

УДК 539.3

© 1997 г. С.А. ГРИШИН

О ВНУТРЕННЕЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ
АРМИРУЮЩИХ КОЛЕЦ
РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПАКЕТА

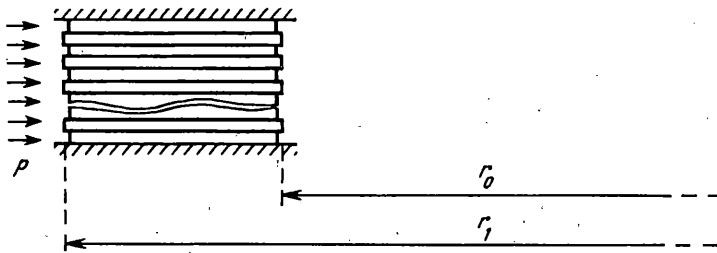
Рассмотрена задача внутренней потери устойчивости армирующих прослоек композитной конструкции, представляющей собой пачку сцепленных по лицевым поверхностям узких кольцевых слоев из материалов с существенно различными свойствами (резинометаллический элемент, например). Армирующие слои моделируются как пластинки, связующие – как основание Винклера. Нагружение осуществляется равномерным давлением по внешнему периметру пакета. Число слоев произвольно. В случае пакета одинаковых колец получены простые явные формулы для критического давления и критической длины волны при гофрировании арматуры (при выпучивании пластинок из их плоскости). В случае пакета общего вида поставлена математическая задача, допускающая надежное и быстрое численное решение. Проведена серия расчетов, на основании которой проанализировано механическое поведение конструкции.

1. Точное решение для случая одинаковых колец. Рассмотрим пакет кольцевых пластин, сечение которого изображено на фиг. 1. Для определенности будем смотреть на эту систему как на модель резинометаллического элемента. Пакет скреплен по лицевым граням с недеформируемыми обкладками, верхняя обкладка подвижна, нижняя неподвижна. Слоев всего $2n + 1$, из них n высокомодульных (металлических) с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν , и $n + 1$ низкомодульных (резиновых) с упругими характеристиками G_p и ν_p . Слои жестко сцеплены между собой. Мягкие и жесткие чередуются, к обкладкам примыкают более мягкие. Жесткие слои будем в дальнейшем называть пластинками, прослойками или тарелями. Они занумерованы снизу вверх. При необходимости индексы 0 и $n + 1$ приписываем обкладкам. Толщины прослоек считаются одинаковыми, равными h . Толщины мягких слоев также считаются одинаковыми, равными H . В плане все слои, мягкие и жесткие, представляют собой кольца внутреннего радиуса r_0 и внешнего r_1 (фиг. 2). Естественно ввести цилиндрическую систему координат r, φ, z . Ось z совпадает с осью симметрии пакета, а оси r и φ изображены на фиг. 2. С внешней стороны на торец пакета $r = r_1$ действует равномерное давление p , внутренний торец $r = r_0$ свободен от нагрузки (фиг. 3). Пакет может быть сжат вдоль оси z усилием, приложенным к обкладкам.

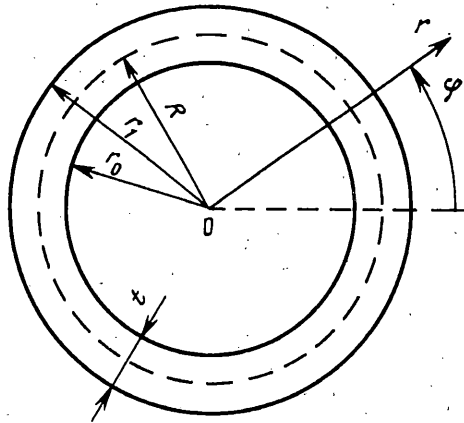
Считается, что сжатие пакета обкладками приводит к деформированию только мягких слоев. Тарели не изгибаются. Основное уравнение устойчивости записывается для каждой пластинки. Оно получается из уравнений Кармана стандартным рассуждением [1, 2]:

$$D\nabla^4 w_i - L(F_i^0, w_i) = q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

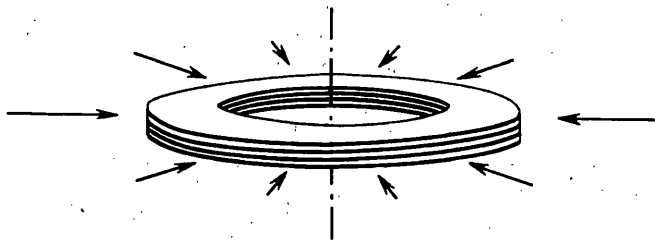
Здесь w – прогиб, F_i – функция усилий, $E = 2G(1 + \nu)$ – модуль Юнга, h – толщина, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость, q – поперечная нагрузка, $T_r^0, T_\varphi^0, T_{r\varphi}^0$ –



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

мембранные усилия. Индексом нуль отмечены параметры исходного состояния. Операторы имеют вид

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^2 = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} \quad (1.2)$$

$$L(F_i^0, w_i) = T_r^0 \partial_{rr} w_i + T_\varphi^0 \left(\frac{1}{r} \partial_r w_i + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} w_i \right) + 2T_{r\varphi}^0 \partial_r \frac{1}{r} \partial_\varphi w_i \quad (1.3)$$

$$T_r^0 = \frac{1}{r} \partial_r F^0 + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} F^0, \quad T_\varphi^0 = \partial_{rr} F^0, \quad T_{r\varphi}^0 = -\partial_r \frac{1}{r} \partial_\varphi F^0 \quad (1.4)$$

Общий подход к задаче о кольцевой пластинке [2, 3, 4] основан на использовании свойств оператора Лапласа в полярных координатах. Решение разыскивается в виде линейных комбинаций (с неопределенными коэффициентами) произведений функций

Бесселя от r и степеней r на тригонометрические функции от φ . Свободные коэффициенты определяются граничными условиями, а номер гармоники условием минимизации параметра нагружения.

Этот путь приводит к громоздким вычислениям и для пластинки в среде требует с одной стороны уверенности в краевых условиях, а с другой – более тщательного выбора модели среды. Для пачки пластинок, взаимодействующих через резиноподобное связующее, положение усугубляется.

Геометрия упругого пакета, составленного из узких пластин, допускает весьма важные упрощения, приведшие в свое время Прандтля, Митчелла, Генки и Тимошенко к постановке задач о боковом вытучивании балок [5] и к созданию теории колец [6].

Воспользуемся тем, что ширина пакета $r_1 - r_0$ мала по сравнению с его средним радиусом $R = (r_1 + r_0)/2$, а краевые условия близки условиям свободного края, и будем искать решения (1.1), зависящие только от одной переменной φ . Тогда операторы левой части (1.1) превратятся в обыкновенные дифференциальные операторы

$$\nabla^4 = r^{-4} \partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + 4r^{-4} \partial_{\varphi\varphi}, \quad L(F_i^0, w_i) = T_\varphi^0 r^{-2} \partial_{\varphi\varphi} w_i \quad (1.5)$$

Следующим шагом усредним их коэффициенты, заменив r на R , T_φ^0 также предположим не зависящим от r . Тогда и нагрузка q_i будет функцией только φ . В результате получим уравнение (справедливое для кольца единичной ширины):

$$\frac{D}{R^4} \partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} w_i + \frac{4D}{R^4} \partial_{\varphi\varphi} w_i - T_\varphi^0 \frac{1}{R^2} \partial_{\varphi\varphi} w_i = q_i \quad (1.6)$$

Поперечная нагрузка на i -ю пластинку q_i складывается из нагрузок со стороны выше- и нижележащего резиновых слоев: q_i^+ и q_i^- . Для резиновых слоев принимается гипотеза Винклера с коэффициентом жесткости

$$\beta = \frac{G_p}{H(1 - \nu_p)} \quad (1.7)$$

При этом $q_i^+ = -q_{i+1}^-$: т.е. мягкие слои "не перераспределяют" давление по оси φ . Имеем

$$q_i = q_i^+ + q_i^-, \quad q_i^+ = -\beta(w_i - w_{i+1}), \quad q_i^- = -\beta(w_i - w_{i-1}) \quad (1.8)$$

Поскольку обкладки недеформируемы

$$w_0 = w_{n+1} = 0 \quad (1.9)$$

и для нижней и верхней пластинок получим

$$q_1^- = -\beta w_1, \quad q_n^+ = -\beta w_n \quad (1.10)$$

Подставив выражения (1.8), (1.10) в (1.6), приходим к основной системе уравнений (штрихом обозначено дифференцирование по φ):

$$D \frac{1}{R^4} w_i'''' + 4D \frac{1}{R^4} w_i'' - T_\varphi^0 \frac{1}{R^2} w_i'' + \beta(-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.11)$$

Обратимся к вычислению T_φ^0 . На внешний торец пакета действует равномерное давление p (фиг. 3). Каково усилие на внешний контур каждой пластинки? Если бы стальных прослоек не было и весь пакет представлял собой просто отрезок резиновой трубки, его несущая способность была бы чрезвычайно малой. Стальные прослойки в пакете, подвергнутому давлению с торца, играют роль арматуры, не давая ему схлопнуться. Поэтому внешнее давление практически целиком воспринимается жест-

кими кольцами. И хотя кольца находятся в неравных условиях, не будет большой ошибкой считать (особенно, если колец достаточно много), что усилие распределено между ними *поровну*. Из соображений расчета в запас вычислим толщину всего пакета H_n как сумму толщин пластинок и резиновых слоев в недеформированном состоянии: $H_n = nh + (n + 1)H$. Суммарное усилие P_n на единицу длины окружности внешнего контура пакета будет равно $P_n = pH_n$. Жестких колец n , значит на контур каждого действует усилие $P = P_n/n$.

Вычислить докритические окружные усилия теперь можно из решения Ламе, однако еще проще это сделать из соображений статики одномерного кольца под действием внешнего усилия P . В итоге, объединив все сказанное, будем иметь

$$-T_{\varphi}^0 = p \left(h + \frac{n+1}{n} H \right) \frac{r_1}{r_1 - r_0} \quad (1.12)$$

Теперь все коэффициенты системы (1.11) определены и можно перейти к ее исследованию.

После деления каждого из уравнений (1.11) на β составим характеристическую матрицу. Она трехдиагональна и симметрична, на первой наддиагонали и первой поддиагонали во всех позициях стоит -1 , на главной диагонали во всех позициях $-\zeta$:

$$\zeta = \frac{D}{\beta R^4} \lambda^4 + \frac{4D}{\beta R^4} \lambda^2 + p \frac{1}{\beta R^2} \left(h + \frac{n+1}{n} H \right) \frac{r_1}{r_1 - r_0} \lambda^2 + 2 \quad (1.13)$$

Система с матрицей такого вида (выражение ζ через λ иное) подробно рассмотрена в [7]. Аналогично [7] устанавливается, что характеристический определитель обратится в нуль если и только если

$$\zeta_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

Введя более естественную действительную переменную μ равенством $\lambda = i\mu$, подставим правые части (1.14) вместо ζ в (1.13) и выразим параметр нагрузки p :

$$p = \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) \left(h + \frac{n+1}{n} H \right)^{-1} \frac{D}{R^2} \left[\mu^2 - 4 + \frac{2}{\mu^2} \frac{\beta R^4}{D} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) \right] \quad k = 1, \dots, n \quad (1.15)$$

Минимальное по k значение правой части (1.15) достигается при $k = 1$. Именно его и будем исследовать далее. Хорошо видно, что в отличие от [7] (где исследован случай пакета прямых стержней) величина в квадратных скобках из (1.15) может стать отрицательной для некоторых μ при выполнении условия

$$\frac{\beta R^4}{D} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) < 2 \quad (1.16)$$

Это ограничение на параметры системы является платой за принятые выше упрощения, прежде всего за предположение $w_i = w_i(\varphi)$. Физически оно означает, что при выполнении (1.16) возможны нетривиальные решения даже при нулевом внешнем давлении. Чем больше пластинок в пакете и чем сильнее различаются упругие свойства составляющих его слоев, тем более ограничительным оказывается (1.16). К счастью, в практически важных примерах его роль не сказалась: большое значение R^4 с лихвой компенсировало неблагоприятные факторы. Тем не менее, формальная граница теории существует и заставляет критически оценивать результаты вычислений при параметрах, не удовлетворяющих (1.16), но близких к таковым.

Далее ограничимся случаем "хороших" параметров системы (т.е. (1.16) не выполняется).

Минимизируя правую часть (1.15) по μ^2 , в полном соответствии с [7] получим, что минимум достигается при

$$\mu_* = \left[\frac{2\beta R^4}{D} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) \right]^{1/4} \quad (1.17)$$

и дается следующей формулой:

$$p_* = 2 \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) \left(h + \frac{n+1}{n} H \right)^{-1} \frac{D}{R^2} \left[\left(\frac{2\beta R^4}{D} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) \right)^{1/2} - 2 \right] \quad (1.18)$$

В отличие от [7], решение для пакета колец должно быть 2π -периодической функцией координаты φ . Это налагает ограничения на волновое число μ . Оно должно быть целым, тогда основной период синусоиды будет делителем 2π . Формулы (1.17), (1.18) получены минимизацией на оси, поэтому в общем случае μ_* целым быть не обязано. Отсюда следует, что вычислив μ_* из (1.17), надо взять в качестве количества волн на окружности ближайшее целое число, а p_* из (1.18) рассматривать как оценку критического давления снизу, тем лучшую, чем больше μ_* . Минимум по целым μ может быть только больше минимума по всем действительным μ . То же, что синусоида в критической форме только одна, общая для всех пластинок пакета, показывается применением техники рядов Фурье и неравенства Релея в прямом произведении n окружностей.

Структура формул (1.17), (1.18) отражает неравенство (1.16). Помимо того, что при его выполнении p_* было бы отрицательным, соответствующее ему решение $\sin \mu \varphi$ имело бы параметр $\mu < \sqrt{2}$. То есть форма потери устойчивости от растягивающего усилия p имеет слабую изменяемость по φ . Удовлетворить условию 2π -периодичности решения при таких μ можно только при $\mu = 1$, что отвечает повороту кольца как жесткого целого.

В случае сжимающих p напротив – гофр мелкий – на окружности уместится много полуволен. Именно такая картина наблюдается в реальных системах.

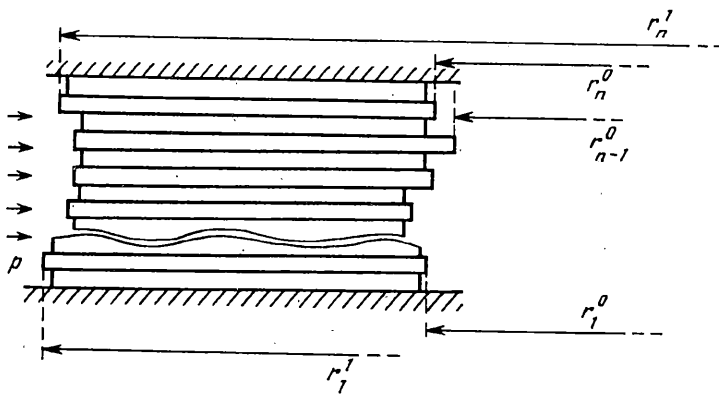
Таким образом, для пакета, составленного из произвольного числа одинаковых узких кольцевых пластинок, взаимодействующих через винклеровскую среду, как критическое давление, так и критическая длина волны даются простыми явными формулами (1.17), (1.18). Хорошо видно, что с ростом числа прослоек критическое давление уменьшается, а критическая длина волны увеличивается. Распределение амплитуды гофра в зависимости от номера прослойки может быть получено в явном виде аналогично [7].

Замечание 1. При переходе от (1.5) к (1.6) переменные коэффициенты (1.5) заменились постоянными, содержащими средний радиус $R = (r_0 + r_1)/2$. В полярных координатах более подходящим представляется усреднение с весом r . То есть к уравнению (1.5) следует применить оператор

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r_1 - r_0} \int_{r_0}^{r_1} \cdot r dr \quad (1.19)$$

Проделав это, получив аналоги (1.6)–(1.18) и сравнив формулы, можно убедиться, что для узких колец конкретный выбор техники усреднения не принципиален.

Замечание 2. На первый взгляд наиболее естественным образом докритическое напряженно-деформированное состояние прослоек вычисляется, исходя из решения Ламе. Проделав очевидные выкладки, убедимся, что сознательное упрощение основного напряженно-деформированного состояния не вносит большой ошибки для узких колец. Применение же принятого в сопротивлении материалов подхода к вычислению



Фиг. 4

окружных усилий (1.12) имеет то преимущество, что не требует априорного предположения о плоской деформации или обобщенном плоском напряженном состоянии, лежащего в основе решения Ламе. Последнее обстоятельство важно в следующем пункте.

2. Пакет с произвольным набором узких кольцевых пластинок. Предположим теперь, что пакет составлен из n кольцевых пластинок различной толщины и ширины. Сечение такого пакета плоскостью, содержащей ось симметрии, изображено на фиг. 4. Принятые обозначения в целом соответствуют п. 1, только нижний индекс теперь обозначает номер тарели, поэтому внешние и внутренние радиусы обозначены верхними индексами 1 и 0 соответственно. Итак, для i -й тарели r_i^1 – внешний, r_i^0 – внутренний радиус, h_i – толщина, G_i – модуль сдвига, ν_i – коэффициент Пуассона. Что касается внешних и внутренних радиусов, то как правило наборы чисел r_1^1, \dots, r_n^1 и r_1^0, \dots, r_n^0 являются следами на фиксированной сетке гладких функций $r^1(z), r^0(z)$ действительной переменной z , откладываемой на вертикальной оси. Удобно ввести также $R_i = (r_i^1 + r_i^0)/2$ – средний радиус и $t_i = r_i^1 - r_i^0$ – ширину i -й тарели. Толщины резиновых слоев и их упругие свойства приняты для всех слоев одинаковыми: H, G_p, ν_p , хотя нет никаких дополнительных математических трудностей и в более общей задаче, когда они различны. Форма торцов резиновых слоев после сжатия пакета обкладками достаточно неопределенна, поскольку как правило крайние волокна резины испытывают конечные деформации. На фигуре поэтому они изображены схематически. Центры всех колец проектируются в одну и ту же точку плана, так что конструкция осесимметрична.

Смещение верхней обкладки в направлении оси симметрии способно вызвать в пластинках моментное напряженное состояние. Много здесь зависит от конкретного набора толщин и радиусов. Такая возможность имелась даже в задаче п. 1. Однако здесь изгибанием пластинок при сжатии пакета будем пренебрегать и исходить из уравнения устойчивости (1.1):

$$D_i \nabla^4 w_i - L(F_i^0, w_i) = q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

Такое предположение тем более адекватно реальности, чем менее различается геометрия пластин. С другой стороны, имея ввиду действовать в дальнейшем аналогично п. 1, заметим, что всякое изгибание сечения пластинки при сжатии обкладками приведет к увеличению жесткости условных стержней, описываемых уравнением (1.11), вызвав тем самым увеличение критического давления. Поэтому расчет при безмоментном докритическом состоянии будет расчетом *в запас*, расчетом самого невыгодного случая.

Операторы в (2.1) определены формулами (1.2)–(1.4) с той лишь разницей, что докритические нагрузки теперь зависят от номера пластинки и имеют индекс i .

Для всех колец переменная r изменяется в довольно узких пределах от $R_i - t_i/2$ до $R_i + t_i/2$, причем на концах этого интервала ни функция w_i , ни ее производная по r граничными условиями не фиксируются. Это дает основания предположить, что w_i слабо зависят от r и пренебречь этой зависимостью вообще: $w_i = w_i(\varphi)$. Тогда все производные по r в (2.1), (1.2)–(1.4) пропадут и останутся обыкновенные дифференциальные операторы (1.5) по φ с коэффициентами, зависящими от r . Для тарелей разной геометрии сделанное предположение является более сильным, чем его аналог в п. 1, точно так же, как и принятие (2.1) в качестве исходных уравнений. Представив $r = R_i + (r - R_i)$, вычислив степени r и пренебрегая в полученных выражениях членами, содержащими $r - R_i$ по сравнению со степенями R_i , получим операторы с постоянными коэффициентами.

Вычислим $T_{\varphi i}^0$ ($i = 1, \dots, n$). Предположим, что все усилие, действующее на торец пакета, воспринимается армирующими тарелками. Тогда усилие P_i на контур i -го кольца равно $P_i = p(h_i + H)$, а окружное усилие в кольце $T_i = P_i r_i^1$. Поэтому

$$-T_{\varphi i}^0 = p(h_i + H)r_i^1 / t_i \quad (2.2)$$

Для пакета n одинаковых пластин (2.2) дает формулу, несколько отличающуюся от (1.12). Этого отличия можно избежать, приняв

$$-T_{\varphi i}^0 = P_i r_i^1, \quad P_i = p(h_i + H + H(\delta_{i1} + \delta_{in}) / 2) \quad (2.3)$$

Последняя формула содержит символы Кронекера и эквивалентна предположению о том, что давление с торцов самого верхнего и самого нижнего резиновых слоев воспринимается полностью ближайшей тарелкой, но не обкладкой. Такое предположение может только уменьшить критическое значение давления, и значит пойдет в запас.

Обратимся к вычислению правых частей (2.1). Нормальные усилия считаем не зависящими от r и опираемся на гипотезу Винклера с коэффициентом жесткости (1.7). Поперечное усилие q_i равно сумме усилий q_i^+ и q_i^- со стороны выше- и нижележащего резиновых слоев. Последние в свою очередь равны

$$q_i^+ = -\beta t_i^+ (w_i - w_{i+1}), \quad q_i^- = -\beta t_i^- (w_i - w_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

где через t_i^+ (t_i^-) обозначена ширина участка взаимодействия i -й тарели с $(i + 1)$ -й ($(i - 1)$ -й):

$$\begin{aligned} t_i^+ &= \min(r_i^1, r_{i+1}^1) - \max(r_i^0, r_{i+1}^0) \\ t_i^- &= \min(r_i^1, r_{i-1}^1) - \max(r_i^0, r_{i-1}^0) \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.5)$$

То есть два соседних кольца проектируются в плоскость r, φ , их пересечением снова является кольцо, ширина которого и вычисляется по (2.5). Очевидно, что

$$t_i^+ = t_{i+1}^- \quad (i = 0, \dots, n) \quad (2.6)$$

причем значения индекса $i = 0, n + 1$ как обычно приписываются обкладкам и принимается, что

$$\begin{aligned} r_0^1 &= r_{n+1}^1 = \infty, \quad r_0^0 = r_{n+1}^0 = 0 \\ R_{n+1} &= R_n, \quad R_0 = R_1, \quad w_0 = w_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, правые части (2.1) выражены через прогибы и известные коэф-

фициенты. Подставив (2.3)–(2.7) в (2.1), получим основную систему уравнений задачи

$$\frac{D_i t_i}{R_i^4} w_i'''' + \frac{4D_i t_i}{R_i^4} w_i'' + p \left(h_i + H + \frac{H}{2} (\delta_{i1} + \delta_{in}) \right) t_i^1 \frac{1}{R_i^2} w_i'' + \beta (-t_i^+ w_{i+1} + (t_i^+ + t_i^-) w_i - t_i^- w_{i-1}) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.8)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по φ . Это однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными по φ коэффициентами и матрицей весьма примечательного вида. Требуется указать условия, при которых она допускает нетривиальное решение, имеющее 2π одним из периодов.

Перепишем (2.8) в матричном виде

$$\mathbf{A} \mathbf{w}'''' + (p\mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{w}'' + \mathbf{J} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Здесь \mathbf{w} – n -мерный вектор-столбец с компонентами w_i , \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – диагональные матрицы с компонентами

$$a_i \equiv D_i t_i R_i^{-4} > 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.10)$$

$$b_i \equiv [h_i + H + H(\delta_{i1} + \delta_{in}) / 2] (R_i + t_i / 2) R_i^{-2} > 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.11)$$

$$c_i \equiv 4a_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.12)$$

Трёхдиагональная матрица \mathbf{J} имеет вид

$$\mathbf{J} = \beta \begin{pmatrix} t_1^- + t_1^+ & -t_1^+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -t_2^- & t_2^- + t_2^+ & -t_2^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_3^- & t_3^- + t_3^+ & -t_3^+ & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -t_{n-1}^- & t_{n-1}^- + t_{n-1}^+ & -t_{n-1}^+ \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -t_n^- & t_n^- + t_n^+ \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

На матрице (2.13) стоит остановиться подробнее. Поскольку $\forall i t_i^+ > 0$ и $t_i^- > 0$, произведение элементов, симметричных относительно главной диагонали, положительно для любого значения индекса. Трёхдиагональные матрицы, обладающие таким свойством, называются якобиевыми [8, 9]. Более того, в силу (2.6) матрица (2.13) симметрична, а сумма элементов любой ее строки или столбца, кроме первых и последних, равна нулю.

Стандартной экспоненциальной подстановкой

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} e^{\lambda \varphi} \quad (2.14)$$

где \mathbf{W} – n -мерный числовой вектор-столбец $(W_1, \dots, W_n)^T$, а λ – комплексное число, система (2.9) приводится к алгебраической, а характеристическое уравнение получается приравниванием нулю ее определителя:

$$\det(\mathbf{A} \lambda^4 + (p\mathbf{B} + \mathbf{C}) \lambda^2 + \mathbf{J}) = 0 \quad (2.15)$$

Поскольку коэффициенты уравнения действительны, корни могут входить только комплексно сопряженными парами. Решение системы (2.9) конструируется из конечного числа агрегатов вида

$$\mathbf{P}_m(\varphi) e^{\alpha \varphi} \cos \mu \varphi + \mathbf{Q}_m(\varphi) e^{\alpha \varphi} \sin \mu \varphi \quad (2.16)$$

где α, μ – действительная и мнимая части корня λ , \mathbf{P}_m и \mathbf{Q}_m – многочлены от φ , степень m которых определяется кратностью корня λ и структурой соответствующего

ему корневого подпространства, а коэффициенты строятся из компонент собственных векторов и свободных констант по известным правилам. Из функций вида (2.16) периодическими могут быть лишь отвечающие чисто мнимым $\lambda = i\mu$. Естественно, что корни λ уравнения (2.15) зависят от параметра p , но мы будем строить обратную зависимость $p(\mu)$.

Нетрудно проверить, что при умножении некоторой матрицы \mathbf{M} на диагональную справа каждый j -й столбец \mathbf{M} умножается на j -й элемент диагональной, а при умножении \mathbf{M} на диагональную слева каждая i -я строка \mathbf{M} умножается на i -й элемент диагональной. При умножении же столбца матрицы \mathbf{M} на число ее детерминант умножается на то же число. Кроме того, обратной к диагональной матрице \mathbf{B} с элементами $b_i > 0 \forall i$ является также диагональная матрица \mathbf{B}^{-1} с элементами $1/b_i > 0 \forall i$. Тогда, определив $\mathbf{B}^{-1/2}$ как диагональную матрицу с элементами $1/\sqrt{b_i}$ в i -й позиции диагонали, домножим матрицу из (2.15) на $\mathbf{B}^{-1/2}$ слева и справа и разделим все элементы на λ^2 . В итоге, воспользовавшись коммутативностью умножения диагональных матриц, перепишем (2.15) как (\mathbf{E} – единичная матрица):

$$\lambda^{2n} b_1 \cdot \dots \cdot b_n \det(\mathbf{Y}(\lambda) + p\mathbf{E}) = 0 \tag{2.17}$$

$$\mathbf{Y}(\lambda) \equiv \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\lambda^2 + \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1/2}\lambda^{-2}$$

Поскольку множитель при определителе не равен нулю для ненулевых λ , должен обращаться в нуль сам определитель. Отсюда видно, что $-p$ должно быть собственным числом симметричной якобиевой матрицы \mathbf{Y} , зависящей от комплексного параметра λ . Требование периодичности ограничивает значения λ чисто мнимыми $\lambda = i\mu$. Таким образом, исходная задача сводится к однопараметрическому семейству задач определения спектра якобиевой матрицы, причем давно известно [8], что даже несимметричные якобиевы матрицы имеют ровно n действительных и различных собственных чисел.

Пусть $\mu = -i\lambda$ – действительное число, изменяющееся непрерывно от 0 до ∞ . Получим асимптотики спектра. При $\mu \rightarrow 0$ главным становится последнее слагаемое матрицы \mathbf{Y} , поэтому собственные числа $-p_k$ ($k = 1, \dots, n$) будут стремиться к бесконечности. Можно показать, используя круги Гершгорина, что для матрицы (2.17) все собственные числа будут отрицательными. При $\mu \rightarrow \infty$ главным становится первое слагаемое \mathbf{Y} , поэтому p_k будут стремиться к собственным числам диагональной матрицы $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mu^2$, совпадающим с ее элементами и неограниченно растущими. При промежуточных μ в общем случае найти спектр \mathbf{Y} можно только численно.

На окружности пакета должно уместиться *целое* число волн, поэтому μ может принимать не произвольные, а лишь целые значения. С учетом этого факта можно написать, что искомое критическое давление

$$p_* = \min_{\mu=1, \dots, \infty} \min_{k=1, \dots, n} p_k(\mu) \tag{2.18}$$

Резюмируя сказанное, опишем схему действий при расчете. Следует придавать целые значения $\mu = 1, 2, \dots$, для каждого вычислять спектр матрицы \mathbf{Y} и отслеживать изменение наименьшего по модулю собственного числа. Асимптотика при $\mu \rightarrow \infty$ гарантирует, что процесс нахождения минимума (2.18) будет закончен за конечное число шагов. Задача прямого нахождения спектра матриц $\mathbf{Y}(\mu)$ может быть надежно и быстро решена численно, поэтому переформулировать (2.18) в дифференциальной форме смысла не имеет.

Анализ формулы (2.18) показывает, что графики зависимостей $p_k(\mu)$ будут представлять собой семейство кривых, напоминающих графики функции

$$y = a\mu^2 - c + b\mu^{-2}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \tag{2.19}$$

и не пересекающихся ни при каком действительном μ . В принципе возможно так подобрать матрицы A, B, C, J , что минимум самой нижней кривой будет равным нулю или даже отрицательным. В такой ситуации теория не работает. Это ограничение проще проверить при расчете, чем сформулировать в виде явных соотношений между элементами упомянутых матриц. Оно имеет ту же природу, что и ограничение (1.16) для одинаковых колец. К счастью, ни в одном из многочисленных расчетов систем с реальными параметрами такая ситуация не наблюдалась.

При практическом расчете, найдя минимум (2.18), полезно просчитать окрестность точки минимума μ^* для нецелых μ и принять в качестве критического давления полученное таким образом значение p . Разумеется, оно может быть только меньше даваемого формулой (2.18).

3. Результаты вычислений. Была рассмотрена большая серия примеров для пакетов различной геометрии сечения и материала тарелей. В качестве ориентировочных укажем следующие значения геометрических параметров: $H \sim h_i \sim 1$ мм, $t_i \sim 30$ мм, $R_i \sim 200$ мм, $n \sim 20$. Для решения спектральной задачи применялся метод вращений с барьерами, реализованный согласно [10, 11]. Программа уверенно справлялась с расчетом пакета, составленного из пластинок, цилиндрические жесткости которых различались на 2 порядка и более. В случае одинаковых пластинок расчет давал хорошее совпадение с формулами (1.17), (1.18). Для нахождения минимума (2.18) обычно оказывалось достаточным 20–30-ти шагов по μ . При этом строились графики $p_k(\mu)$, по виду которых можно было надежно контролировать качество вычислений. Времена счета на IBM PC 286/287 при практически достаточной точности были порядка нескольких секунд на вариант. Это позволяло оптимизировать геометрию пакета в режиме диалога. В целом можно сказать, что удачным подбором жесткости тарелей можно значительно увеличить критическое давление без существенного увеличения высоты пакета. Среди прочих геометрических параметров особенно сильно на значении критического давления сказывается толщина прослоек (ведь она входит в кубе в выражение цилиндрической жесткости). Увеличение толщины одной из пластинок в середине пакета всего втрое приводит к увеличению ее цилиндрической жесткости в 27 раз. Такая пластинка расчленяет пакет на два, с меньшим числом прослоек каждый, почти не взаимодействующих между собой. В результате критическое давление резко увеличивается по сравнению с пакетом колец равной толщины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Yamaki N.* Buckling of a thin annular plate under uniform compression. // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. P. 267–273.
4. *Mansfield E.H.* On the buckling of an annular plate. // Q. Journ. Mech. and Applied Math. 1960. V. XIII. Pt. 1. P. 16–23.
5. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
6. *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* (ред.) Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с., Т. 3. 567 с.
7. *Гришин С.А.* Задачи с тёмпицевой и квазитёмпицевыми матрицами, возникающие при статическом анализе устойчивости упругих систем. // ПММ. 1995. Т. 59 Вып. 5. С. 784–792.
8. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М. Л.: Гостехиздат, 1941. 220 с.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
10. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
11. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 303 с.