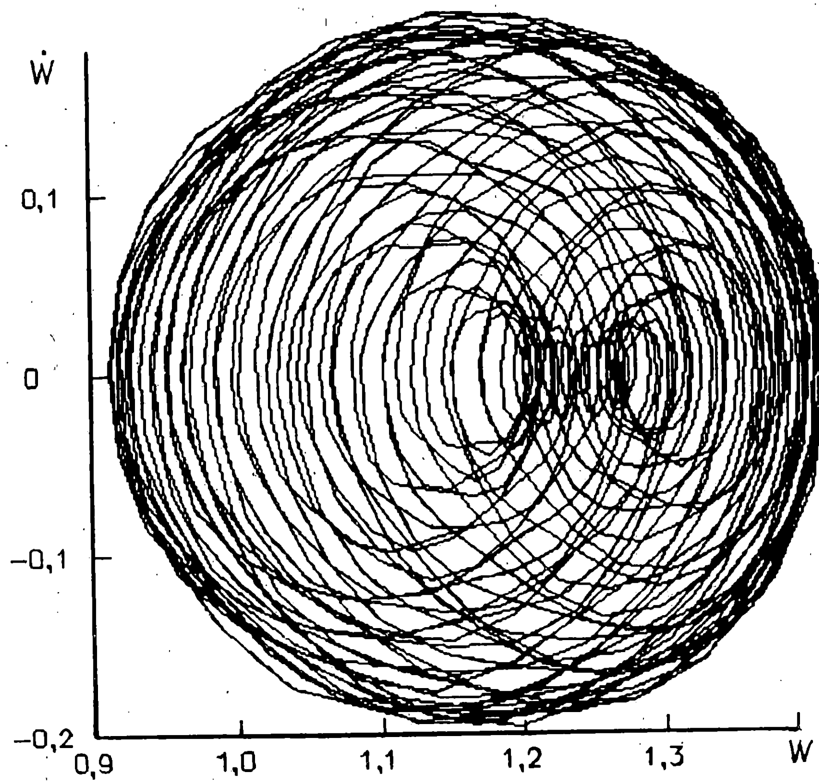
Фиг. 6



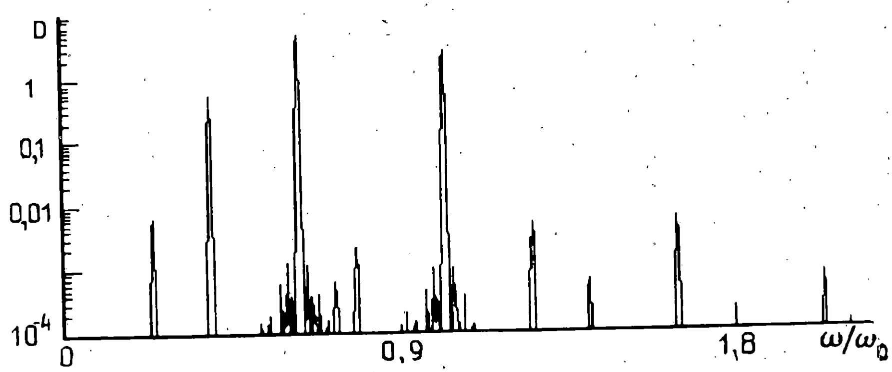
Фиг. 7

Фиг. 8 соответствует случай горизонтальной трубы, когда движение также начинается из положения статического равновесия без начальной скорости, но при $p_0^* = 1{,}5$; $p_*^* = 0{,}3$; $\epsilon^* = 0{,}1$; $l/L = 3{,}6$. Соответствующий спектр мощности приводится на фиг. 9. Статический прогиб средней точки равен $w_1(0) = 1{,}216$ ($w_2(0) = w_3(0) = 0$).

Как видно, колебания происходят около нижнего положения равновесия, которое раздваивается на две близко расположенные особые точки. Не происходит заброса



Фиг. 8



Фиг. 9

трубы вверх (выше прямолинейного положения). Выделяются, в основном, две субгармоники. Хаотические колебания исчезают.

Таким образом, в плоскости параметров p_0^*, p^* между точкой $p_0^* = 1{,}3$; $p^* = 0{,}5$ и точкой $p_0^* = 1{,}5$; $p^* = 0{,}3$ проходит бифуркационная линия, разделяющая режимы хаотических и периодических (квазипериодических) колебаний. Для построения указанных бифуркационных линий и бифуркационных поверхностей в пространстве параметров p_0^*, p^* и ω (или l/L) требуется разработка специальных алгоритмов.

Физическое объяснение отсутствия хаотических колебаний в случае $p_0^* = 1,5$; $p^* = 0,3$ состоит в том, что закритическое статическое выпучивание трубки становится больше, а амплитуда возбуждающих волн – меньше по сравнению со случаем $p_0^* = 1,3$; $p^* = 0,5$ (когда имеет место режим хаотических колебаний). В силу этого система не выходит за пределы притяжения аттрактора $w_1(0) = 1,216$. Для выхода за эти пределы требуются бóльшие значения переменной части давления в жидкости. В свою очередь, значения $p^* = 0,3$ достаточно для выхода колебаний за пределы притяжения аттрактора $w_1(0) = 1,000$, соответствующего давлению $p_0^* = 1,2$. При $p_0^* = 1,8$ и соответствующем значении $\omega_1(0) = 1,406$ требуется бóльшая амплитуда, чем $p^* = 0,5$. Однако, при дальнейшем увеличении p^* снова наступает режим периодических (квазипериодических) колебаний, охватывающих все три особые точки, так как большая переменная сила легко преодолевает бифуркационные линии (поверхности).

Отметим, что периоды собственных колебаний трубы при коротких волнах в жидкости могут превосходить периоды последних во много раз, поэтому сечения Пуанкаре в этом случае практически повторяют соответствующие фазовые траектории. Поэтому в таких случаях более информативно строить сечения Пуанкаре по периодам собственных колебаний системы, а не как обычно, по периодам возбуждающих сил.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N93–01–17940) и Международного научного фонда (грант RH4000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ashley H., Haviland G.* Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. № 3. P. 229–232.
2. *Феодосьев В.И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169–170.
3. *Paidoussis M.P.* Flow-induced instabilities of cylindrical structures // Appl. Mech. Rev. 1987. V 40. № 2. P. 163–175.
4. *Ильгамов М.А.* К расчету упругих круговых колец на колебания // Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1961. Вып. 1. С. 29–36.
5. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
6. *Светлицкий В.А.* Колебания гибких шлангов, заполненных движущейся жидкостью // Изв. вузов. Машиностроение. 1966. № 3. С. 22–30.
7. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
8. *Huang T., Dareing D.W.* Buckling and frequencies of long vertical pipe // J. Eng. Mech. Divis. 1969. V. 95. № 1. P. 167–181.
9. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of risers in tension due to internal pressure: nonmovable boundaries // Trans. ASME. J. Energy Resour. Technol. 1983. V. 105. № 3. P. 277–281.
10. *Reiss E.L., Matkowski B.J.* Nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column // Quart. Appl. Math. 1971. V. 29 № 2. P. 245–260.
11. *Holmes P.J.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. № 1394. P. 419–448.
12. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
13. *Argyris J., Faust G., Haase M.* An adventure in chaos // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 1991. V. 91. № 1–3. P. 997–1091.
14. *Dowell E.H., Ilgamov M.A.* Studies in Nonlinear Aeroelasticity. New York: Springer-Verlag, 1988, 455 p.

15. *Moon F.C.* Chaotic Vibrations. New York: Wiley, 1987. 309 p.
16. *Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H.* Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids and Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
17. *Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H.* Buckling and postbuckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
18. *Ильгамов М.А.* Статические задачи гидроупругости. Казань: Изд. Ин-та механики и машиностроения РАН, 1994. 207 с.
19. *Климов Д.М., Руденко В.М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.

Казань

Поступила в редакцию
1.X.1995

Зав. редакцией *В.М. Кутырева*

Технический редактор *Т.В. Скворцова*

Сдано в набор 05.12.96 Подписано к печати 10.01.97 Формат бумаги 70×1001/16
Офсетная печать Усл. печ.л. 15,6 Усл. кр.-отт. 7,4 тыс. Уч.-изд.л. 18,6 Бум. л. 6,0
Тираж 466 экз. Зак. 851

Адрес редакции: 117526 Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38
Московская типография № 2 РАН 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6